Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 3, 418 – 441

Аппроксимация нелинейных операторов рядами Вольтерра в многомерном случае

Сергей Г. Суворов

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Рассматриваются непрерывные нелинейные операторы $A : X \to Y$ из функционального локально выпуклого пространства X в нормированное функциональное пространство Y. Элементы X и Y являются функциями многих переменных. Общая теорема об аппроксимации A рядами Вольтерра устанавливается простым способом. Для эквивариантных операторов (относительно группы переносов или группы изометрий) или для причинных — доказывается возможность аппроксимации рядами Вольтерра с такими же свойствами эквивариантности или причинности.

2000 MSC. 41A65, 46L05, 46T20, 47H60.

Ключевые слова и фразы. Аппроксимация нелинейных операторов; ряды Вольтерра; причинные операторы; эквивариантные операторы.

1. Введение. В статье пойдет речь об аппроксимации непрерывных нелинейных операторов $A : X \to Y$ конечными отрезками рядов Вольтерра — "полиномами Вольтерра", для сокращения. Здесь X — некоторое функциональное ЛВП над $\mathbb{R}$, состоящее из скалярных функций $u(x)$, $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Пространство Y — банахово над $\mathbb{R}$ (или банахова алгебра над $\mathbb{C}$ в разделах 4–9), состоящее из скалярных функций $v(y)$ аргумента $y = (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$; в большинстве разделов $m = n$.

Класс полиномов Вольтерра (VP) состоит из операторов $P : X \to Y$ вида

$$(Pu)(y) = Z_0(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(y, x)u(x)\,dx + \\ + \iint\limits_{\mathbb{R}^n\,\mathbb{R}^n} Z_2(y, x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)\,dx_1dx_2 + \dots$$

ISSN 1810 – 3200.

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\cdots\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_k(y,x_1,\ldots,x_k)u(x_1)\cdots u(x_k)\,dx_1\cdots dx_k, \quad (1)$$

где x_i — независимые многомерные аргументы, $x_i = (x_i^1,\ldots,x_i^n)$, $k \in \mathbb{N}$ любое. Функции Z_i называются ядрами Вольтерра.

Исследуется возможность равномерной в норме Y аппроксимации оператора A полиномами Вольтерра на компактах $K \subset X$ или на некомпактных K специального вида: можно ли утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $P_\varepsilon \in$ VP, такой, что $\|P_\varepsilon u - Au\|_Y \le \varepsilon$ для всех $u \in K$?

Первые результаты здесь принадлежат М. Фреше (см. библ. в [1]), а в трактате [2] приведено предложение 6, гл. X, § 4, из которого следует большинство теорем требуемого типа. (Но и в дальнейшем появлялись работы об аппроксимации нелинейных операторов, основные результаты которых являются очевидными следствиями этого предложения.) То, что общие результаты о VP-аппроксимации легко следуют из [2], демонстрируется в разделе 2.

Если общие вопросы о VP-аппроксимации хорошо изучены, то вопросы о сохранении классов операторов — нет. За исключением нескольких частных случаев, автору известен лишь цикл работ (см. [3] и библ. там), в которых для $m = n = 1$, X, $Y = L_p\,[a,b]$ или $C\,[a,b]$ и общих операторов A доказывается, что стационарные или причинные операторы, или же операторы с конечной памятью аппроксимируются полиномами Вольтерра из тех же классов. В разделах 7, 9 эти результаты для произвольных $m = n$, трансляционно инвариантных или причинных операторов доказываются весьма просто (однако, без доказательства устойчивости, которое есть в [3]). Более сложное доказательство сохранения класса для операторов, эквивариантных относительно группы изометрий $\mathrm{Is}\,(\mathbb{R}^n)$, содержится в разделе 8.

Главная цель статьи — продемонстрировать единый подход к доказательствам таких результатов, поэтому для не принципиальных технических упрощений автор использовал, по преимуществу, конкретные примеры пространств и групп.

Из этого подхода выпадает раздел 10, где приводится доказательство существования эквивариантных аппроксимаций только для компактных групп в $\mathbb{R}^n$, использующее традиционные методы построения эквивариантных аппроксимирующих полиномов из неэквивариантных.

Многочисленные приложения рядов Вольтерра можно найти в [4], [5].

2. Общая теорема о VP-аппроксимациях. Пусть $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ — область, $D(\Omega_x)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых в Ω_x функций. Далее, $X = X(\Omega_x)$ — какое-то функциональное ЛВП, непрерывно вложенное в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_x)$. (Под $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для неограниченных областей подразумевается проективный предел [6] по $N = 1, 2, \ldots$ пространств $L_1(\Omega \cap \{|x|_{\mathbb{R}^n} < N\})$.) Наконец, компакт $K \subset X$, а Y — функциональное банахово пространство, в котором плотно $D(\Omega_y)$; область $\Omega_y \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема 1. *В указанных условиях любой непрерывный оператор* $A : K \to Y$ *может быть равномерно в норме* Y *аппроксимирован полиномами Вольтерра вида* (1) *с ядрами* $Z_k \in D(\Omega_y) \otimes D(\Omega_x) \otimes \cdots \otimes D(\Omega_x)$ (*тензорные произведения алгебраические, т.е. не пополненные*).

Доказательство. Множество H функционалов вида $\langle l_w, u \rangle = \int_{\Omega_x} w(x) u(x)\, dx$, $w \in D(\Omega_x)$ отделяет точки из K. В условиях теоремы эти функционалы непрерывны, а по ([2, предложение 6, гл. X, § 4]) это означает, что указанные операторы могут быть равномерно аппроксимированы полиномами относительно функций из H с коэффициентами из Y. Мономы, составляющие эти полиномы, имеют вид

$$L_{k,j}(u) = a_{k,j}(y) \int\limits_{\Omega_x} w_{1,j}(x_1) u(x_1)\, dx_1 \cdots \int\limits_{\Omega_x} w_{k,j}(x_k) u(x_k)\, dx_k =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[a_{k,j}(y) \prod_{i=1}^{k} w_{i,j}(x_i) \right] u(x_1) \cdots u(x_k)\, dx_1 \cdots dx_k. \quad (2)$$

Из доказательства, приведенного в [2], очевидно, что коэффициенты $a_{k,j}(y)$ можно выбирать из любого плотного в Y множества; в условиях теоремы — из $D(\Omega_y)$. При этом ядра k-й степени будут иметь вид
$Z_k(y, x_1, \ldots, x_k) = \sum\limits_j a_{k,j}(y) \prod\limits_{i=1}^{k} w_{i,j}(x_i) \in D(\Omega_y) \otimes D(\Omega_x) \otimes \cdots \otimes D(\Omega_x)$,
что и требуется. (При $k = 0$ “пустое произведение” равно 1.) □

Формальная запись вырожденных ядер в виде элементов непополненных тензорных произведений удобна дальше, в частности, в разделе 8.

Замечание 1. Можно уменьшить произвол в ядрах, если учесть, что в случае скалярных функций $u(x)$ кратные ядра симметричны по векторам x-переменных; например, $Z_2(y, x_1, x_2) = Z_2(y, x_2, x_1)$ (векторы $(x_1^1, \ldots, x_1^n)$ и $(x_2^1, \ldots, x_2^n)$ переставляются полностью). Это известно при $n = 1$, но легко проверяется и в общей ситуации путем симметризации ядер. Таким образом, произведениям мономов Вольтерра можно сопоставить симметризованные тензорные (по x) произведения ядер, см. по этому поводу [7]. В случае вектор-функций возникают несимметричные ядра что привносит дополнительные трудности в методы идентификации ядер [1, 8].

При всей своей общности утверждения, которые можно получить, используя [2], обладают серьезным недостатком: нет возможности ответить, сохраняются ли какие-то специальные свойства приближаемых операторов у приближающих VP. Для ответа на такие вопросы в более-менее общей ситуации требуется сузить класс пространств Y. Пространство X можно оставить почти в прежней общности, но мы остановимся на простейшем случае, удовлетворяющем естественным прикладным требованиям.

В разделах 3–9 предполагается, что $m = n$.

3. Пространство X. Важнейший случай сохранения класса операторов при аппроксимациях это сохранение симметрий. В разделах 7–8 мы рассмотрим группу T параллельных переносов $\mathbb{R}^n$, группу изометрий $\mathrm{Is}\,(\mathbb{R}^n)$, заданную, как полупрямое произведение $T \rtimes O(n)$ ([9], 9.1.4) и, очень коротко, ее подгруппу $\mathrm{Is}^+\,(\mathbb{R}^n) = T \rtimes SO(n)$, на которой хорошо видно изменение свойств полиномов при переходе к подгруппе. (Подгруппа T слишком сильно отличается от Is и чувствительность метода к изменениям групп плохо видна на переходе $\mathrm{Is} \to T$.)

