Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 3, 377 – 394

Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь

Галина П. Лопушанська

(*Представлена С. Д. Івасишеном*)

Анотація. На основі вивчення лінійних крайових задач у спеціальних просторах узагальнених функцій одержані умови існування розв'язку крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння у просторі функцій зі степеневим ростом біля межі області, а також умови, за яких цей розв'язок регулярний всередині області.

2000 MSC. 35J40, 35J60.

Ключові слова та фрази. Еліптичне диференціальне рівняння, нормальна система крайових диференціальних операторів, узагальнена функція, спряжені оператори Гріна, ваговий функціональний простір, інтегральне рівняння.

На основі теорем про гомеоморфізми [1] у праці [2] вивчені крайові задачі для квазілінійних еліптичних рівнянь у шкалі просторів Соболєва. У [3] досліджуються умови, за яких регулярний всередині кулі в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, додатний розв'язок рівняння $\Delta u = u^q$ може набувати на межі кулі узагальнених значень-мір.

У [4,5] вивчені простори функцій із точковими степеневими особливостями та оператори Гріна в них, досліджено характер поведінки розв'язків лінійних еліптичних граничних задач з даними із таких просторів. У даній статті вивчаємо спеціальні простори узагальнених функцій, що містять, зокрема, функції з сильними степеневими особливостями на межі області, спряжені оператори Гріна в них та застосовуємо їх до розв'язності узагальнених еліптичних крайових задач.

На основі вивчення лінійних крайових задач у таких просторах узагальнених функцій знаходимо умови існування розв'язку крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння у просторі функцій

Стаття надійшла в редакцію 21.10.2003

зі степеневим ростом біля межі області, а також умови, за яких цей розв'язок регулярний всередині області.

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, обмежена замкненою поверхнею S з класу C^∞, $d(x) = \operatorname{dist}(x, S)$ — відстань від точки $x \in \Omega$ до S, $\hat{x} \in S$, $\varepsilon > 0$,

$$h(x) = \begin{cases} 1, & d(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & d(x) > \varepsilon \end{cases}, \ 0 \leq h(x) \leq 1,$$

$$h_1(x, \hat{x}) = \begin{cases} 1, & |x - \hat{x}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & |x - \hat{x}| > \varepsilon \end{cases}, \ 0 \leq h_1(x, \hat{x}) \leq 1,$$

$\varrho(x)(\varrho(x, \hat{x}))$ — нескінченно диференційовна в $\overline{\Omega}$ функція, яка дорівнює нулю в точках $x \in S$ $(x = \hat{x})$, а біля S має порядок $d(x)(|x - \hat{x}|)$. Використовуватимемо позначення $\varrho_\alpha^k(x) = \varrho^{k-|\alpha|}(x) + 1 + c_\alpha |\ln \varrho(x)|$, $\varrho_\alpha^k(x, \hat{x}) = \varrho^{k-|\alpha|}(x, \hat{x}) + 1 + c_\alpha |\ln \varrho(x, \hat{x})|$, $c_\alpha \neq 0$ при $|\alpha| = k$.

Для $k \in \mathbb{R}$ визначимо наступні функціональні простори:

$\tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega)$: для довільних $\hat{x} \in S$, мультиіндексу α $|D^\alpha(h_1(x, \hat{x})\varphi(x))| \leq \varrho^{k-|\alpha|}(x, \hat{x})\varphi_\alpha(x, \hat{x})$, $\varphi_\alpha(\cdot, \hat{x}) \in C(\overline{\Omega})\}$,

$Z_k(\overline{\Omega}, S) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega)$: для довільних $\hat{x} \in S$, мультиіндексу α $|D^\alpha\varphi(x)| \leq \varrho_\alpha^k(x, \hat{x})\varphi_\alpha(x, \hat{x})$, $\varphi_\alpha(\cdot, \hat{x}) \in C(\overline{\Omega})\}$.

Скажемо, що $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі $\tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S)$, якщо для довільних α, точки $\hat{x} \in S$ послідовність функцій $\tilde{\varphi}_{\alpha\nu}(x, \hat{x}) = \varrho^{|\alpha|-k}(x, \hat{x})D^\alpha(h_1(x, \hat{x})\varphi_\nu(x)) + (1 - h(x))D^\alpha\varphi_\nu(x)$ збігається до нуля при $\nu \to \infty$ рівномірно в $\overline{\Omega}$, $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі $Z_k(\overline{\Omega}, S)$, якщо для довільних α та точки $\hat{x} \in S$ послідовність функцій $\varphi_{\alpha\nu}(x, \hat{x}) = \frac{1}{\varrho_\alpha^k(x, \hat{x})}D^\alpha\varphi_\nu(x)$ збігається до нуля при $\nu \to \infty$ рівномірно в $\overline{\Omega}$. Зауважимо, що простори Z_k та $\tilde{Z}_k$ по суті збігаються при $k < 0$.

Довизначаємо функції $(\ln \varrho(x))^{-1}$ та $(\ln \varrho(x, \hat{x}))^{-1}$ $(\hat{x} \in S)$ за неперервністю у точках $x \in S$.

Для $k > 0$ визначимо:

$\tilde{Z}_k(S) = \{\varphi = \varphi(x)\,(x \in S)$: для довільної точки $\hat{x} \in S$ та довільного мультиіндексу α $|D^\alpha(h_1(x, \hat{x})\varphi(x))| \leq \varrho^{k-|\alpha|}(x, \hat{x})\varphi_\alpha(x, \hat{x})$, $\varphi_\alpha(\cdot, \hat{x}) \in C(S)\}$;

$Z_k(S) = \{\varphi = \varphi(x)\,(x \in S)$: для довільної точки $\hat{x} \in S$ та довільного мультиіндексу α $|D^\alpha\varphi(x)| \leq \varrho_\alpha^k(x, \hat{x})\varphi_\alpha(x, \hat{x})$, $\varphi_\alpha(\cdot, \hat{x}) \in C(S)\}$.

