Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 4, 541 – 549

Асимптотичні оцінки інтегралів Лапласа–Стільтьєса

Олена С. Посіко, Мирослав М. Шеремета

Анотація. Нехай F — невід'ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0,+\infty)$ функція, а функція f невід'ємна на $[0,+\infty)$. Отримано асимптотичні оцінки $\ln\int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ через $\ln\mu(\sigma) = \sup\{\ln f(x)+x\sigma:\ x\ge 0\}$, $\sigma\in\mathbb{R}$.

2000 MSC. 33Б50, 44A10.

Ключові слова та фрази. Інтеграл Лапласа-Стільтьєса, ряди Діріхле, максимальний член.

Нехай F — невід'ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0,+\infty)$ функція, а f — така невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція, що для кожних $\sigma\in\mathbb{R}$ і $A>0$ існує інтеграл Лебега–Стільтьєса $\int_0^A f(x)e^{x\sigma}dF(x)$. Інтегралом Лапласа–Стільтьєса будемо називати

$$I(\sigma)=\int\limits_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x). \tag{1}$$

Нехай σ_μ — абсциса максимуму підінтегральної функції $\mu(\sigma) = \sup\{f(x)e^{x\sigma}:\ x\ge 0\}$, $\sigma\in\mathbb{R}$, тобто σ_μ — таке дійсне число, що $\mu(\sigma)<+\infty$ для всіх $\sigma<\sigma_\mu$ і $\mu(\sigma)=+\infty$ для всіх $\sigma>\sigma_\mu$. Якщо $\mu(\sigma)=+\infty$ для всіх σ, то приймаємо $\sigma_\mu=-\infty$, а якщо $\mu(\sigma)<\infty$ для всіх σ, то вважаємо $\sigma_\mu=+\infty$. Неважко показати, що $\sigma_\mu=\underline{\lim}_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}$. Надалі будемо вважати, що $\sigma_\mu=+\infty$, але $f(x)\not\equiv 0$ на кожному проміжку $[x_0,+\infty)$.

Якщо (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0=0$), $F(x)=n(x)$, де $n(t)=\sum_{\lambda_n\le t}1$ — лічильна функція цієї

Стаття надійшла в редакцію 3.03.2004

послідовності, а f — така невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція, що $f(\lambda_n) = a_n \geq 0$ для всіх $n \geq 0$, то

$$I(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n \sigma} \tag{2}$$

є рядом Діріхле з невід'ємними показниками та коефіцієнтами, а $\mu(\sigma) = \max\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma} : n \geq 0\}$ є його максимальним членом.

Через $\Omega(+\infty)$ позначимо клас додатних, необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ, для яких похідна Φ' є додатною, неперервно диференційовною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$ функцією. Для $\Phi \in \Omega(+\infty)$ нехай φ — функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [1, 2] функція Ψ є неперервно диференційовною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$, а функція φ є неперервно диференційовною і зростаючою до $+\infty$ на $(0,+\infty)$.

Зв'язок між зростанням $\ln\mu(\sigma)$ і поводженням $f(x)$ як для інтегралу (1), так і для ряду Діріхле (2) вивчений у статтях [1, 2], де, зокрема, доведено таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $\sigma_\mu = +\infty$ і $\Phi \in \Omega(+\infty)$. Для того, щоб $\ln\mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$, необхідно і досить, щоб $\ln f(x) \leq -x\Psi(\varphi(x))$ для всіх $x \geq x_0$.*

Для рядів Діріхле (2) зв'язок між зростанням $\ln I(\sigma)$ і $\ln\mu(\sigma)$ досліджувався в працях багатьох авторів; вкажемо тут тільки на статті [3–5], присвячені дослідженню умов на (λ_n), за яких $\psi(\ln I(\sigma)) \sim \psi(\ln\mu(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, де ψ — додатна, неперервна і зростаюча до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функція. У загальному випадку інтегралів Лапласа–Стільтьєса (1) зв'язок між зростанням $\ln I(\sigma)$ і $\ln\mu(\sigma)$ досліджувався у статті [6], де вказано достатню умову на F, за якої асимптотична нерівність $\psi(\ln I(\sigma)) \leq (1+o(1))\psi(\ln\mu(\sigma))$ правильна при $0 \leq \sigma \to +\infty$ зовні деякої виняткової множини скінченної міри.