Пространство X должно быть инвариантно относительно естественного действия этих групп, определяемого в конце раздела. (Группа T будет действовать в $\mathbb{R}^n$, как в частном случае аффинного пространства, совпадающего со своим присоединенным векторным. Указанные группы рассматриваются как группы Ли.)

Если речь идет о прикладных проблемах, то любая система работает при ограниченных значениях аргументов. Таким образом, желательно, чтобы входные функции были финитными. Желательно также иметь в качестве X полное пространство с удобными свойствами компактов в нем и, кроме того, X должно быть приспособлено к работе алгоритмов идентификации — нахождения ядер Вольтерра. Разработанный в [1, 8] алгоритм (универсальный алгоритм для случая $n = 1$) требует для своей работы разрывных функций.

Простейшая конструкция пространства, удовлетворяющего всем перечисленным пожеланиям, определяется так. Пусть $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < k\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Рассматривая пространства $X_{p,k} \equiv L_p(\Omega_k)$, $1 \leq p < \infty$, будем предполагать, что все функции из этого пространства продолжены нулем за Ω_k, таким образом, $X_{p,k}$ — замкнутое подпространство $X_{p,k+1}$. Пространство $X \equiv X_p \equiv \bigcup_k X_{p,k}$ взято с топологией индуктивного предела, т.е. является строгим индуктивным пределом; X полно и любое ограниченное множество из него входит в какое-то $X_{p,k}$ с подходящим k [6].

Введем линейное представление группы T в X: для $t \in T$ положим $\pi_X(t)u(x) = u(x-t)$. Групповая инвариантность X очевидна, а оператор $\pi_X(t)$ непрерывен. Действительно, по свойствам индуктивного предела достаточно проверить его непрерывность на каждом $\gamma_k X_{p,k}$, где γ_k — вложение $X_{p,k}$ в X. При этом $\pi_X(t)\gamma_k$ действует, фактически, из $X_{p,k}$ в некоторое $X_{p,l}$, $l > k$, а такое действие непрерывно ввиду инвариантности меры при переносах. Непрерывность $\pi_X(t)u$ по (t,u) так же легко проверяется.

Аналогично вводится представление $\mathrm{Is}\,(\mathbb{R}^n)$ в X: $(\pi_X(g)u)(x) = u(g^{-1}x)$ (схожесть обозначения с предыдущим не приведет к недоразумениям). Непрерывность представления очевидна ввиду сказанного выше: проверка непрерывности сводится к действию в пределах какого-то $X_{p,l}$. Раздельная (сильная) непрерывность при этом проверяется стандартно ([10, гл. 5, § 1]), а совместная — т.е. непрерывность $(g,u) \to \pi_X(g)u$ — следует из [11, § 7.2].

4. Банахова алгебра Y. Если вышеуказанный выбор пространства X вызван прикладными требованиями и соображениями простоты, то с Y положение иное. Для применимости используемых ниже методов (в частности, для предложения 2 и раздела 6) необходимо, чтобы Y была унитальной коммутативной банаховой C^*-алгеброй (по поводу терминов см. [12]). Следовательно, это алгебра непрерывных функций на некотором компакте, а при естественном требовании $Y \subset CB(\mathbb{R}^n)$ получим в качестве Y алгебру непрерывных функций на какой-то компактификации $\mathbb{R}^n$. Здесь $CB(\mathbb{R}^n)$ — алгебра ограниченных непрерывных функций с sup-нормой.

Чтобы избежать технических усложнений, не относящихся непосредственно к теме статьи, в качестве Y выберем подалгебру из $CB(\mathbb{R}^n)$, отвечающую простейшей, одноточечной компактификации. При этом удобно рассматривать следующий "полукомплексный" вариант: вещественное X и комплексная алгебра Y. После доказательства комплексного варианта теоремы об аппроксимации, вещественный вариант может быть получен взятием Re.

Итак, Y — алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций $v(y)$ на $\mathbb{R}^n$, имеющих предел на бесконечности: $v(y) \to \alpha_v \in \mathbb{C}$ при $|y| \to \infty$. Алгебра $Y = C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) + \mathbb{C} = C(Q, \mathbb{C})$, где $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ — алгебра всех зануляющихся на бесконечности непрерывных функций, а Q — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$; в Y задана обычная sup-норма.

В ситуациях возможных недоразумений будем добавлять знаки полей скаляров $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ в обозначения пространств.

Так как в Y плотны функции из $D(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) + \mathbb{C}$, где $D(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ пространство комплекснозначных финитных бесконечно дифференцируемых функций, то справедлив соответствующий комплексный аналог теоремы 1, который выделим в виде предложения.

Предложение 1. *Любой непрерывный оператор $A : K \subset X \to Y$ может быть равномерно в норме Y аппроксимирован полиномами Вольтерра вида* (1) *с ядрами $Z_k \in (D(\mathbb{R}^n_y, \mathbb{C}) + \mathbb{C}) \otimes D(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes D(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{R})$.*

Доказательство. Действительно, полный класс ядер указанного вида за счет первого тензорного сомножителя включает вместе с каждым Z_k и комплексно сопряженное ядро $\overline{Z}_k$; следовательно, этот класс содержит ядра $\operatorname{Re} Z_k$. При этом вещественные части соответствующих VP аппроксимируют операторы $A : K \to Y_{\mathbb{R}}$, где $Y_{\mathbb{R}}$ — вещественный аналог Y. Значит, комплекснозначные VP аппроксимируют комплекснозначные A, в силу комплексной линейности соответствующего VP-пространства. □

Аналогично концу предыдущего раздела, вводим представление $\pi_{_Y}(t)v(y) = v(y-t)$ группы T. Это изометрический автоморфизм алгебры $C(Q)$ и по теореме Гельфанда-Колмогорова [13] ему отвечает гомеоморфизм $\pi_{_Q}(t) : Q \to Q$ с единственной неподвижной точкой ∞.

Так же естественно вводится представление $\operatorname{Is}(\mathbb{R}^n)$ в Y. Обозначение будем использовать то же самое, опуская и индексы X, Y, когда это не приведет к недоразумению.

5. Алгебра операторов из K в Y определяется как функциональная. А именно, в пространстве $\mathcal{E}$ всех непрерывных операторов $A : K \subset X \to Y$ с обычными линейными операциями вводится поточечное умножение $(AB)u = (Au)(Bu)$, sup-норма $\|A\| = \sup\limits_{u \in K} \|Au\|_Y$ и инволюция $(A^*)u = \overline{Au}$. Алгебра $\mathcal{E}$ полна [2], коммутативна, содержит единицу $(1_{_\mathcal{E}})(u) \equiv 1_{_Y}$, кроме того, $\|A^*A\| = \|A\|^2$, т.к. этим свойством обладает алгебра Y. Остальные свойства банаховых коммутативных C^*-алгебр для $\mathcal{E}$ очевидны. (Одной из целей введения в разделе 4 “полукомплексного” варианта является комплексная алгебра $\mathcal{E}$, т.е. и наличие полноценной теории для нее.)

Нам потребуются описания пространства характеров $M = M(\mathcal{E})$ алгебры $\mathcal{E}$ и гельфандова изоморфизма $\tau : A \in \mathcal{E} \to f_A \in C(M)$.

Предложение 2. *Пространство M состоит из функционалов на $\mathcal{E}$ вида $h_{u,y}(A) = (Au)(y)$, где (u, y) — произвольная (фиксированная) точка из $K \times Q$. Отображение $\Theta : (u, y) \to h_{u,y}$ является гомеоморфизмом $K \times Q$ в топологии произведения и M в гельфандовой топологии. Функция $f_A = \tau(A)$ определяется формулой: $f_A(h_{u,y}) \equiv f_A(u, y) \stackrel{\text{def}}{=} (Au)(y)$.*

Вместо доказательства можно сослаться на [14], где аналогичный вопрос исследован для вполне регулярного K, локально компактного вещественно полного Q и непрерывных, не обязательно ограниченных операторов и функций; как частный случай для компактов получим предложение 2. Но для полноты изложения приведем здесь (вполне рутинное) независимое доказательство — только для нашей ситуации. После доказательства гомеоморфности M и $K \times Q$ в дальнейшем не будут различаться функции $f_A(h_{u,y})$ на M и $f_A(u, y)$ на $K \times Q$.

Доказательство предложения 2. Тот факт, что $h_{u,y}(\cdot)$ — линейный мультипликативный функционал (т.е. характер), очевиден. Он непрерывен ввиду автоматической непрерывности характеров, [12, 1.2.6].

Докажем непрерывность Θ. Функции вида $f_A(u, y) = (Au)(y)$ непрерывны на $K \times Q$, так как $|f_A(u, y) - f_A(v, z)| \leq |f_A(u, y) - f_A(u, z)| + |f_A(u, z) - f_A(v, z)| = |(Au)(y) - (Au)(z)| + |(Au)(z) - (Av)(z)|$. При (v, z), стремящихся к фиксированной (u, y), первая разность мала за счет непрерывности функции $(Au)(\cdot)$ на Q, а вторая — за счет непрерывности оператора A в sup-норме Y; так что f_A непрерывна в (произвольной) точке (u, y).