Збіжність у цих просторах визначається подібно до збіжності у $\tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S)$ та $Z_k(\overline{\Omega}, S)$.

Позначаємо через Z' простір лінійних неперервних функціоналів на Z, через (φ, F) $(\langle\varphi, F\rangle)$ значення узагальненої функції $F \in Z'$ з носієм в $\overline{\Omega}$ (на S) на основній функції $\varphi \in Z$.

Функції із просторів $\tilde{Z}_k$ та Z_k мають такі спільні властивості (такі ж самі, як для просторів $Z_k(\overline{\Omega}, x_0)$ із [5]):

1) $D = C^\infty \subset Z_{-k}$, $Z'_{-k} \subset D' \subset Z'_k$ при $k > 0$; $Z_{k_2} \subset Z_{k_1}$ для $k_1 < k_2$;

2) якщо $\varphi \in Z_k$, то $D^\gamma \varphi \in Z_{k-|\gamma|}$; якщо $F \in Z'_k$, то визначено $(D^\alpha \varphi, F)$ для $\varphi \in Z_{k+|\alpha|}$ і тоді визначені $D^\alpha F \in Z'_{k+|\alpha|}$: $(\varphi, D^\alpha F) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \varphi, F)$;

3) нехай $g_\alpha \in L_1$, тоді для довільної $\varphi \in Z_k$ визначені $\int_{\Omega(S)} \frac{D^\alpha \varphi g_\alpha}{\varrho_\alpha^k}\, dx$ і при довільному натуральному числі N $g = \sum_{|\alpha| \le N} D^\alpha \big((-1)^{|\alpha|} \frac{g_\alpha}{\varrho_\alpha^k}\big)$ (похідні розуміємо в узагальненому сенсі) є лінійним неперервним функціоналом на Z_k; зокрема, якщо $g_0 \in L_1$, $g(x) = g_0(x)\varrho^{-l}(x)$, то $g \in \tilde{Z}'_l$;

4) для довільних $\varphi \in Z_k(\overline{\Omega}, S)$, обмежених в Ω функцій g_α та $p_\alpha > -n$ визначені $\int_\Omega g_\alpha \varrho^{p_\alpha} \frac{D^\alpha \varphi}{\varrho_\alpha^k}\, dx$; тоді $g = g_0 \varrho^{-l} \in Z'_{l-n+\varepsilon}(\overline{\Omega}, S) \subset \tilde{Z}'_{l-n+\varepsilon}(\overline{\Omega}, S)$ для довільних $\varepsilon > 0$, $g_0 \in L_\infty(\Omega)$; аналогічно $g = g_0 \varrho^{-l} \in Z'_{l+1-n+\varepsilon}(S) \subset \tilde{Z}'_{l+1-n+\varepsilon}(S)$ для довільних $\varepsilon > 0$, $g_0 \in L_\infty(S)$.

Відзначимо ще такі властивості функцій із $\tilde{Z}_k$:

5) $\tilde{Z}_k \subset C^{[k]}$, $(C^{[k]})' \subset \tilde{Z}'_k$ для $k > [k] \ge 0$; якщо $\varphi \in \tilde{Z}_k$, $l \in \mathbb{R}$, то $\varrho^l \varphi \in \tilde{Z}_{k+l}$, відповідно при $F \in \tilde{Z}'_k$ маємо $\varrho^l F \in \tilde{Z}'_{k-l}$;

6) $\tilde{Z}_{-k} \subset \tilde{Z}'_k$.

Для цілих невід'ємних k та $l \in \mathbb{R}$ визначимо

$\tilde{Z}_{k,l}(\overline{\Omega}, S) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) :$ для довільних $\hat{x} \in S$ $h(x)\varphi(x) = \varrho^k(x) \times \varphi_0(x, \hat{x})$, $\varphi_0(\cdot, \hat{x}) \in \tilde{Z}_l(\overline{\Omega}, S) \cap \tilde{Z}_l(S)\}$;

$Z_{k,l}(\overline{\Omega}, S) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) :$ для довільних $\hat{x} \in S$ $h(x)\varphi(x) = \varrho^k(x) \times \varphi_0(x, \hat{x})$, $\varphi_0(\cdot, \hat{x}) \in Z_l(\overline{\Omega}, S) \cap Z_l(S)\}$.

Скажемо, що $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі $\tilde{Z}_{k,l}(\overline{\Omega}, S)$ $(Z_{k,l}(\overline{\Omega}, S))$, якщо послідовність функцій $\varphi_{0\nu}(x) = \varrho^{-k}(x)\varphi_\nu(x)$ збігається до нуля у $\tilde{Z}_l(\overline{\Omega}, S) \cap \tilde{Z}_l(S)$ $(Z_l(\overline{\Omega}, S) \cap Z_l(S))$.

Лема 1. *Якщо F — лінійний функціонал на $Z_p(S)$, $p \ge 0$, то $F \in Z'_p(S)$ тоді і лише тоді, коли існують такі ціле число r, $0 \le r \le p$, стала $C > 0$, що для довільної $\varphi \in Z_p(S)$*

$$|\langle \varphi, F \rangle| \le C \max_{\substack{y, \hat{x} \in S, \\ |\alpha| \le r}} \frac{|D^\alpha \varphi(y)|}{\varrho_\alpha^r(y, \hat{x})}.$$

Скажемо, що така узагальнена функція F має порядок сингулярності $\le r$.

Лема доводиться так само, як відповідна лема Шварца [6].