Деякі оцінки $I(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ зверху отримано в [7]. Зокрема, доведено, що якщо $\sigma_\mu = +\infty$ і $\overline{\lim}_{x\to+\infty}(\ln F(x))/x = \overline{\tau} < +\infty$, то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$ правильна нерівність $I(\sigma) \leq \mu(\sigma+\overline{\tau}+\varepsilon)$ за умови $\overline{\lim}_{x\to+\infty}(\ln F(x))/x = \overline{\tau} < +\infty$, і $I(\sigma) \leq K(\varepsilon)(\mu(\sigma/(1-h-\varepsilon)))^{1-h-\varepsilon}$ для кожного $\varepsilon \in (0, 1-h)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$ за умови $\overline{\lim}_{x\to+\infty}(\ln F(x))/\ln(1/f(x)) = h < 1$. Якщо $\sigma_\mu = 0$, то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), 0)$ правильна нерівність $I(\sigma) \leq K(\varepsilon)(\mu(\sigma/(1+h+\varepsilon)))^{1+h+\varepsilon}$, за умови $\overline{\lim}_{x\to+\infty}(\ln F(x))/\ln f(x) = h < +\infty$.

Позначимо через $S_\infty(\Lambda,\Phi)$ — клас рядів Діріхле (2) зі заданою послідовністю показників $\Lambda=(\lambda_n)$, для яких $\sigma_\mu=+\infty$ і $\ln\mu(\sigma)\le\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\ge\sigma_0$. З теореми 1 з [4] і наведеного вище твердження 1 випливає наступне твердження.

Твердження 2. *Нехай* $\sigma_\mu=+\infty$ *і* $\Phi\in\Omega(+\infty)$. *Для того, щоб для кожного ряду Діріхле* (2) *з класу* $S_\infty(\Lambda,\Phi)$ *правильною була асимптотична нерівність* $\ln I(\sigma))\le(1+o(1))\ln\mu(\sigma),\ \sigma\to+\infty$, *необхідно і досить, щоб* $\ln n=O(\Psi(\varphi(\lambda_n))),\ n\to\infty$.

Метою даної замітки є узагальнення цього твердження на випадок інтегралів (1).

Позначимо через V клас невід'ємних, неспадних, необмежених і неперервних справа на $[0,+\infty)$ функцій, а через $LS_\infty(F,\Phi)$ клас інтегралів (1) зі заданою функцією $F\in V$, для яких $\sigma_\mu=+\infty$ і $\ln\mu(\sigma)\le\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\ge\sigma_0$.

Теорема 1. *Нехай* $F\in V$ *і* $\Phi\in\Omega(+\infty)$. *Для того, щоб для кожного інтегралу* $I\in LS_\infty(F,\Phi)$ *правильною була асимптотична нерівність* $\ln I(\sigma))\le(1+o(1))\ln\mu(\sigma),\ \sigma\to+\infty$, *необхідно і досить, щоб* $\ln F(x)=O(\Psi(\varphi(x))),\ x\to\infty$.

Доведення. Почнемо з достатності. За твердженням 1 $\ln f(x)\le -x\Psi(\varphi(x))$ для всіх $x\ge x_0$. Позначимо $x(\sigma)=\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma))$. Тоді $x(\sigma)\ge x_0$ для $\sigma\ge\sigma_0$ і з огляду на умову $\ln F(x)=O(\Psi(\varphi(x))),\ x\to\infty$, маємо

$$I(\sigma)=\left(\int\limits_0^{x(\sigma)}+\int\limits_{x(\sigma)}^{\infty}\right)f(x)e^{x\sigma}\,dF(x)\le$$

$$\le\mu(\sigma)F(x(\sigma))+\int\limits_{x(\sigma)}^{\infty}\exp\{-x(\Psi(\varphi(x))-\sigma)\}\,dF(x)\le$$

$$\le\mu(\sigma)F(x(\sigma))+\int\limits_{x(\sigma)}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{x\Psi(\varphi(x))}{2}\Big\}\,dF(x)\le$$

$$\le\mu(\sigma)F(x(\sigma))+\int\limits_{x(\sigma)}^{\infty}F(x)\exp\Big\{-\frac{x\Psi(\varphi(x))}{2}\Big\}\frac{\varphi(x)}{2}\,dx\le$$

$$\leq \mu(\sigma)F(x(\sigma)) + \int\limits_{x(\sigma)}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{x\Psi(\varphi(x))}{3}\Big\}\frac{\varphi(x)}{2}\,dx \leq$$
$$\leq \mu(\sigma)F(x(\sigma)) + o(1), \quad \sigma \to +\infty,$$