Если теперь взять фиксированную точку $(u_0, y_0) \in K \times Q$, то окрестность точки $h_{u_0,y_0} = \Theta(u_0, y_0)$ в M определяется выбором $\varepsilon > 0$ и конечного набора операторов $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$, а именно, $U \equiv U(h_{u_0,y_0}) \cap \Theta(K \times Q) = \{h_{v,z} : (\forall\, l = 1, \ldots, k)\, |h_{v,z}(A_l) - h_{u_0,y_0}(A_l)| < \varepsilon\}$. Эти же неравенства в терминах f_A выглядят, как $|f_{A_l}(v, z) - f_{A_l}(u_0, y_0)| < \varepsilon$ и, ввиду непрерывности f_A, определяют открытое множество точек (v, z). Итак, $\Theta^{-1}(U)$ открыто, т.е. отображение Θ непрерывно.

Так как $K \times Q$ компакт, то $\Theta(K \times Q)$ тоже компакт, [15, 3.1.10].

Докажем сюръективность Θ. Пусть существует характер $h_0 \in M$, не входящий в $\Theta(K \times Q)$. Так как пространство M нормально ([15, 3.1.9]), то h_0 и $\Theta(K \times Q)$ функционально отделимы, т.е. найдется $\varphi \in C(M)$, такая, что $\varphi(h_0) = 1$, $\varphi\big|_{\Theta(K \times Q)} \equiv 0$. Гельфандов изоморфизм между $\mathcal{E}$ и $C(M)$ (пока еще — абстрактный) ставит в соответствие функции φ оператор $B \in \mathcal{E}$. Это не ноль, т.к. $\varphi(h_0) = h_0(B) = 1$, но $(Bu)(y) = h_{u,y}(B) = \varphi(h_{u,y}) = 0$ всюду на $K \times Q$ — противоречие.

Для доказательства инъективности Θ возьмем две любые разные точки (u, y), $(v, z) \in K \times Q$. Если $u \neq v$, то положим: (1) $Au = w$, где $w \in Y$ — любая функция с условием $w(y) = 1$; (2) $Av = 0$. Если же $u = v$, то $y \neq z$ и положим $Au = Av = w$, где $w(y) = 1$, $w(z) = 0$. В обоих случаях продолжаем A на все $K \times Q$ произвольным непрерывным образом и в результате имеем $h_{u,y}(A) = 1$, $h_{v,z}(A) = 0$. Следовательно, $\Theta(u, y) \neq \Theta(v, z)$.

Таким образом, Θ — непрерывная биекция $K \times Q$ на M, т.е. гомеоморфизм ([15, 3.1.13]). Этим доказано первое и второе утверждения. Третье — очевидная конкретизация гельфандова изоморфизма, полученная явным описанием Θ. □

6. Единый подход к вопросу о сохранении класса операторов заключается в факторизации пространства характеров, т.е. в склейке каких-то подмножеств из $M = M(\mathcal{E})$ в точку. При этом для трансляционно инвариантных или причинных операторов доказательства просты даже в многомерном случае.

Предварительно опишем наш подход неформальным языком. При исследовании вопросов аппроксимации на каком-то этапе становится ясной структура приближающих полиномов и дело только *в доказательстве* того факта, что данные полиномы пригодны для приближения данного класса операторов. Строго будет сформулирован только этот последний этап (шаги 2–4 ниже), причем удобнее идти от полиномов к операторам, т.е. считать множество полиномов априори заданным (шаг 1 — обеспечение требуемых свойств этого множества).

Так как используется только подмножество множества всех полиномов, то некоторые пары характеров (возможно) не будут различаться. По неотделимым характерам пространство M факторизуется и на фактор-пространстве M/E применима стандартная теорема Вейерштрасса–Стоуна, т.е. аппроксимируются все непрерывные операторы.

Операторы, которые можно рассматривать на M/E, это некоторое подмножество операторов на M и формально это свойство (возможность быть заданным на M/E) точно определяет класс аппроксимируемых операторов. Однако часто требуется последний (неформальный) шаг — описать этот класс в тех терминах, в которых удобно характеризовать интересующие нас операторы.

Теперь эти же шаги более строго (технически проще временно забыть о симметричностях из замечания 1, вспомнив об этом после завершения шагов).

1) Выбрать подалгебру $\Pi \subset \mathrm{VP} \cap \mathcal{E}$, отвечающую структуре задачи. Она должна содержать единицу, быть замкнутой относительно сопряжения, но не обязана описываться теоремой 1 или предложением 1. Одновременно автоматически задается подалгебра Φ функций на M, отвечающих полиномам из Π.

2) Выяснить, какие пары характеров этими полиномами не различаются — пусть это множество $E \subset M \times M$.

3) Профакторизовать M по E. Соответствующее фактор-отображение всегда замкнуто и M/E — компакт. Эти утверждения справедливы в общем случае (в рамках рассматриваемой задачи) и очевидно следуют из [15, 3.2.G, 3.2.11].

4) На M/E функции из Φ разделяют точки, содержат единицу и сопряженные функции, т.е. Φ плотна в алгебре всех непрерывных на M/E функций.

5) Последний шаг — по возможности наглядно описать те операторы $A : K \to Y$, чьи функции $f_A(u, y)$ могут быть определены на M/E, т.е. $f_A = \varphi \circ \tau$, где φ — непрерывная функция на M/E, а $\tau : M \to M/E$ — естественное отображение. Именно этот класс операторов может быть равномерно аппроксимирован полиномами из Π. Возможно, "наглядное описание" — т.е. конкретный класс $\mathcal{C}$ операторов — охватит не все такие A. Но если охвачены полиномы из Π, то имеется вполне строгий результат о возможности приближения операторов из $\mathcal{C}$ полиномами из того же класса.

В рамках этого же шага мы будем рассматривать и ситуацию некомпактного K, образованного орбитами компактов.

7. Трансляционно инвариантные операторы. Первый пример — это операторы, эквивариантные относительно группы T параллельных переносов, а именно, со свойством $(\forall a \in \mathbb{R}^n)[Au(x-a)](y) = [Au(x)](y-a)$.

В качестве алгебры Π выберем полиномы вида

$$(Pu)(y) = Z_0 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(y-x)u(x)\,dx + \\ + \iint\limits_{\mathbb{R}^n\,\mathbb{R}^n} Z_2(y-x_1, y-x_2)u(x_1)u(x_2)\,dx_1dx_2 + \dots . \quad (3)$$

Здесь константа $Z_0 \in \mathbb{C}$ не зависит от u, y, но своя для разных полиномов; $y-x = \{y^i - x^i\}$. Число слагаемых конечно и ядра $Z_k(\xi_1, \dots, \xi_k) \in D(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n)$. Алгебра Π не входит в систему полиномов из теоремы 1 или предложения 1, т.к. нет финитности ядер отдельно по y, x^i.

Проверим, что $\Pi \subset \mathcal{E}$. Тот факт, что $(Pu)(y) \in Y$ следует: непрерывность по y — из гладкости и финитности ядер по ξ_i; фиксированный предел на бесконечности (равный Z_0 для P из (3)) — из финитности ядер и ограниченности носителя любой $u(x)$.

Непрерывность оператора $P : O \subset X \to Y$ на любом ограниченном множестве O (которое обязано входить в какое-то $L(\Omega_k)$) проверяется так же легко, как и для сверточных операторов. Чтобы проверить "полноценную" непрерывность, например, в точке u_0, достаточно взять ε-окрестность V_ε точки Pu_0 в Y и окрестность U вида $\{u_0 + \bigcup\limits_k U_k\}$ в X, где $U_k = \{w : \|w\|_k < \delta_k\}$, $\|\cdot\|_k$ — норма в $L(\Omega_k)$. Так как скорость стремления $\delta_k \to 0$ может быть выбрана любой, то всегда можно добиться, чтобы $P(U) \subset V_\varepsilon$. Отсюда же, кстати, следует, что функции из Φ, т.е. функции $f_P(u, y) = (Pu)(y)$, определены и непрерывны не только на M, но и всюду в $X \times Q$.

Вместе с каждым P в Π входит полином с комплексно сопряженными ядрами. Единица — это полином с $Z_0 = 1$ и прочими $Z_k = 0$. Таким образом, выполнены условия первого шага.

Лемма 1. *Пусть $u, v \in X$; $y, z \in \mathbb{R}^n$; $h_{u,y}, h_{v,z} \in M$. Для того, чтобы $h_{u,y}$ и $h_{v,z}$ не отделялись функциями из Φ, необходимо и достаточно, чтобы $u(x) = v(x + z - y)$.*

Доказательство достаточности элементарно и проводится в лемме 3 для общих групп.