Лема 2. *Для довільної $F \in Z'_p(S)$ порядку сингулярності $\le r < p$ існують такі натуральне число $N \in \big(r + \frac{n-1}{2}, p + \frac{n-1}{2}\big)$, стала $C > 0$, $f_0 \in L_2(S)$, що*

$$\langle \varphi, F \rangle = \int\limits_S (1 - \Delta_S)^{\frac{N}{2}} \varphi \cdot f_0 \, dS, \quad \varphi \in Z_p(S),$$

де Δ_S — оператор Бельтрамі-Лапласа, при $\frac{N}{2} = s - \frac{l}{2}$

$$\begin{aligned} (1 - \Delta_S)^{\frac{N}{2}} \varphi &= (1 - \Delta_S)^s (1 - \Delta_S)^{-\frac{l}{2}} \varphi, \\ (1 - \Delta_S)^{-\frac{l}{2}} \varphi(x) &= \int\limits_S \omega_{\frac{l}{2}}(x, y) \varphi(y) \, dS, \end{aligned}$$

$\omega_{\frac{l}{2}}(x, y)\,(x, y \in S)$ — фундаментальна функція оператора $(1 - \Delta_S)^{\frac{l}{2}}$ [7].

Доведення. За лемою 1 для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільної $\varphi \in Z_p(S)$ з того, що $\frac{|D^\alpha \varphi(y)|}{\varrho^r_\alpha(y, \hat{x})} \le \delta,\ y, \hat{x} \in S,\ |\alpha| \le r$, випливає $| < \varphi, F > | \le \varepsilon$.

Нехай $\psi = (1 - \Delta_S)^{\frac{N}{2}} \varphi$. З оцінки

$$D^\alpha \omega_{\frac{N}{2}}(x, y) \le C\big(|x - y|^{N+1-n-|\alpha|} + 1\big), \quad x, y \in S \ ([7])$$

випливає, що $\psi \in Z_{p-N}(S)$. Навпаки, для $\psi \in Z_{p-N}(S)$, $\varphi = (1 - \Delta_S)^{-\frac{N}{2}} \psi \in Z_p(S)$,

$$|D^\alpha \varphi(x)| = \left| D^\alpha \int\limits_S \omega_{\frac{N}{2}}(x, y) \psi(y) \, dS \right| \le \left(\int\limits_S |D^\alpha \omega_{\frac{N}{2}}(x, y)|^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\psi\|_{L_2(S)}$$

для всіх $|\alpha| \le r$, якщо $2(N + 1 - n - r) > 1 - n$ та $2(p - N) > 1 - n$, тобто $N \in (r + \frac{n-1}{2}, p + \frac{n-1}{2})$. Крім того,

$$\int\limits_S |D^\alpha \omega_{\frac{N}{2}}(x, y)|^2 \, dS = O\big(1 + \varrho^{2N-2|\alpha|+1-n}(x, \hat{x})\big),$$

а тоді

$$\frac{|D^\alpha \varphi(y)|}{\varrho^r_\alpha(y, \hat{x})} \le \frac{\varrho_\alpha^{N-|\alpha|+\frac{1-n}{2}}(y, \hat{x})}{\varrho^r_\alpha(y, \hat{x})} \cdot \|\psi\|_{L_2(S)}$$

і $N-|\alpha|+\frac{1-n}{2}>r+\frac{n-1}{2}-|\alpha|+\frac{1-n}{2}=r-|\alpha|$. Бачимо, що для довільного $\delta>0$ існує таке $\eta=\eta(\delta)>0$, що при $\|\psi\|_{L_2(S)}\le\eta$ одержуємо $\max\limits_{y,\hat{x}\in S,|\alpha|\le r}\frac{|D^\alpha\varphi(y)|}{\varrho^r_\alpha(y,\hat{x})}\le\delta$. Враховуючи сказане спочатку, маємо: для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\eta>0$, що $|\langle\varphi,F\rangle|\le\varepsilon$ при $\|\psi\|_{L_2(S)}\le\eta$.

Визначимо функціонал T: $\langle\psi,T\rangle=\langle\varphi,F\rangle=\langle(1-\Delta_S)^{-\frac{N}{2}}\psi,F\rangle$, $\psi\in L_2(S)$. T — лінійний та неперервний функціонал на $L_2(S)$, а тому існує така $f_0\in L_2(S)$, що $\langle\psi,T\rangle=\int_S\psi f_0\,dS$. Тоді $\langle\varphi,F\rangle=\int_S\psi f_0\,dS=\int_S(1-\Delta_S)^{\frac{N}{2}}\varphi f_0\,dS$. □

Нехай A — еліптичний диференціальний оператор порядку $2m<n$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами, $\{B_j\}_{j=1}^m$ — нормальна система крайових диференціальних виразів з нескінченно диференційовними коефіцієнтами (порядків $m_j\le 2m-1$), що задовольняють умову Лопатинського, $T_j,\hat{T}_j,\hat{B}_j$ — такі нормальні граничні диференціальні вирази з нескінченно диференційовними коефіцієнтами (відповідно порядків $\mu_j, 2m-1-m_j, 2m-1-\mu_j$), що правильна формула Гріна

$$\int\limits_\Omega(Au\cdot v-u\cdot A^*v)\,dx=\sum_{j=1}^m\int\limits_S(T_ju\cdot\hat{B}_jv-B_ju\cdot\hat{T}_jv)\,dS,\quad u,v\in D(\overline{\Omega}),$$

де A^* — спряжений до A оператор. Нехай $G=(G_0,G_1,\dots,G_m)$ — вектор-функція Гріна [4] задачі

$$Au=F_0 \text{ в } \Omega,\quad B_ju\big|_S=F_j,\quad j=\overline{1,m}. \tag{1}$$

Припускаємо, що ядра N та N^* відповідно задачі (1) та спряженої задачі нульові. Далі також використовуватимемо позначення

$$m_0=2m,\quad (j)=\begin{cases}0, & j=0\\ 1, & j=\overline{1,m}\end{cases}.$$

У [4] виведені оцінки

$$|D^\alpha G_j(x,y)|\le C_\alpha\big(1+c_\alpha\ln|x-y|+|x-y|^{m_j-n+(j)-|\alpha|}\big).$$

Вивчимо властивості спряжених операторів Гріна

$$(\hat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y)=\int\limits_\Omega\varphi(x)G_j(x,y)\,dx,\quad j=\overline{0,m},$$

у введених функціональних просторах.