тобто

$$\ln I(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma) + \ln F(x(\sigma)) + o(1), \quad \sigma \to +\infty. \tag{3}$$

Але, з одного боку, з огляду на умову $\ln F(x) = O(\Psi(\varphi(x)))$, $x \to \infty$,

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln F(x(\sigma))}{\sigma} = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln F(\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))}{\sigma} = 2\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\Psi(\varphi(x))} < +\infty.$$

А з іншого боку, оскільки $f(x) \not\equiv 0$ на кожному проміжку $[x_0, +\infty)$, тобто $f(x_k) > 0$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (x_k), то $\mu(\sigma) \geq f(x_k)e^{\sigma x_k}$ для кожного фіксованого k і всіх σ, звідки $\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\sigma} \geq x_k$ і, отже, $\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\sigma} = +\infty$. Тому з нерівності (3) отримуємо асимптотичну нерівність $\ln I(\sigma)) \leq (1 + o(1))\ln\mu(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Достатність умови $\ln F(x) = O(\Psi(\varphi(x)))$, $x \to \infty$, доведено.

Припустимо тепер, що ця умова не виконується, тобто існують повільно зростаюча до $+\infty$ функція α і послідовність (x_k) такі, що $\ln F(x_k) \geq \alpha(x_k)\Psi(\varphi(x_k)))$. Зрозуміло, ми можемо вважати, що послідовність (x_k) зростає досить швидко (швидкість її зростання буде описана нижче). Нам треба побудувати невід'ємну функцію f так, щоб $\sigma_\mu = +\infty$, $\ln\mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$ і асимптотична нерівність $\ln I(\sigma)) \leq (1 + o(1))\ln\mu(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, була неправильною.

Крім послідовності (x_k) розглянемо ще дві послідовності (t_k) і (τ_k) такі, що $x_k < t_{k+1} < \tau_{k+1} < x_{k+1}$, і приймемо

$$f(x) = \begin{cases} \exp\{-x\Psi(\varphi(x))\}, & x_k \leq x \leq t_{k+1}, \\ 0, & t_{k+1} < x < \tau_{k+1}, \\ f(x_{k+1})\exp\{\varkappa_k(x_{k+1} - x)\}, & \tau_{k+1} \leq x \leq x_{k+1}, \end{cases}$$

де

$$\varkappa_k := \frac{\ln f(t_{k+1}) - \ln f(x_{k+1})}{x_{k+1} - t_{k+1}} =$$
$$= \frac{x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1})) - t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1}))}{x_{k+1} - t_{k+1}} =$$
$$= \frac{1}{x_{k+1} - t_{k+1}} \int\limits_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} \varphi(t)\,dt \uparrow +\infty, \qquad k \to \infty.$$

Покажемо спочатку, що $\sigma_\mu = +\infty$ і $\ln\mu(\sigma) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$. Для цього за твердженням 1 досить показати, що

$$f(x_{k+1})\exp\{\varkappa_k(x_{k+1}-x)\} \le \exp\{-\Psi(\varphi(x))\}, \qquad \tau_{k+1} \le x \le x_{k+1},$$

тобто нерівність

$$\frac{x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1})) - x\Psi(\varphi(x))}{x_{k+1}-x} \ge \varkappa_k, \qquad \tau_{k+1} \le x \le x_{k+1},$$

яка еквівалентна нерівності

$$s(x) := \frac{1}{x_{k+1}-x}\int\limits_x^{x_{k+1}} \varphi(t)\,dt \ge \varkappa_k = $$
$$= \frac{1}{x_{k+1}-t_{k+1}}\int\limits_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} \varphi(t)\,dt = s(t_{k+1}), \qquad \tau_{k+1} \le x \le x_{k+1}. \quad (4)$$

Але для $x \le x_{k+1}$

$$s'(x) = \frac{1}{(x_{k+1}-x)^2}\left(\int\limits_x^{x_{k+1}} \varphi(t)\,dt - \varphi(x)(x_{k+1}-x)\right) \ge 0,$$

тобто функція $s(x)$ неспадна і, оскільки $x \ge \tau_{k+1} > t_{k+1}$, то нерівність (4) правильна і, отже, $\sigma_\mu = +\infty$ і $\ln\mu(\sigma) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$.