Необходимость обеспечивается линейными членами (3). Пусть линейные члены не отделяют $h_{u,y}$ и $h_{v,z}$, т.е. для всех подходящих Z_1 будет $\int Z_1(y - x)u(x)\,dx = \int Z_1(z - x)v(x)\,dx$. Последний интеграл равен $\int Z_1(y - x)v(x + a)\,dx$, где $a = z - y$. Пусть x_0 — лебегова точка для u, а $x_0 + a$ — лебегова для v. Для соответствующих существенных значений функций предположим $u(x_0) \neq v(x_0 + a)$. Если $\delta_\varepsilon(x)$ — достаточно точное приближение из D для δ-функции, то, взяв $Z_1(\xi) = \delta_\varepsilon(\xi + x_0 - y)$, получим $Z_1(y - x) = \delta_\varepsilon(x_0 - x)$. Это обеспечит различие интегралов, что противоречит предположению. $\square$

Знаком ∞ далее будем обозначать бесконечно удаленную точку, добавляемую к $\mathbb{R}^n$ при компактификации $\mathbb{R}^n \subset Q$. Соответственно, $h_{u,\infty}(A) = (Au)(\infty)$.

Лемма 2. 1) *Если $z \in \mathbb{R}^n$, $v \in X$, причем, $v \not\equiv 0$, то для всех $u \in X$ характеры $h_{v,z}$ и $h_{u,\infty}$ отделяются функциями из Φ.* 2) *Характеры $h_{u,\infty}$ и $h_{v,\infty}$ не отделяются при любых u , v.* 3) *Характеры $h_{0,\infty}$ и $h_{0,z}$ (т.е. здесь $v \equiv 0$) не отделяются при любых $z \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Третье утверждение очевидно, второе немедленно следует из финитности u, v (по x) и ядер (по $y - x_i$). Для доказательства первого утверждения достаточно взять такое ядро (δ-образной формы), чтобы $(Pv)(z) \equiv \int Z_1(z-x)v(x)\,dx \neq 0$. Всегда $(Pv)(\infty) = 0$, откуда и следует утверждение. $\square$

Пусть $K \subset X$ — компакт. По свойствам $X = X_p$ компакт $K \subset L_p(\Omega_k)$ и пусть $K(r)$ — объединение сдвигов K векторами $\{a : |a| \leq r\}$. Множество $K(r)$ тоже компактно и пространством характеров построенной по нему алгебры $\mathcal{E}$ по предложению 2 является $M = K(r) \times Q$.

Из лемм 1, 2 легко увидеть, что полиномы из Π не отделяют характеры в следующих парах: $\{h_{u(x),y}; h_{u(x-a),y+a}\}$, где $u(x), u(x-a) \in K(r)$, $y \in \mathbb{R}^n$; $\{h_{u,\infty}; h_{v,\infty}\}$, $\{h_{0,y}; h_{0,z}\}$, где $y, z \in Q = \mathbb{R}^n \cup \infty$; все иные неотделимые пары порождаются указанными. Этим задается замкнутое отношение эквивалентности E (см. цитированную выше [15]) и множество M/E — компактно.

Третий и четвертый шаги выполнены и остается пятый: описать операторы $A : K(r) \to Y$, постоянные на классах эквивалентности. Их можно описать двумя условиями:

(i) $(\forall u(x), u(x-a) \in K(r))\,(Au(x-a))(y) = (Au(x))(y-a)$, или, если использовать обозначения π_X, π_Y из разделов 3, 4, то

$$A\pi_X(a) = \pi_Y(a)A; \tag{4}$$

(ii) $(\forall u)(Au)(\infty) = \mathrm{const}\,(A)$ — константа по u, которая может зависеть от A.

(Небольшой комментарий к этому свойству. Каждая конкретная функция $u(x) \in X$ финитна. Поэтому, если ядра $Z_1(\xi)$, $Z_2(\xi_1, \xi_2)$, ... финитны по ξ_i, то все интегралы в (3) зануляются при $|y| \to \infty$ и остается только $Z_0 = \mathrm{const}$. Это свойство сохраняется и у аппроксимируемых операторов A. Вызвана такая ситуация структурой X и выбранной (для простоты) одноточечной компактификацией $\mathbb{R}^n$ при построении Y.)

Условие (i) равносильно первой неотделяемой паре, вторая пара получается из (ii). Третья для $y, z \in \mathbb{R}^n$ получается из (i), а для y или $z = \infty$, это просто свойство алгебры Y — существование предела функций на бесконечности. (Особая роль $u \equiv 0$ вызвана тем, что это единственная функция-константа в X.)

Очевидно и наоборот: если функция f_A оператора A не отделяет третью пару, то определено предельное значение $(A0)(\infty)$. Неразличение характеров второй пары теперь влечет совпадение $(Au)(\infty)$ для всех u. (Поведение Au на ∞ связано: независимость от u — с финитностью ядер, константа в качестве $(Au)(\infty)$ — с постоянством Z_0, которое, в свою очередь, вызвано выбором Y.)

В одномерном случае ($n = 1$) мы получили теорему из [3] о приближении полиномами из Π стационарных операторов с конечной памятью.

Пусть теперь $u \in K(r)$, сдвиг же a таков, что $\pi_X(a)u \notin K(r)$. В пределах $K(r)$ для оператора A имелось приближение $Pv \approx Av$ с точностью $\varepsilon > 0$, равномерное по $v \in K(r)$, $y \in Q$. Здесь P вида (3).

Если оператор A удовлетворяет (4) при любом сдвиге a, даже выводящем за пределы $K(r)$, то, учтя равномерность приближения по всем y, получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon \geq \sup_{u\in K(r)} \sup_{y,a\in\mathbb{R}^n} \bigg| (Au(x))(y-a) - \\
- \bigg\{ \cdots + \int \cdots \int Z_l(y-a-x_1, \dots, y-a-x_l) \times \\
\times u(x_1)\cdots u(x_l)\, dx_1 \cdots dx_l + \cdots \bigg\} \bigg| = \\
= \sup_{u\in K(r), a\in\mathbb{R}^n} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \bigg| (Au(x-a))(y) - \\
- \bigg\{ \cdots + \int \cdots \int Z_l(y-x_1, \dots, y-x_l) \times \\
\times u(x_1-a)\cdots u(x_l-a)\, dx_1 \cdots dx_l + \cdots \bigg\} \bigg|. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Таким образом, те же ядра Z_l обеспечивают приближение к A, равномерное при всех сдвигах, откуда следует теорема уже для некомпактного множества $\pi_X(T)(K) = \bigcup_r K(r)$.

Теорема 2. *Непрерывные трансляционно инвариантные операторы с пределом на бесконечности* (*т.е. операторы, удовлетворяющие* (4) *при всех $a \in T$ и условию* (ii)) *могут быть равномерно аппроксимированы полиномами такого же класса вида* (3) *на любом множестве $\pi_X(T)(K)$, где $K \subset X$ — компакт.*

Подчеркнем, что сам компакт K не обязан быть инвариантным относительно действия группы T, но, конечно, инвариантно множество $\pi_X(T)(K)$.

Еще два замечания к теореме.

Замечание 2. Теперь можно вспомнить о симметричности кратных ядер по x. В случае группы T характеры отделялись мономами первой степени с ядрами вида $\delta_{\varepsilon,a}(y-x)$, где $\delta_{\varepsilon,a}(\xi)$, это подходящее D-приближение к $\delta(\xi-a)$. Следовательно, можно сузить алгебру Π, рассматривая только симметризованные ядра Z_l вида $\sum \alpha_i\varphi_{i,1}(y-x_1)\cdots\varphi_{i,l}(y-x_l)$, где $\varphi_{i,j}$ — какая-то из функций $\delta_{\varepsilon,a}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$. В этом, собственно, нет ничего удивительного: достаточно вспомнить о $*$-слабой плотности линейных комбинаций точечных мер в $[C(K)]^*$.

Замечание 3. Как уже отмечалось, эту теорему можно рассматривать, как многомерное обобщение соответствующего результата из [3]. Но ее также можно рассматривать, как нелинейное обобщение теоремы, утверждающей, что в подходящих пространствах распределений линейный непрерывный трансляционно инвариантный оператор обязательно будет сверточным, [16, гл. I, § 4], n°7. В нашей ситуации нелинейные трансляционно инвариантные операторы полисверточными быть не обязаны, но могут быть равномерно аппроксимированы таковыми.

Группа T действует на $\mathbb{R}^n$ транзитивно (т.е. $(\forall x)\ Tx=\mathbb{R}^n$) и свободно (т.е. $(\forall x\in\mathbb{R}^n, g\in T)$ утверждение $gx=x$ влечет $g=1_T$). Основные технические трудности возникают при переходе к несвободным действиям: нет никакого естественного способа выбора элемента группы, связывающего точки y и z, когда таких элементов много. Здесь требуется другой способ доказательства, предлагаемый в следующем разделе.