Лема 3. $\hat{\mathcal{G}}_0 : \tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S) \to Z_{k+2m}(\overline{\Omega}, S)$, $k > -n$; $\tilde{Z}_{k,l}(\overline{\Omega}, S) \to Z_{k+l+2m}(\overline{\Omega}, S)$, k — *ціле* ≥ 0, $k+l > -n$;

$\hat{\mathcal{G}}_j : \tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S) \to Z_{k+m_j+(j)}(S)$, $k \geq 2m - m_j - (j)$, $\tilde{Z}_{k,l}(\overline{\Omega}, S) \to Z_{k+l+m_j+(j)}(S)$, k — *ціле* ≥ 0, $k+l \geq 2m - m_j - (j)$, $j = \overline{0, m}$.

Доведення. Нехай $y \in \Omega$. Вибираємо таку довільну точку $\hat{x} \in S$, що $h_1(y, \hat{x}) \neq 0$ і розбиваємо область Ω на $\Omega_0 = \{x \in \Omega : |x - \hat{x}| < \frac{|y-\hat{x}|}{2}\}$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega \setminus \Omega_0 : d(x) < \frac{d(y)}{2} (< \frac{|y-\hat{x}|}{2})\}$, $\Omega_2 = \{x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_0 \cup \Omega_1} : |x - y| < \frac{|y-\hat{x}|}{2}\}$, $\Omega_3 = \Omega \setminus (\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$.

Нехай $y \in \Omega$, $\varphi \in \tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S)$, $v_\alpha(y) = D_y^\alpha\big(h_1 \hat{\mathcal{G}}_0 \varphi\big)(y)$. Функцію $v_\alpha(y)$ подамо у вигляді суми $v_{0\alpha}(y) + v_{1\alpha}(y) + v_{2\alpha}(y) + v_{3\alpha}(y)$ трьох доданків відповідно до розбиття області Ω.

Для $x \in \Omega_0$ $|x - y| \geq \frac{1}{2}|y - \hat{x}|$, $|x - x'| \leq |y - \hat{x}|$ при $x' \in S \cap \overline{\Omega}_0$, тому при $k > -n$ $\int_{\Omega_0} |h_1(x, \hat{x})\varphi(x)| dx \leq \int_0^{|y-\hat{x}|} r^{k+n-1} dr \tilde{\varphi}_0(y, \hat{x}) \leq |y - \hat{x}|^{k+n} \varphi_0(y, \hat{x})$, $\tilde{\varphi}_0(\cdot, \hat{x})$, $\varphi_0(\cdot, \hat{x}) \in C(\overline{\Omega})$, і тоді

$$
\begin{aligned}
|v_{0\alpha}(y)| = \left| \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x) D_y^\alpha\big(h_1(y, \hat{x}) G_0(x, y)\big)\, dx \right| \leq \\
\leq C(|y - \hat{x}|^{2m-n-|\alpha|} + 1) \int\limits_{\Omega_0} |h_1(x, \hat{x})\varphi(x)|\, dx \leq \\
\leq (\varrho^{k+2m-|\alpha|}(y, \hat{x}) + 1)\varphi_{0\alpha}(y), \quad \varphi_{0\alpha} \in C(\overline{\Omega}).
\end{aligned}
$$

Аналогічно $|v_{1\alpha}(y)| \leq (|y - \hat{x}|^{2m-n-|\alpha|} + 1) \int_{\Omega_1} |h_1(x, \hat{x})\varphi(x)|\, dx$. Нехай h^j $(j = \overline{1, N})$ — розклад одиниці відповідно до покриття області Ω_1 множинами V_j, $\operatorname{diam} V_j \leq |y - \hat{x}|$. Тоді

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |h_1(x, \hat{x})\varphi(x)|\, dx \leq \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\substack{|x-x'| < \frac{1}{2}|y-\hat{x}|, \\ x' \in V_j \cap S}} h^j(x) \varrho^k(x, x') \varphi_{0j}(x, x')\, dx \leq \\
\leq |y - \hat{x}|^{k+n} \varphi_0(y, \hat{x}),\ \varphi_{0j}(\cdot, x'),\ \varphi_0(\cdot, \hat{x}) \in C(\overline{\Omega}).
\end{aligned}
$$

Отже, $|v_{1\alpha}(y)| \leq (\varrho^{k+2m-|\alpha|}(y, \hat{x}) + 1)\varphi_{1\alpha}(y)$, $\varphi_{1\alpha} \in C(\overline{\Omega})$.