Покажемо тепер, що для всіх $x \notin [\tau_{k+1}, x_{k+1}]$

$$f(x)\exp\{\varkappa_k x\} \le f(x_{k+1})\exp\{\varkappa_k x_{k+1}\}. \quad (5)$$

Справді, якщо $x \in [x_j, t_{j+1}]$ і $j \ge k+1$, то $x \ge x_{k+1}$ і нерівність (5) еквівалентна нерівності

$$\frac{x\Psi(\varphi(x)) - x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1}))}{x - x_{k+1}} \ge \varkappa_k =$$
$$= \frac{x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1})) - t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1}))}{x_{k+1}-t_{k+1}},$$

тобто

$$\frac{1}{x-x_{k+1}}\int\limits_{x_{k+1}}^{x} \varphi(t)\,dt \ge \frac{1}{x_{k+1}-t_{k+1}}\int\limits_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} \varphi(t)\,dt.$$

Оскільки функція φ зростає і $x \geq x_{k+1} > t_{k+1}$, то остання нерівність очевидна, і отже, оцінка (5) правильна.

Якщо $x \in [x_j,\, t_{j+1}]$ і $j \leq k$, то $x \leq t_{k+1} < x_{k+1}$ і нерівність (5) еквівалентна нерівності

$$\frac{x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1})) - x\Psi(\varphi(x))}{x_{k+1} - x} \leq \varkappa_k = \\ = \frac{x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1})) - t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1}))}{x_{k+1} - t_{k+1}}, \quad (6)$$

тобто доведеній вище нерівності (4). Тому в цьому випадку оцінка (5) є правильною.

Якщо ж $x \in [\tau_{j+1},\, x_{j+1}]$ і $j \geq k+1$, то $x > x_{k+1}$ і нерівність (5) еквівалентна нерівності

$$f(x_{j+1}) \exp\{\varkappa_j(x_{j+1} - x)\} \exp\{\varkappa_k x\} \leq f(x_{k+1}) \exp\{\varkappa_k x_{k+1}\},$$

тобто

$$x_{j+1}\Psi(\varphi(x_{j+1}) - x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1}) \geq \varkappa_j(x_{j+1} - x) + \varkappa_k(x - x_{k+1}).$$

Але $\varkappa_j(x_{j+1} - x) + \varkappa_k(x - x_{k+1}) \leq \varkappa_j(x_{j+1} - x_{k+1})$. Тому нерівність (5) є правильною, якщо

$$\frac{x_{j+1}\Psi(\varphi(x_{j+1})) - x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1}))}{x_{j+1} - x_{k+1}} \leq \varkappa_j = \\ = \frac{x_{j+1}\Psi(\varphi(x_{j+1})) - t_{j+1}\Psi(\varphi(t_{j+1}))}{x_{j+1} - t_{j+1}},$$

тобто

$$\frac{1}{x_{j+1} - x_{k+1}} \int\limits_{x_{k+1}}^{x_{j+1}} \varphi(t)\, dt \geq \frac{1}{x_{j+1} - t_{j+1}} \int\limits_{t_{j+1}}^{x_{j+1}} \varphi(t)\, dt.$$

Оскільки $t_{j+1} > x_{k+1}$, то, як видно з доведення нерівності (4), остання нерівність правильна і, отже, правильною є оцінка (5).

Нарешті, якщо $x \in [\tau_{j+1},\, x_{j+1}]$ і $j \leq k-1$, то $x < x_{k+1}$, а нерівність (5) еквівалентна нерівності

$$x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1})) - x_{j+1}\Psi(\varphi(x_{j+1})) \leq \varkappa_k(x_{k+1} - x) - \varkappa_j(x_{j+1} - x).$$

Але $\varkappa_k(x_{k+1} - x) - \varkappa_j(x_{j+1} - x) \geq \varkappa_k(x_{k+1} - x_{j+1})$. Тому нерівність (5) є правильною, якщо

$$\frac{x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1})) - x_{j+1}\Psi(\varphi(x_{j+1}))}{x_{k+1} - x_{j+1}} \leq \varkappa_k.$$

Остання нерівність збігається з нерівністю (6) $x = x_{j+1}$ і, отже, є правильною. Нерівність (5) доведено.