8. Операторы, эквивариантные относительно группы изометрий. Рассматривая группу $G=\mathrm{Is}\,(\mathbb{R}^n)=T\rtimes O(n)$, $g\in G$, мы будем использовать, однако, общие методы доказательства. Поэтому сначала сформулируем требования I–IV к общей группе G и ядрам Вольтерра и проверим их для $G=\mathrm{Is}\,(\mathbb{R}^n)$. В этом разделе $2\le p<\infty$.

I. Группа G — локально компактная группа топологических преобразований $\mathbb{R}^n$ с эффективным транзитивным левым действием [17]. Все $g\in G$ являются C^1-диффеоморфизмами и сохраняют меру Лебега. С G связаны представления $\pi_X(g)$, $\pi_Y(g)$ и гомеоморфизм $\pi_Q(g)$ (см. разделы 3–4; например, $\pi_X(g)(u(x))=u(g^{-1}x)$). О непрерывности представлений для $\mathrm{Is}\,(\mathbb{R}^n)$ см. там же, непрерывность для общей G предполагается.

В случае действия группы на функции k векторов переменных (например, на $Z_{k-1}(y,x_1,\dots,x_{k-1})$ или $u(x_1)\cdots u(x_k)$), мы будем предполагать, что действие G на $\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n$ диагонально. Для представлений же, например, действующих на ядра, предполагаем

$\pi_X^k(g)\,Z_{k-1}(y,\,x_1,\dots,x_{k-1}) = Z_{k-1}(g^{-1}y,\,g^{-1}x_1,\dots,g^{-1}x_{k-1})$; аналогично для $u(x_1)\cdots u(x_k)$. Строго — это тензорное произведение представлений $\pi_X^1 \equiv \pi_X$ в алгебре ядер или в $X\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}X$, [11, § 7.1].

II. Второе условие — это выбор алгебры П, которую удобно указать сейчас. В качестве П выберем полиномы вида

$$(Pu)(y) = Z_0 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(y,x)u(x)\,dx + \iint\limits_{\mathbb{R}^n\,\mathbb{R}^n} Z_2(y,x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)\,dx_1dx_2 + \dots$$

с $Z_0 = \mathrm{const}\,(P)$ и с условием G-инвариантности высших ядер: $Z_k(gy,gx_1,\dots,gx_k) = Z_k(y,x_1,\dots,x_k)$. Функции Z_k непрерывны; при ограниченных $\{x_i\}$ они финитны по y, при ограниченных y финитны по $\{x_i\}$. В этих предположениях проверка условий шага 1 аналогична разделу 7, с небольшими изменениями в проверке непрерывности.

III. Обозначим через G_a стабилизатор точки $a \in \mathbb{R}^n$, т.е. $G_a = \{g \in G : ga = a\}$. Предположим, что группа G_a компактна в G-топологии. Для $\mathrm{Is}\,(\mathbb{R}^n)$ это так, см. [9, 9.1.5].

IV. Будем понимать $X_2^k = X_2\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}X_2$ как индуктивный предел по l гильбертовых произведений $L_2(\Omega_l)\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}L_2(\Omega_l)$. Введем обозначения: класс $\Psi_k^a \subset X_2^k$ это подпространство функций, зависящих от k векторов $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}^n$ и инвариантных относительно G_a; класс $\mathcal{Z}_k^a = \{\mathrm{Re}\,Z_k(a,x_1,\dots,x_k)\}$ — образован ядрами Z_k из условия II при $y = a$.

Формулируем условие: для любой фиксированной $a \in \mathbb{R}^n$ класс $\mathcal{Z}_k^a$, который, очевидно, входит в Ψ_k^a, образует в Ψ_k^a множество, плотное в X_2^k-топологии.

Убедимся в справедливости этого условия для Is_a, но сначала введем дополнительные обозначения и проверим простой факт. Обозначим через $m_a\varphi(g)$ среднее, порожденное мерой Хаара μ_a на G_a. Для непрерывных функционалов $f(u)$ в X_2 (или X_p) $m_a f(\pi_X(g)u)$ — усреднение по $g \in G_a$, подсчитываемое в каждой точке u. Для функций $u \in X_2$ ($u \in X_p$) определяем $m_a\pi_X(g)u \equiv m_a u(g^{-1}x)$ следующим образом: элемент $m_a\pi_X(g)u$ определен равенством ($\forall l \in X_p^*$) $\langle l, m_a\pi_X(g)u\rangle = m_a(\langle l,\pi_X(g)u\rangle)$. Под знаком m_a справа стоит непрерывная функция от g, так что среднее определено. Легко проверяется, что это ограниченный линейный функционал от l, т.е. определен элемент $m_a\pi_X(g)u \in X_p$. (В силу компактности орбиты $\pi_X(G_a)u$ все происходит в ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, т.е. в $L_p(\Omega)$.)

Также очевидно, ввиду G_a-инвариантности среднего, что $m_a\pi_X(g)u \in \Psi_1^a$. Аналогичные определения и свойства для функций произвольного числа векторных аргументов $\{x_1, \dots, x_k\}$ очевидны, и из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь.

Пусть $v(x) \in X_2$ — G_a-инвариантная функция, ее носитель, следовательно, тоже G_a-инвариантен. Пусть $\Omega \supset \operatorname{supp} v$ — G_a-инвариантная ограниченная область и $u_\varepsilon(x)$ — непрерывная функция, ε-приближение к $v(x)$ в $L_2(\Omega)$; $u_\varepsilon(x) = 0$ вне Ω. Так как $\varepsilon \geq \|v - u_\varepsilon\|$ и действия $\pi_{_X}(g)$ не меняют норму в $L_2(\Omega)$, то $(\forall l \in L_2^*(\Omega), \|l\| = 1)$ $\varepsilon \geq m_a|\langle l, v(g^{-1}x) - u_\varepsilon(g^{-1}x)\rangle| \geq |m_a\langle l, v(g^{-1}x) - u_\varepsilon(g^{-1}x)\rangle| = |\langle l, m_a(v(g^{-1}x) - u_\varepsilon(g^{-1}x))\rangle| \geq |\langle l, v(x) - m_a u_\varepsilon(g^{-1}x)\rangle|$. Таким образом, функция v имеет ε-приближение $m_a u_\varepsilon(g^{-1}x)$ из Ψ_1^a. Функция $m_a u_\varepsilon(g^{-1}x)$ непрерывна ([17, 0.3.2]) и ее носитель входит в Ω.

Аналогичное утверждение (о возможности приближения инвариантных функций непрерывными, инвариантными, финитными) справедливо и для $u(x_1, \dots, x_k)$.

Теперь мы в состоянии проверить условие IV для Is_a. Если $w \in \Psi_k^a$, то найдется финитная непрерывная $w_\varepsilon \in \Psi_k^a$, близкая к w. Ядро $Z_k(y, x_1, \dots, x_k) = w_\varepsilon(a + x_1 - y, \dots, a + x_k - y)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям финитности из II, причем $Z_k(a, \cdots) = w_\varepsilon(\cdots)$. Функция Z_k инвариантна относительно сдвигов $(y, x_1, \dots, x_k) \to (y + b, x_1 + b, \dots, x_k + b)$, кроме того, для $g \in \mathrm{Is}_a$ выполнено $Z_k(gy, gx_1, \dots, gx_k) = w_\varepsilon(a + gx_1 - gy, \dots, a + gx_k - gy) = w_\varepsilon(ga + gx_1 - gy, \dots, ga + gx_k - gy) = w_\varepsilon(a + x_1 - y, \dots, a + x_k - y) = Z_k(y, x_1, \dots, x_k)$. Так как $\mathrm{Is} = T \rtimes \mathrm{Is}_a$, то Z_k инвариантно относительно $\mathrm{Is}\,(\mathbb{R}^n)$ и условие IV проверено.

В дальнейшем обозначаем через $\mathcal{Z}_G$ класс всех ядер (любых кратностей) с указанными выше свойствами, через Π_G — алгебру образованных ими VP, через Φ_G — алгебру функций на $M(\mathcal{E})$, порожденную полиномами Π_G. (Компакт K и, следовательно, алгебру $\mathcal{E}$ не уточняем — следующие ниже утверждения справедливы для любого K.)

Докажем аналог леммы 1.