Нехай $x \in \Omega_2$, $\delta > 0$ — настільки мале, що $K_\delta(y) = \{x : |x - y| < \delta\} \subset \Omega_2$, $\Omega_{2\delta} = \Omega_2 \setminus \overline{K_\delta(y)}$, $S_\delta(y) = \{x : |x - y| = \delta\}$. Оскільки $\varphi \in C^\infty(\overline{K_\delta(y)})$, то для довільного мультиіндексу α існує

$$
\lim_{\delta \to 0} D_y^\alpha \int\limits_{K_\delta(y)} \varphi(x) G_0(x, y) h_1(y, \hat{x})\, dx = 0.
$$

Тоді

$$v_{2\alpha}(y) = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\Omega_{2\delta}} \varphi(x) D_y^{\alpha}(G_0(x,y)h_1(y,\hat{x}))\,dx =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\Omega_{2\delta}} \sum_{|\beta|\le|\alpha|} C_{\alpha\beta}\varphi(x)(-D_x)^{\beta}(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h_1(y,\hat{x})G_0(x,y))\,dx =$$

$$= \sum_{|\beta|\le|\alpha|} C_{\alpha\beta} \lim_{\delta\to 0}\Bigg\{ \int\limits_{\Omega_{2\delta}} D^{\beta}\varphi(x)(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h_1(y,\hat{x})G_0(x,y))\,dx +$$

$$+ \sum_{|\gamma|\le|\beta|} \int\limits_{|x-y|=\delta} \varphi(x)\nu^{\gamma}(x)(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}D_x^{\gamma}(h_1(y,\hat{x})G_0(x,y))\,dS\Bigg\}.$$

У локальній розпрямляючій системі координат на сфері $\{x : |x - y| = \delta\}$

$$D_x^{\gamma} = \begin{cases} \sum\limits_{t\le|\gamma|} R'_{\gamma t}(\xi, D')(\frac{\partial}{\partial\nu})^t, & |\gamma| < 2m \\ \sum\limits_{t\le 2m-1} R_{\gamma t}(\xi, D')(\frac{\partial}{\partial\nu})^t + M_{\gamma}A, & 2mi \le |\gamma| < 2m(i+1),\ i = 1,2,\ldots \end{cases}$$

$$R'_{\gamma t}(\xi, D') = \sum_{|q|\le|\gamma|-t} R'_{\gamma tq}(\xi)(D')^q,$$
$$R_{\gamma t}(\xi, D') = \sum_{|q|\le|\gamma|-t-2mi} R_{\gamma tq}(\xi)(D')^q,$$

$R_{\gamma tq}, R'_{\gamma tq} \in C^{\infty}(S_\delta)$, оператор M_γ має порядок $\gamma - 2mi$, $M_\gamma A G_0 \big|_{S_\delta(y)} = 0$, D' — "дотичні" диференціальні вирази. Тоді

$$v_{2\alpha}(y) = \sum_{|\beta|\le|\alpha|} C_{\alpha\beta} \lim_{\delta\to 0}\Bigg\{ \int\limits_{\Omega_{2\delta}} D^{\beta}\varphi(x)(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h_1(y,\hat{x})\times$$

$$\times G_0(x,y))\,dx + \sum_{\substack{2mi\le|\gamma|\le\\ \le|\beta|<2m(i+1)}} \sum_{t=0}^{\min[|\gamma|,2m-1]} \sum_{\substack{|q|\le|\gamma|-\\ -t-2mi}} \int\limits_{S_\delta} (D')^{*q}(\varphi(x)\nu^{\gamma}(x))\times$$

$$\times R_{\gamma tq}(\xi)\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^t (D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h_1(y,\hat{x})G_0(x,y))\,dS\Bigg\}. \quad (2)$$

Оскільки $\varphi \in C^{\infty}(\Omega_2)$, а оператор $(D_x + D_y)^{\alpha-\beta}$ не збільшує порядку особливості функції при $x = y$, то перша група доданків у виразі для $v_{2\alpha}(y)$ набуває вигляду

$$\sum_{|\beta|\le|\alpha|} C_{\alpha\beta}\int\limits_{\Omega_2} D^{\beta}\varphi(x)(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h_1(y,\hat{x})G_0(x,y))\,dx \le$$
$$\le (\varrho^{k+2m-|\alpha|}(y,\hat{x})+1)\varphi_{2\alpha}(y), \quad \tilde{\varphi}_{2\alpha},\varphi_{2\alpha}\in C(\overline{\Omega}).$$

Інша група доданків має оцінку $\delta^{2m-1-t}\mu_{\alpha}(y), \mu_{\alpha}\in C(\overline{\Omega})$, $t\le 2m-1$, а тому має границею при $\delta\to 0$ неперервну функцію.

Для $x\in\Omega_3$ підінтегральний вираз в $v_{3\alpha}$ є нескінченно диференційовною функцією y, тому $v_{3\alpha}=\varphi_{3\alpha}\in C(\overline{\Omega})$.

Зауважимо, що $(1-h_1(x,\hat{x}))h_1(y,\hat{x})\ne 0$ та $(1-h_1(x,\hat{x}))(1-h_1(y,\hat{x}))\ne 0$ при $|x-\hat{x}|>\frac{\varepsilon}{2}$, де функція φ є нескінченно диференційовною, а тоді неперервність $D_y^{\alpha}\big(h_1(y,\hat{x})\hat{\mathcal{G}}_0((1-h_1(x,\hat{x}))\varphi(x)\big)(y)$ та $D_y^{\alpha}\big((1-h_1(y,\hat{x}))\hat{\mathcal{G}}_0((1-h_1(x,\hat{x}))\varphi(x)\big)(y)$ випливає з відомих властивостей спряжених операторів Гріна.

$h_1(x,\hat{x})(1-h_1(y,\hat{x}))\ne 0$ при $|x-\hat{x}|<\varepsilon$, $|y-\hat{x}|\in(\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon)$. При $|x-\hat{x}|\in(\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon)$ функція $\varphi(x)$ є нескінченно диференційовна, а при $|x-\hat{x}|<\frac{\varepsilon}{2}$ знову розглядаємо випадки $x\in\Omega_1, x\in\Omega_2, x\in\Omega_3$. Об'єднуючи, знаходимо

$$|D^{\alpha}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)|\le\big(\varrho^{k+2m-|\alpha|}(y,\hat{x})+1\big)\varphi_{2\alpha}(y),\ \varphi_{2\alpha}\in C(\overline{\Omega}),$$

для довільних α і $\hat{\mathcal{G}}_0\varphi\in Z_{k+2m}(\overline{\Omega},S)$. Для $\varphi\in\tilde{Z}_{k,l}(\overline{\Omega},S)$ доведення аналогічне.