Зауважимо, що для $x \in [\tau_{k+1},\, x_{k+1}]$

$$\begin{aligned} f(x)\exp\{\varkappa_k x\} = \\ &= f(x_{k+1})\exp\{\varkappa_k(x_{k+1}-x)\}\exp\{\varkappa_k x\} = \\ &\qquad = f(x_{k+1})\exp\{\varkappa_k x_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Тому з огляду на (5) маємо рівність

$$\mu(\varkappa_k) = f(x_{k+1})\exp\{\varkappa_k x_{k+1}\}, \tag{7}$$

які б не були послідовності (x_k), (t_k) і (τ_k) такі, що $x_k < t_{k+1} < \tau_{k+1} < x_{k+1}$.

З іншого боку,

$$\begin{aligned} I(\varkappa_k) \geq \int\limits_{\tau_{k+1}}^{x_{k+1}} f(x)e^{x\varkappa_k}\, dF(x) = \\ &= \int\limits_{\tau_{k+1}}^{x_{k+1}} f(x_{k+1})\exp\{\varkappa_k(x_{k+1}-x)\}e^{x\varkappa_k}\, dF(x) = \\ &\qquad = f(x_{k+1})\exp\{\varkappa_k x_{k+1}\}(F(x_{k+1}) - F(\tau_{k+1})). \end{aligned}$$

Тому, якщо τ_{k+1} таке, що $F(x_{k+1}) \geq 2F(\tau_{k+1})$, то

$$\begin{aligned} \ln I(\varkappa_k) \geq \ln\mu(\varkappa_k) + \ln F(x_{k+1}) - 1/2 \geq \\ \geq \ln\mu(\varkappa_k) + \alpha(x_{k+1})\Psi(\varphi(x_{k+1})) - 1/2. \end{aligned} \tag{8}$$

Зрозуміло, що ми можемо вибрати послідовності (x_k), (t_k) і (τ_k) так, що крім нерівності $F(x_{k+1}) \geq 2F(\tau_{k+1})$, правильними були також наступні співвідношення

$$\frac{\Psi(\varphi(t_{k+1}))}{\Psi(\varphi(x_{k+1}))} \to 0 \quad (k \to \infty), \qquad \frac{t_{k+1}}{x_{k+1}} \to 0 \quad (k \to \infty),$$
$$t_{k+1} \leq \alpha(x_{k+1}) \quad (k \geq k_0).$$

Тоді

$$\ln\mu(\varkappa_k) = \ln f(x_{k+1}) + \varkappa_k x_{k+1} = -x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1})) +$$

$$+\frac{x_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1}))-t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1}))}{x_{k+1}-t_{k+1}}x_{k+1}=$$

$$=\frac{x_{k+1}t_{k+1}(\Psi(\varphi(x_{k+1}))-\Psi(\varphi(t_{k+1})))}{x_{k+1}-t_{k+1}}=$$

$$=(1+o(1))t_{k+1}\Psi(\varphi(x_{k+1}))\le$$

$$\le(1+o(1))\alpha(x_{k+1})\Psi(\varphi(x_{k+1})),\qquad k\to\infty.$$

Звідси і з (8) випливає, що $\ln I(\varkappa_k)\ge 2(1+o(1))\ln\mu(\varkappa_k),\ k\to\infty$, і отже, теорему 1 повністю доведено. □

Перейдемо до оцінки інтегралу Лапласа–Стільтьєса знизу. Оскільки для ряду Діріхле (2) $a_n e^{\sigma\lambda_n}\le I(\sigma)$ для всіх n і $\sigma<\sigma_\mu$, то у цьому випадку $\mu(\sigma)\le I(\sigma)$ для всіх $\sigma<\sigma_\mu$. Для інтегралу (1) у загальному така нерівність не є правильною. Справді, якщо візьмемо $f(x)=0$ для $x\ne n$ і $f(x)=b_n>0$ для $x=n$, то $I(\sigma)=\int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dx=0$, а $\mu(\sigma)=\sup\{f(x)e^{x\sigma}:\ x\ge 0\}=\sup\{b_n e^{\sigma\lambda_n}:\ n\ge 0\}>0$ і, отже, жодної оцінки $I(\sigma)$ знизу через $\mu(\sigma)$ подати не можна. Проте за певних умов на функції f та F оцінити $I(\sigma)$ знизу через $\mu(\sigma)$ можна.