Лемма 3. *Пусть $u, v \in X$; $y, z \in \mathbb{R}^n$; $h_{u,y}, h_{v,z} \in M(\mathcal{E})$. Для того, чтобы характеры $h_{u,y}, h_{v,z}$ не отделялись функциями из Φ_G, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $g \in G$ выполнялось равенство $\{v(x), z\} = \{u(gx), g^{-1}y\}$.*

Доказательство. Достаточность доказывается просто и это можно увидеть на конкретном мономе, например,

$$(Pu(x))(y) = \iint Z_2(y, x_1, x_2) u(x_1) u(x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Из условий I, II следует, что

$$
\begin{aligned}
(Pu(gx))(g^{-1}y) &= \iint Z_2(g^{-1}y, x_1, x_2)u(gx_1)u(gx_2)\,dx_1dx_2 = \\
&= \iint Z_2(g^{-1}y, x_1, x_2)u(gx_1)u(gx_2)\,dgx_1dgx_2 = \\
&= \iint Z_2(g^{-1}y, g^{-1}x_1, g^{-1}x_2)u(x_1)u(x_2)\,dx_1dx_2 = \\
&= \iint Z_2(y, x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)\,dx_1dx_2.
\end{aligned}
$$

Необходимость. Сначала докажем, что вопрос можно свести к случаю одной пространственной точки: $y = z$. Действительно, пусть $h_{u,y}, h_{v,z}$ не отделяются, а $g_0 \in G$ таков, что $z = g_0^{-1}y$. (Далее для простоты обозначений пишем: точки $\{u, y\}, \{v, z\}$ не отделяются.) Если $w(x) = v(g_0^{-1}x)$, то точки $\{w(x), y\}$ и $\{w(g_0x), g_0^{-1}y\} = \{v(x), z\}$ не отделяются, так что не отделяются и точки $\{u, y\}, \{w, y\}$. Если, исходя из последнего, мы докажем, что $w = \pi_X(g^{-1})u$ с каким-то g из G_y (стабилизатора точки y), то $\{v(x), z\} = \{w(g_0x), g_0^{-1}y\} = \{u(gg_0x), g_0^{-1}y\} \overset{gy=y}{=} \{u(gg_0x), (gg_0)^{-1}y\}$, что и требуется.

Дальше доказательство ведется от противного. Пусть $y = z = a$ — фиксированная точка, $\{u, a\}$ и $\{v, a\}$ не отделяются, но u и v не входят в одну G_a-орбиту (обозначение орбиты: $O_au = \bigcup\limits_{g\in G_a} \pi(g)u$). В силу компактности G_a расстояние $\rho(O_au, O_av) = \alpha > 0$. Используя m_a, легко построить в X G_a-инвариантный непрерывный вещественный функционал $\varphi(u)$, отделяющий орбиты: $\varphi\big|_{O_au} = 1$, $\varphi\big|_{O_av} = 0$.

Пусть K — какой-то G_a-инвариантный компакт, содержащий u и v. Приблизим на нем функционал $\varphi(u)$ функционалами (не операторами!) Вольтерра с финитными непрерывными вещественными ядрами равномерно с точностью $\varepsilon > 0$:

$$
\varepsilon \geq \left|\varphi(w) - \sum_{j=1}^{k} \int \cdots \int Z_j^0(x_1, \ldots, x_j)w(x_1)\cdots w(x_j)\,dx_1\cdots dx_j - Z_0\right| \qquad (\forall w \in K).
$$

(Возможность этого следует непосредственно из вещественной теоремы Вейерштрасса-Стоуна.) Следовательно, для подгруппы $G_a \ni g$ справедливо (подынтегральные выражения вещественны):

$$
\varepsilon \geq m_a\Big|\varphi(\pi_X^1(g)w) - Z_0 -
$$

$$-\sum\int\cdots\int Z_j^0(x_1,\ldots,x_j)\pi_X^1(g)w(x_1)\cdots\pi_X^1(g)w(x_j)\,dx_1\cdots dx_j\Big| =$$

$$= m_a\Big|\varphi(w)-Z_0-\sum\int\cdots\int Z_j^0(\cdots)\pi_X^j(g)[w(x_1)\cdots w(x_j)]\,dx_1\cdots dx_j\Big|=$$

$$= m_a\Big|\varphi(w)-Z_0-\sum\int\cdots\int[\pi_X^j(g)]^*Z_j^0(\cdots)w(x_1)\cdots w(x_j)\,dx_1\cdots dx_j\Big|.$$

Ядра финитны и непрерывны и мы можем рассматривать их как элементы $L_2\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}L_2$. В этом пространстве оператор $\pi_X^j(g)$ унитарен, поэтому можно записать $[\pi_X^j(g)]^*=[\pi_X^j(g)]^{-1}=\pi_X^j(g^{-1})$.

Но тогда

$$\varepsilon\ge m_a\Big|\varphi(w)-Z_0-\sum\int\cdots\int Z_j^0(gx_1,\ldots,gx_j)\cdots\Big|\ge$$

$$\ge\Big|\varphi(w)-Z_0-\sum\int\cdots\int m_aZ_j^0(gx_1,\ldots,gx_j)\cdots\Big|=$$

$$=\Big|\varphi(w)-Z_0-\sum\int\cdots\int \widetilde{Z}_j(x_1,\ldots,x_j)w(x_1)\cdots w(x_j)\,dx_1\cdots dx_j\Big|,$$

где $\widetilde{Z}_j(x_1,\ldots,x_j)=m_aZ_j^0(gx_1,\ldots,gx_j)$ — элемент Ψ_j^a.

Мы, тем самым, получили функционал Вольтерра с G_a-инвариантными ядрами $\widetilde{Z}_j$, отделяющий орбиту O_au от O_av, если ε достаточно мало. По условию IV такие ядра с любой точностью могут быть аппроксимированы в X_2^k ядрами класса $\mathcal{Z}_G$ — т.е. функциями $\operatorname{Re}Z_j(y,x_1,\ldots,x_j)$ при зафиксированном $y=a$. А это значит, что алгебра полиномов Π_G (или функций Φ_G) отделяет точки $\{u,a\}$ и $\{v,a\}$. Противоречие доказывает лемму. $\square$

Аналог леммы 2 имеет ту же формулировку, но отличающееся доказательство первого ее утверждения. А именно, возьмем компакт K, содержащий v и ноль пространства X, функционал $\varphi(w)=\|w\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$, который непрерывен и G_z-инвариантен на O_zK (пара $\{v,z\}$ — из формулировки леммы). Пусть $P_\varphi(w)$ — достаточно точное приближение для φ на O_zK с G_z-инвариантными финитными вещественными ядрами $\widetilde{Z}_j(\cdots)$ и с нулевым членом Z_0 (первое достигается, как в лемме 3 для $a=z$, а второе — за счет нуля в K и $\varphi(0)=0$).

По условию IV ядра $\widetilde{Z}_j$ могут быть аппроксимированы функциями $\operatorname{Re}Z_j$, $Z_j\in\mathcal{Z}_G$ с любой точностью при фиксировании $y=z$. Ядрам Z_j отвечает полином W из VP, для которого $W(\infty)=0$, $\operatorname{Re}W(v)(z)\approx\|v\|_{L_2}>0$.

Как и в предыдущем разделе, устанавливаем три типа не отделяемых пар характеров: второй и третий — те же, а первый дан в лемме 3;

в нем удобно заменить g на g^{-1}. Аналогично теореме 2, заменяя в (5) T-действия G-действиями, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Непрерывные операторы A, эквивариантные относительно G и с пределом на бесконечности (т.е. $A\pi_X(g) = \pi_Y(g)A$, $(Au)(\infty) = \operatorname{const}(A)$) имеют сколь угодно точные* VP*-аппроксимации с ядрами класса $\mathcal{Z}_G$, равномерные на множествах вида $\pi_X(G)K$, где K — компакт в X.*

Замечание 4. Вспомним о симметричности старших ядер. Можно, например, сказать, что в мономе второй степени с $\operatorname{Is}(\mathbb{R}^n)$-инвариантным ядром $Z_2(|y-x_1|, |x_1-x_2|, |y-x_2|)$ функция Z_2 должна быть симметричной по $|y-x_1|$, $|y-x_2|$. Но здесь, в отличие от группы T, не удастся найти такую форму ядер младшей степени, тензорные (по x) произведения которых охватят все требуемые ядра старших степеней: в старших степенях независимых переменных больше, чем в соответствующих произведениях младших. Условие инвариантности из II не упрощаемо одновременно для ядер всех степеней.

Замечание 5. Если (в случае $n=2$) требуется вместо группы $\operatorname{Is}(\mathbb{R}^2) = T \rtimes O(2)$ рассмотреть группу $\operatorname{Is}^+(\mathbb{R}^2) = T \rtimes SO(2)$, то надо расширить класс ядер, добавив к $\mathcal{Z}_G$ ядра второй степени вида $W(y, x_1, x_2) = W_0(y, x_1, x_2)(|y-x_1| - |y-x_2|) \det B$, где

$$B = \begin{pmatrix} y^1 - x_1^1 & y^1 - x_2^1 \\ y^2 - x_1^2 & y^2 - x_2^2 \end{pmatrix},$$

а симметричная при $x_1 \leftrightarrow x_2$ финитная непрерывная функция W_0 G-инвариантна: $(\forall\, g \in G)\, W_0(gy, gx_1, gx_2) = W_0(y, x_1, x_2)$.