Розглянемо випадок $y\in S$. Виберемо таку довільну точку $\hat{x}\in S$, щоб $h_1(y,\hat{x})\ne 0$, і розіб'ємо область Ω на $\Omega_1=\{x\in\Omega : d(x)<\frac{1}{2}|y-\hat{x}| \text{ і } |x-y|>\frac{1}{2}|y-\hat{x}|\}$, $\Omega_2=\{x\in\Omega : |x-y|<\frac{1}{2}|y-\hat{x}|\}$, $\Omega_3=\Omega\backslash(\overline{\Omega_1\cup\Omega_2})$. Відповідно $v_{\alpha}^{(j)}(y)=D_y^{\alpha}\big(h_1(y,\hat{x})\hat{\mathcal{G}}_j\varphi\big)(y)=v_{1\alpha}^{(j)}(y)+v_{2\alpha}^{(j)}(y)+v_{3\alpha}^{(j)}(y)$, $j=\overline{0,m}$. Маємо

$$|v_{1\alpha}^{(j)}(y)|=\left|\int\limits_{\Omega_1} h_1(x,\hat{x})\varphi(x)D_y^{\alpha}\big(h_1(y,\hat{x})G_j(x,y)\big)\,dx\right|\le$$
$$\le C'_{1\alpha}h_1(y,\hat{x})(|y-\hat{x}|^{m_j+(j)-n-|\alpha|}(y)+1)\int\limits_{\Omega_1} h(x)|\varphi(x)|\,dx.$$

Інтеграл $\int_{\Omega_1} h_1(x,\hat{x})|\varphi(x)|\,dx$ оцінюємо так само, як при $y\in\Omega$, і одержуємо:

$$|v_{1\alpha}^{(j)}(y)|\le(\varrho^{k+m_j+(j)-|a|}(y,\hat{x})+1)\varphi_{1\alpha}^{(j)}(y,\hat{x}) \text{ при } \varphi\in\tilde{Z}_k(\overline{\Omega},S);$$
$$|v_{1\alpha}^{(j)}(y)|\le(\varrho^{k+l+m_j+(j)-|a|}(y,\hat{x})+1)\varphi_{1\alpha}^{(j)}(y,\hat{x}) \text{ при } \varphi\in\tilde{Z}_{k,l}(\overline{\Omega},S),$$
$$\varphi_{1\alpha}^{(j)}(\cdot,\hat{x})\in C(S).$$

Нехай $x \in \Omega_2$, $\Omega_{2\delta} = \Omega_2 \setminus \{x \in \Omega_2 : |x-y| \le \delta\}$, $S'_\delta = \{x \in \Omega_2 : |x-y| = \delta\}$, $S' = \{x \in S : |x-\hat{x}| \le \delta\}$. Тоді $v^{(j)}_{2\alpha}(y)$ набуває вигляду (2) із заміною інтегрування по сфері $|x-y| = \delta$ інтегруванням по $S'_\delta \cup S'$ та G_0 — на G_j, $j = \overline{0,m}$.

Якщо $\varphi \in \tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S)$, то при $x \in \Omega_2$

$$|D^\beta \varphi| \le |y-\hat{x}|^{k-|\beta|}\varphi_0(x,\hat{x}), \quad \varphi_0(\cdot,\hat{x}) \in C(\overline{\Omega}).$$

Тоді перша група доданків у виразі для $v^{(j)}_{2\alpha}$ матиме оцінку

$$(|y-\hat{x}|^{k+m_j+(j)-|\alpha|}+1)\tilde{\varphi}^{(j)}_{2\alpha}(y), \quad \tilde{\varphi}^{(j)}_{2\alpha} \in C(\overline{\Omega}).$$

$$|(D')^{*q}(\varphi(x)\nu^\gamma(x))| \le \delta^{k-|q|}\varphi_0(x,y) \text{ на } S'_\delta \cup S',$$

тому група інтегралів по $S'_\delta \cup S'$ у виразі для $v^{(j)}_{2\alpha}$ є величиною порядку δ^p, де $p = m_j + (j) - t - n + k - |q| + n - 1$. Оскільки $|q| \le |\gamma| - t - 2mi$, то $p \ge k + m_j + (j) - 2m$, $p \ge 0$ при $k \ge 2m - m_j - (j)$.

Якщо $\varphi \in \tilde{Z}_{k,l}(\overline{\Omega}, S)$, то

$$|D^\beta \varphi(x)| \le \sum_{|\gamma| \le |\beta|} d^{k-|\gamma|}(x)|x-y|^{l-|\beta-\gamma|}\varphi_0(x,y) \le C|x-y|^{k+l-|\beta|},$$

і одержуємо такий самий результат, як для $\varphi \in \tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S)$ при заміні k на $k+l$.

Для $x \in \Omega_3$ підінтегральний вираз в $v^{(j)}_{3\alpha}$ є нескінченно диференційовною функцією y, тому $v^{(j)}_{3\alpha} \in C(\overline{\Omega})$. У результаті одержуємо

$$|v^{(j)}_\alpha(y)| \le \big(\varrho^{k+m_j+(j)-|\alpha|}(y,\hat{x})+1\big)\varphi^{(j)}_\alpha(y),\ \varphi_\alpha \in C(S),$$

при $\varphi \in \tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S)$, $k \ge 2m - m_j - (j)$, а тоді

$$\hat{\mathcal{G}}_j vh \in Z_{k+m_j+(j)}(S), \quad j = \overline{0,m};$$

$$|v^{(j)}_\alpha(y)| \le \big(\varrho^{k+l+m_j+(j)-|\alpha|}(y,\hat{x})+1\big)\varphi^{(j)}_\alpha(y),\ \varphi^{(j)}_\alpha \in C(S),$$