Нехай $F\in V$. Будемо говорити, що додатна функція f має регулярну зміну відносно F, якщо існують числа $a\ge 0$, $b\ge 0$ і $h>0$ такі, що для всіх $x\ge a$

$$\int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)\,dF(t)\ge hf(x). \tag{9}$$

Якщо функція f неперервна і $0<\lambda_1(\xi)\le f(x+\xi)/f(x)\le\lambda_2(\xi)<+\infty$ для всіх $x\ge 0$ та $\xi\ge 0$, то f має регулярну зміну відносно $F(x)\equiv x$.

Зауважимо також, що оскільки ряд Діріхле (2) можна записати у вигляді інтегралу (1) з $f(x)=a_n$ для $x=\lambda_n$ та $f(x)=0$ для $x\ne\lambda_n$ і $F(x)=n(x)$, де $n(x)$ — лічильна функція послідовності (λ_n), то виконання умови (9) для рядів Діріхле (2) є очевидним.

Теорема 2. *Нехай $F\in V$, а функція f має регулярну зміну відносно F і $\sigma_\mu=+\infty$. Тоді $\ln\mu(\sigma)\le(1+o(1))\ln I(\sigma),\ \sigma\to\sigma_\mu$.*

Доведення. Для $\sigma\ge 0$ маємо

$$I(\sigma)\ge\int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)e^{\sigma t}\,dF(t)\ge e^{x\sigma-a\sigma}\int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)\,dF(t)\ge he^{-a\sigma}f(x)e^{x\sigma},$$

тобто $f(x)e^{x\sigma}\le e^{a\sigma}I(\sigma)/h,\ x\ge a$, звідки випливає нерівність $\mu(\sigma)\le e^{a\sigma}I(\sigma)/h+K_1$, $K_1=\mathrm{const}>0$. Але, як було зауважено у доведенні теореми 1, $\sigma/\ln\mu(\sigma)\to 0$, $\sigma\to+\infty$. Тому звідси отримуємо співвідношення $\ln\mu(\sigma)\le(1+o(1))\ln I(\sigma)$, $\sigma\to+\infty$. Теорему 2 доведено. $\square$

З теорем 1 і 2 випливає наступне твердження.

Наслідок. *Нехай $F\in V$, $\Phi\in\Omega(+\infty)$, а функція f має регулярну зміну відносно F. Якщо $\ln F(x)=O(\Psi(\varphi(x))$, $x\to+\infty$, то для кожного інтегралу $I\in LS_\infty(F,\Phi)$ є правильною асимптотична рівність $\ln I(\sigma))=(1+o(1))\ln\mu(\sigma)$, $\sigma\to+\infty$.*

Література

[1] М. Н. Шеремета, С. И. Федыняк, *О производной ряда Дирихле* // Сиб. матем. журн. **39** (1998), N 1, 206–223.

[2] М. М. Шеремета, О. М. Сумик, *Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій* // Матем. студії. **11** (1999), N 1, 41–47.

[3] М. Н. Шеремета, *О полной эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. **47** (1900), N 6, 119–123.

[4] М. Н. Шеремета, *О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. **51** (1992), N 5, 141–148.

[5] P. V. Filevych, *To the Sheremeta theorem concerning relations between the maximal term and the maximum modulus of entire Dirichlet series* // Matematychni studii. **3** (2000), N 2, 140–144.

[6] О. Б. Скаскив, *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. **60** (1999), N 2, 282–292.

[7] О. С. Посіко, О. Б. Скасків, М. М. Шеремета, *Оцінки інтегралу Лапласа-Стільтьєса* // Математичні студії. **21** (2004), N 2, 179–186.

Відомості про авторів

Олена Степанівна Посіко, Мирослав Миколайович Шеремета	Львівський національний університет, вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна *E-Mail:* `m_m_sheremeta@list.ru`