Функция $\det B$ отвечает за смену знака при действиях $\pi(g)$, $g \in O^-(2)$ (т.е. матрица, соответствующая g, имеет определитель, равный -1). Функция $(|y-x_1| - |y-x_2|)$ восстанавливает $(x_1 \leftrightarrow x_2)$-симметричность, функции W_0 выбираются для каждой $u \in X$, $u \neq 0$ так, чтобы $\iint W(y, x_1, x_2) u(x_1) u(x_2)\, dx_1 dx_2 \neq 0$. В итоге пары $\{u(x), y\}$ и $\{u(gx), g^{-1}y\}$ при $g \in O^-(2)$ отделяются, т.е. возможна аппроксимация Is^+-инвариантных операторов полиномами такого же класса.

9. Причинные операторы рассмотрим в простейшем варианте причинности относительно фиксированного конуса. При тех же X, Y, что и выше, считая первую координату (x_i^1 или y^1) временем, введем прошедший конус

$$\Gamma_y \equiv \left\{x \,:\, a(y^1 - x^1) \geq |y^{2,\dots,n} - x^{2,\dots,n}|_{\mathbb{R}^{n-1}}\right\}; \quad a = \operatorname{const} > 0.$$

Используем также обозначение Γ_{y,x_j} для различения x-векторов.

Рассмотрим VP вида (1) с ядрами из $Z_k \in (D(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) + \mathbb{C}) \otimes D(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes D(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (аналогично предложению 1), у которых $(\forall y \in \mathbb{R}^n)\, \operatorname{supp}_x Z_k(y, x_1, \ldots, x_k) \subset \Gamma_{y,x_1} \times \cdots \times \Gamma_{y,x_k}$. Функции $Z_0(y) \in (D(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) + \mathbb{C})$. Подалгебру из VP с такими ядрами выберем в качестве Π, и, зафиксировав компакт $K \in X$ (а тем самым $M = K \times Q$ и алгебру $\mathcal{E}$), обозначим через Φ алгебру функций из $C(M(\mathcal{E}))$, соответствующих полиномам Π.

Лемма 4. *Для того, чтобы характеры h_{u,y_0}, $h_{v,z}$ $(y_0, z \in \mathbb{R}^n)$ не отделялись функциями из Φ, необходимо и достаточно, чтобы:*
a) $y_0 = z$, *b)* $\operatorname{mes}[\{x : u(x) \neq v(x)\} \cap \Gamma_{y_0}] = 0$.

Доказательство. Необходимость. Если $y_0 \neq z$, то характеры разделяются функциями $f \in \Phi$, отвечающими полиномам, содержащим лишь члены нулевой степени $Z_0(y)$ — достаточно взять $Z_0(y_0) \neq Z_0(z)$. Пусть теперь нарушено b), и x_0 — лебегова точка (строго внутри конуса Γ_{y_0}) для функций u и v, в которой, для определенности, $u(x_0) > v(x_0)$. Взяв гладкую δ-образную функцию $W(x)$ с носителем малого диаметра и ядро $Z_1(y, x) = W(y - y_0)W(x - x_0)$, получим $\int Z_1(y_0, x)(u(x) - v(x))\, dx > 0$. При диаметре $\operatorname{supp} W$ вдвое меньше расстояния от x_0 до границы $\partial\Gamma_{y_0}$ ядро $Z_1 \in \Pi$: сдвиги y в пределах $\operatorname{supp} W(y - y_0)$ не приведут к выходу $\operatorname{supp} W(x - x_0)$ за пределы конусов Γ_y.

Достаточность очевидна. $\square$

Роль леммы 2 здесь играют следующие утверждения.

A) Характеры $h_{v,z}$, $h_{u,\infty}$ при $z \neq \infty$ отделяются при любых u, v (как в лемме 4 — членами $Z_0(y)$).

B) Характеры $h_{v,\infty}$, $h_{u,\infty}$ не отделяются при любых u, v — очевидно.

Не отделяемые пары характеров — это $\{h_{v,\infty}; h_{u,\infty}\}$ и те, что указаны в лемме 4. Таким образом, установлено замкнутое отношение эквивалентности E и алгебра непрерывных функций на M/E определена (как подалгебра в $\mathcal{E}$) двумя условиями.

1) При $y \neq \infty$ значение $f_A(u, y)$ полностью определено точкой y и сужением функции u на Γ_y. Для соответствующего оператора $(Au)(y) \equiv f_A(u, y)$ это означает причинность относительно конуса Γ_0 (конусы Γ_y — сдвиги конуса Γ_0).

2) $f_A(u, \infty) \equiv (Au)(\infty) = \operatorname{const}(A)$. (Наличие предела на бесконечности, в частности, означает отсутствие остаточного последействия: все события забываются при времени $\to \infty$. Вызвано это выбором алгебры Y, и другие типы операторов требуют других Y.)

Теорема 4. *Причинные относительно конуса непрерывные операторы $A : K \subset X \to Y$, имеющие предел на бесконечности, могут быть равномерно на K аппроксимированы полиномами Вольтерра из такого же класса.* $\square$

10. Операторы, эквивариантные относительно компактных групп. Здесь мы рассмотрим метод построения эквивариантных VP-аппроксимаций, близкий к традиционному способу построения эквивариантных операторов. Он отличается от общего подхода, приведенного в разделе 6: (a) в худшую сторону — пригоден только в случае групповых действий, причем, только для компактных групп без проблем, связанных с возможными плохими свойствами среднего на группе; (b) в лучшую сторону — не требует, чтобы пространство Y было алгеброй. Метод демонстрируется не в максимальной общности, а в достаточно общем простом варианте.

Итак, предполагаем выполненными все условия раздела 2, причем, пространство Y считаем рефлексивным. Дополнительно предположим, что в $\mathbb{R}^n_x$ и в $\mathbb{R}^m_y$ действует (слева) одна и та же компактная топологическая группа G преобразований, относительно которой области Ω_x и Ω_y инвариантны. Например, при $n \geq 2$, $m \geq 2$ это может быть группа вращений в плоскостях первых двух координат $\mathbb{R}^n_x$ или $\mathbb{R}^m_y$; соответственно, области Ω_x и Ω_y — цилиндрические. Пространство X — банахово.

Стандартно введем в X и в Y представления (левые) $(\pi_X(g)u)(x) = u(g^{-1}x)$, $(\pi_Y(g)v)(y) = v(g^{-1}y)$ и предположим, что оператор $A : X \to Y$ эквивариантен: $A\pi_X(g) = \pi_Y(g)A$ для всех $g \in G$. (Для простоты пусть A определен всюду на X.) Отображения π_X, π_Y считаем непрерывными.

Пусть $K \subset X$ — компакт, $OK = \bigcup\limits_{g \in G} \pi_X(g)K$ — его орбита, тоже компакт ([17, 1.1.3]). Предположим, что $P_0(u) \in (\mathrm{VP})$ — полином, аппроксимирующий оператор A на OK с точностью $\varepsilon > 0$, построенный в соответствии с теоремой 1.

По оператору P_0 определяем его эквивариантное усреднение $Pu = m[\pi_Y(g^{-1})P_0(\pi_X(g)u)]$, где m — усреднение по (нормированной) мере Хаара в G. Это равенство понимается, как в условии IV раздела 8:

$$(\forall l \in Y^*) \quad \langle l, Pu \rangle \overset{\text{def}}{=} m\langle l, \pi_Y(g^{-1})P_0(\pi_X(g)u)\rangle. \tag{6}$$

В силу непрерывности π_X, π_Y множество $\bigcup\limits_{g \in G} \pi_Y(g^{-1})P_0(\pi_X(g)u)$ компактно, т.е. для каждого фиксированного $u \in X$ справа в (6) стоит линейный ограниченный функционал от l, который и определяет элемент $Pu \in Y$.

Если рассматривать $\pi_X(g)$ на единичном шаре $B \subset X$ (это множество второй категории), то из ограниченности $\sup\limits_g \|\pi_X(g)u\|$ для каждого фиксированного $u \in B$ и из принципа равномерной ограниченности следует равномерная ограниченность норм операторов $\big\|\pi_X(g)\big\|_{L(X,X)}$; аналогично — ограниченность $\big\|\pi_Y(g)\big\|_{L(Y,Y)}$ ($L(\cdot,\cdot)$ — соответствующее пространство линейных операторов).