при $\varphi \in \tilde{Z}_{k,l}(\overline{\Omega}, S)$, $k+l \ge 2m - m_j - (j)$, а тоді

$$\hat{\mathcal{G}}_j \varphi \in Z_{k+l+m_j+(j)}(S), \quad j = \overline{0,m}.$$

□

Лема 4. *Для довільних $r \in N$, $q \in \mathbb{R}$, $\varphi_i \in Z_{q-i}(S)(\tilde{Z}_{q-i}(S))$, $i = \overline{0, 2m-1}$, і довільної системи граничних диференціальних операторів $\{\tilde{B}_j(x, \frac{\partial}{\partial x})\}_{j=1}^{2m}$ (порядку $j-1$) на S, що є системою Діріхле для A^*, існує така функція $\psi \in Z_q(\overline{\Omega}, S)(\tilde{Z}_q(\overline{\Omega}, S))$, що $\tilde{B}_j\psi\big|_S = \varphi_{j-1}$, $j = \overline{1,2m}$, і $A^*\psi \in Z_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$ $(\tilde{Z}_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S))$.*

Доведення. Покриємо поверхню S відкритими множинами $V_l \subset \mathbb{R}^n$, $l = \overline{1, N}$, які називатимемо граничними координатними околами. Записуючи B_j у локальній розпрямляючій системі координат граничного координатного околу V_l та застосовуючи їх до функції $\Phi^{(l)}$, яка в цій системі координат має вигляд $\Phi^{(l)} = \sum\limits_{i=0}^{2m+r-j} \xi_n^i \tilde{\varphi}_i^{(l)}(\xi')$, за заданими $\varphi_i^{(l)}$, $i = \overline{0, 2m-1}$, знаходимо $\tilde{\varphi}_j^{(l)} \in Z_{q-j}(S)$, $j = \overline{0, 2m-1}$.

Записуючи в локальній розпрямляючій системі координат граничного координатного околу V_l оператор A^* та прирівнюючи до нуля коефіцієнти біля $\xi_n^0, \xi_n^1, \ldots, \xi_n^{r-1}$ у виразі

$$(A^*\Phi^{(l)})(\xi) = A^*\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big[\sum_{i=0}^{p} \xi_n^i \tilde{\varphi}_i^{(l)}(\xi')\Big],$$

знаходимо $\tilde{\varphi}_{2m}^{(l)}(\xi'), \ldots, \tilde{\varphi}_{2m+r-1}^{(l)}(\xi')$. При цьому $\tilde{\varphi}_{2m+j}^{(l)}$, $j = \overline{0, r-1}$, виражається через $\tilde{\varphi}_i^{(l)}$, $i = \overline{0, 2m-1}$, та її похідні до порядку $2m+j-i$. На підставі властивостей $Z_k(S)$ одержуємо $\tilde{\varphi}_{2m+j}^{(l)} \in Z_{q-(2m+j)}(S \cap V_l)$, $j = \overline{0, r}$, а тоді $\tilde{\varphi}_j^{(l)} \in Z_{q-j}(S \cap V_l)$, $j = \overline{0, 2m+r-1}$.

Інші доданки у виразі $(A^*\Phi^{(l)})(\xi)$ дають $\xi_n^r \varphi^{(l)}(\xi', \xi_n)$. Функція $\varphi^{(l)}(\xi', \xi_n)$ виражається через $\tilde{\varphi}_i^{(l)}$ та їх похідні до порядку $2m+r-i$, $i = \overline{0, 2m-1}$, тому $\varphi^{(l)} \in Z_{q+i-(2m+r-i)}(S) = Z_{q-(2m+r)}(S)$. Отже, в граничному координатному околі V_l $A^*\Phi^{(l)} = \xi_n^r \varphi^{(l)}(\xi', \xi_n)$, $A^*\Phi^{(l)} \in Z_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S) \subset Z_{q-2m}(\overline{\Omega}, S)$.

Використовуючи розклад одиниці, підпорядкований покриттю поверхні S системою координатних околів $\{V_l\}$, знаходимо таку функцію $\psi \in Z_q(\overline{\Omega}, S) \cap Z_q(S)$, $\psi = \Phi^{(l)}(\xi', \xi_n)$ у V_l, що $A^*\psi \in Z_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S) \subset Z_{q-2m}(\overline{\Omega}, S)$, а $\tilde{B}_j \psi \big|_S = \varphi_{j-1}$, $j = \overline{1, 2m}$. □

Нехай $X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega}) = \{\psi \in Z_{p_0}(\overline{\Omega}, S) : A^*\psi \in \tilde{Z}_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S),\ \hat{T}_j \psi \in Z_{p_j}(S),\ \hat{B}_j \psi \big|_S = 0,\ j = \overline{1, m}\}$, $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_m)$, $p_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$.

Лема 5. *При довільному цілому невід'ємному r,*

$$q \geq \max\big(m', p_0, \max_{1 \leq j \leq m} (p_j - m_j - 1 + 2m)\big), \quad m' = \max_j \operatorname{ord} B_j, \qquad (3)$$

простір $X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega})$ непорожній.

Справді, за лемою 4 для довільних $r \in N$, $q \in \mathbb{R}$, $\varphi_i \in \tilde{Z}_{q-i}(S)$, $i = \overline{0, 2m-1}$, існують такі $\varphi_{2m+j} \in \tilde{Z}_{q-2m-j}(S)$, $j = \overline{0, r-1}$, $\psi \in \tilde{Z}_q(\overline{\Omega}, S) \subset Z_q(\overline{\Omega}, S)$, що у локальній розпрямляючій системі координат ξ граничного координатного околу точки $\hat{x} \in S$ $A^*\psi = \xi_n^r \varphi(\xi', \xi_n)$,

$\varphi \in \tilde{Z}_{q-2m-r}(\overline{\Omega}, S) \cap \tilde{Z}_{q-2m-r}(S)$, а, отже, $A^*\psi \in \tilde{Z}_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$, $\hat{T}_j\psi\big|_S = \varphi_{q-2m+m_j+1} \in \tilde{Z}_{q-2m+m_j+1}(S) \subset Z_{q-2m+m_j+1}(S)$, $\hat{B}_j\psi\big|_S = \varphi_{q-2m+\mu_j+1} \in \tilde{Z}_{q-2m+\mu_j+1}(S)$.