Это стандартным образом приводит к непрерывности Pu на OK. Действительно,

$$\begin{aligned}\|Pu - Pv\| = \sup_{\|\,l\,\|_{Y^*}=1} \langle l, Pu - Pv\rangle =&\\ = \sup m\langle(\pi_Y(g^{-1}))^* l, P_0(\pi_X(g)u) - P_0(\pi_X(g)v)\rangle \le&\\ \le \sup m\left[\|(\pi_Y(g^{-1}))^*\|\,\|\,l\,\|\,\omega(\|\pi_X(g)\|\,\|u-v\|)\right],&\end{aligned}$$

где ω — модуль непрерывности P_0 на OK. Непрерывность P следует из равномерной ограниченности в этом выражении норм, содержащих g или l.

Эквивариантность P и равномерная близость $Pu \approx Au$ проверяются тоже с помощью вариантов стандартных действий.

Эквивариантность:

$$\begin{aligned}\langle l, P(\pi_X(g_0)u)\rangle = m\langle l, \pi_Y(g^{-1})P_0(\pi_X(gg_0)u)\rangle =&\\ = m\langle l, \pi_Y(g_0g_0^{-1}g^{-1})P_0(\pi_X(gg_0)u\rangle =&\\ = m\langle(\pi_Y(g_0))^* l, \pi_Y((gg_0)^{-1})P_0(\pi_X(gg_0)u)\rangle =&\\ = m\langle(\pi_Y(g_0))^* l, \pi_Y((g)^{-1})P_0(\pi_X(g)u)\rangle =&\\ = \langle(\pi_Y(g_0))^* l, Pu\rangle = \langle l, \pi_Y(g_0)Pu\rangle.&\end{aligned}$$

Аппроксимация на OK:

$$\begin{aligned}&\big\|Pu - Au\big\|_Y =\\ &= \sup_{\|\,l\,\|=1}\langle l, Pu - Au\rangle = \sup m\left(\langle l, \pi_Y(g^{-1})P_0(\pi_X(g)u)\rangle - \langle l, Au\rangle\right) =\\ &= \sup m\left(\langle l, \pi_Y(g^{-1})P_0(\pi_X(g)u)\rangle - \langle l, \pi_Y(g^{-1})A(\pi_X(g)u)\rangle\right) =\\ &= \sup m\langle(\pi_Y(g^{-1}))^* l, P_0(\pi_X(g)u) - A(\pi_X(g)u)\rangle.\end{aligned}$$

В силу равномерной по g, l ограниченности $\big\|\,(\pi_Y(g^{-1}))^* l\,\big\|$ и малости $\|P_0(\pi_X(g)u) - A(\pi_X(g)u)\|$ при $u \in OK$ получаем требуемую близость $Pu \approx Au$, равномерную на OK.

Таким образом, в указанных условиях эквивариантные операторы имеют аппроксимации, полученные эквивариантным усреднением полиномов Вольтерра. Это еще не приводит к VP-аппроксимации — потребуются дополнительные предположения.

Предположим, что все $g \in G$ сохраняют лебегову меру в $\mathbb{R}^n$ (как в приведенном в начале раздела примере вращений). Кроме этого, считаем, что $D(\Omega_y)$ плотно не только в Y, но и в Y^*, пространство $Y \subset L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_y)$ и для элементов $l \in D(\Omega_y) \subset Y^*$, $v \in Y$ двойственность $\langle l, v\rangle$ выражается через интеграл: $\langle l, v\rangle = \int\limits_{\Omega_y} l(y)v(y)\,dy$.

Пусть в полиноме P_0 k-й моном имеет вид

$$P_0^k(u) = \int\limits_{\Omega_x} \cdots \int\limits_{\Omega_x} Z_k(y, x_1, \ldots, x_k)u(x_1)\cdots u(x_k)\,dx_1\cdots dx_k.$$

Линейность $\pi_Y(g)$ позволяет рассматривать эквивариантные усреднения “по-мономно” — рассмотрим только

$$\left\langle l, m\left[\pi_Y(g^{-1})P_0^k(\pi_X(g)u)\right]\right\rangle =$$
$$= m\left\langle l, \int \cdots \int Z_k(gy, x_1, \ldots, x_k)u(g^{-1}x_1)\cdots u(g^{-1}x_k)\,dx_1\cdots dx_k\right\rangle.$$

Проведя замену $\xi_i = g^{-1}x_i$, используя формулу замены переменных для измеримых отображений ([18, A.3.2]) и сохранение меры при G-действиях, мы получим (продолжая предыдущее равенство) на плотном множестве l

$$m\left\langle l, \int\limits_{\Omega_x}\ldots\int\limits_{\Omega_x} Z_k(gy, g\xi_1, \ldots, g\xi_k)u(\xi_1)\cdots u(\xi_k)\,d\xi_1\cdots d\xi_k\right\rangle =$$
$$= \int\limits_G\int\limits_{\Omega_y}\int\limits_{\Omega_x}\ldots\int\limits_{\Omega_x} l(y)Z_k(gy, g\xi_1, \ldots, g\xi_k)u(\xi_1)\cdots u(\xi_k)\,d\xi_1\cdots d\xi_k dy d\mu_g,$$

где μ_g — мера Хаара на G.

Изменив порядок интегрирования и переобозначив $\xi_i \to x_i$, продолжим равенства:

$$\int\limits_{\Omega_y} l(y)\int\limits_{\Omega_x}\ldots\int\limits_{\Omega_x}\left\{\int\limits_G Z_k(gy, gx_1, \ldots, gx_k)\,d\mu_g\right\}\times$$
$$\times\, u(x_1)\cdots u(x_k)\,dx_1\cdots dx_k dy = \langle l, P^k u\rangle.$$

Здесь $P^k u$ — моном в Pu, образованный ядром $\widetilde{Z}_k(y, x_1, \ldots, x_k) = \int\limits_G Z_k(gy, gx_1, \ldots, gx_k)\, d\mu_g$. Такое ядро является G-инвариантным в смысле условия II раздела 8. Моном $\widetilde{Z}_0(y) = \int\limits_G Z_0(gy)\, d\mu_g$ является G-инвариантным в обычном смысле. В связи с нетранзитивностью действия G, функция $\widetilde{Z}_0(y)$ не обязана быть константой, в отличие от разделов 7, 8. Все ядра $\widetilde{Z}_k$ непрерывны и финитны.

Итак, справедлива

Теорема 5. *В указанных условиях возможна эквивариантная* VP-*аппроксимация оператора A с ядрами $\widetilde{Z}_k$, равномерная на OK.* □

Литература

[1] А. С. Апарцин, *О новых классах линейных многомерных уравнеий* I *рода типа Вольтерра* // Изв. ВУЗ, Мат. **362** (1995), No 11, 28–41.

[2] Н. Бурбаки, *Общая топология.* Книга III, М.: Наука, 1975, 588 с.

[3] И. Бэслер, И. К. Даугавет, *О приближении нелинейных операторов полиномами Вольтерра* // Тр. Ленингр. мат. о-ва, **1** (1990), 53–64.

[4] К. А. Пупков, В. И. Капалин, А. С. Ющенко, *Функциональные ряды в теории нелинейных систем.* М.: Наука, 1976, 448 с.

[5] А. Г. Ивахненко, Й. А. Мюллер, *Самоорганизация прогнозирующих моделей.* Киев: Технiка, 1985, Берлин: Феб Ферлаг Техник, 1984, 224 с.

[6] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1967, 258 с.

[7] L. V. Zyla, R. J. P. de Figueiredo, *Nonlinear system identification based on a Fock space framework* // SIAM J. Contr. Opt., **21** (1983), 931–939.

[8] Д. Н. Сидоров, *Моделирование нелинейных нестационарных динамических систем рядами Вольтерра: идентификация и приложения* // Сиб. журн. индустр. мат., **3** (2000), No 1, 182–194.

[9] М. Берже, *Геометрия.* Том 1, М.: Мир, 1984, 560 с.

[10] А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения.* Том 1, М.: Мир, 1980, 456 с.

[11] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений* М.: Наука, 1978, 344 с.

[12] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.* М.: Наука, 1989, 464 с.

[13] А. В. Архангельский, *Пространства отображений и кольца непрерывных функций.* Соврем. пробл. математики. Итоги науки и техники. Том 51, ВИНИТИ, 1989, 81–171.

[14] W. Hery, *Maximal ideals in algebras of continuous $C(S)$ valued functions* // Atti. Acad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fiz. mat e natur. **58** (1975), No 2, 195–199.

[15] Р. Энгелькинг, *Общая топология.* М.: Мир, 1986, 752 с.

[16] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1976, 280 с.

[17] Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований.* М.: Наука, 1980, 440 с.

[18] В. И. Богачев, *Гауссовские меры.* М.: Наука, Физматлит, 1997, 352 с.

Сведения об авторах

Сергей Георгиевич Суворов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
ул. Р. Люксембург,74,
83114 Донецк,
Украина
E-Mail: `suvorov@iamm.ac.donetsk.ua`