Якщо $q \geq p_0$, то $\psi \in Z_{p_0}(\overline{\Omega}, S)$; щоб $\hat{T}_j\psi \in Z_{p_j}(S)$, потрібно $q - 2m + m_j + 1 \geq p_j$; $\hat{B}_j\psi\big|_S = 0$ можливо при $q - 2m + \mu_j + 1 \geq 0$, $j = \overline{1,m}$. Вибираючи q так, щоб задовольнялись усі вказані умови, одержуємо існування функції $\psi \in X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega})$.

Лема 6. *Нехай r — ціле невід'ємне число, $\varepsilon \in (0,1)$,*

$$q \geq q_1 = \max\big(\max_{1\leq j\leq m}(4m - m_j - 1), p_0, \max_{1\leq j\leq m}(p_j - m_j - 1 + 2m), r + 2m - n + 1 + \varepsilon\big). \quad (4)$$

Правильні тотожності

$$\hat{\mathcal{G}}_0(A^*\psi) = \psi, \quad \hat{\mathcal{G}}_j(A^*\psi) = \hat{T}_j\psi, \quad \psi \in X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega}), \quad j = \overline{1,m}. \quad (5)$$

Доведення. У [8] виведені формули (5) для $\psi \in D(\overline{\Omega})$. Нехай $\tilde{\psi}(\cdot,t) \in X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega})$ для довільних $t \in S$, $\mu \in D(S)$, $\psi(x) = \int_S \tilde{\psi}(x,t)\mu(t)\,dS_t$. Функція ψ визначена і належить до $D(\overline{\Omega})$ при $q > 1 - n$. $A^*\tilde{\psi} \in \tilde{Z}_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$, а при $q > 2m - n + r + 1$ визначено $A^*\psi(x) = \int_S A^*\tilde{\psi}(x,t)\mu(t)\,dt$, $A^*\psi \in D(\overline{\Omega})$ і, згідно з [8], $\hat{\mathcal{G}}_0(A^* \int_S \tilde{\psi}(x,t)\mu(t)\,dt) = \int_S \tilde{\psi}(x,t)\mu(t)\,dt$, $\hat{\mathcal{G}}_j(A^* \int_S \tilde{\psi}(x,t)\mu(t)\,dt) = \hat{T}_j \int_S \tilde{\psi}(x,t)\mu(t)\,dt$, $j \in \overline{1,m}$.

При $q - 2m \geq \max_{0\leq j\leq m}(2m - m_j - (j))$ за лемою 3 визначені $\hat{\mathcal{G}}_0(A^*\tilde{\psi}(\cdot,t))$ $\in Z_{q+1-n}(\overline{\Omega}, S)$, $\hat{\mathcal{G}}_j(A^*\tilde{\psi}(\cdot,t)) \in Z_{q-2m+m_j+(j)+1-n}(S)$, $j = \overline{1,m}$, і $\hat{\mathcal{G}}_j(\int_S A^*\tilde{\psi}(x,t)\mu(t)\,dS) = \int_S \hat{\mathcal{G}}_j(A^*\tilde{\psi}(x,t))\mu(t)\,dS$, $j = \overline{0,m}$. $\hat{T}_j\tilde{\psi} \in \tilde{Z}_{p_j}(S)$ і $\hat{T}_j \int_S \tilde{\psi}(x,t)\mu(t)dS = \int_S \hat{T}_j\tilde{\psi}(x,t)\mu(t)dS$, $j = \overline{1,m}$.

З попередніх рівностей

$$\int_S \hat{\mathcal{G}}_0(A^*\tilde{\psi}(x,t))\mu(t)dt = \int_S \tilde{\psi}(x,t)\mu(t)dt,$$

$$\int_S \hat{\mathcal{G}}_j(A^*\tilde{\psi}(x,t))\mu(t)dt = \int_S \hat{T}_j\tilde{\psi}(x,t)\mu(t)dt, \quad j = \overline{1,m},$$

звідки на підставі довільності μ маємо $\hat{\mathcal{G}}_0(A^*\tilde{\psi}) = \tilde{\psi}$, $\hat{\mathcal{G}}_0(A^*\tilde{\psi}) = \hat{T}_j\tilde{\psi}$, для довільних $t \in S$ $\tilde{\psi}(\cdot,t) \in X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega})$. □

Розв'язком задачі (1) при $F_0 \in Z'_{p_0}(\overline{\Omega}, S), F_j \in Z_{p_j}(S)$, $j = \overline{1,m}$, називається узагальнена функція $u \in \tilde{Z}'_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$, яка задовольняє тотожність

$$(A^*\psi, u) = (\psi, F_0) + \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{T}_j \psi, F_j \rangle, \quad \psi \in X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega}). \tag{6}$$

Теорема 1. *Нехай* $F_0 \in Z'_{p_0}(\overline{\Omega}, S)$, $F_j \in Z'_{p_j}(S)$, $p_j \geq 0$, $j = \overline{1,m}$, r *— ціле невід'ємне число,* $q \geq q_1$, q_1 *визначається формулою* (4). *Існує єдиний розв'язок* $u \in \tilde{Z}'_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$ *задачі* (1). *Він визначається формулою*

$$(\varphi, u) = (\hat{\mathcal{G}}_0 \varphi, F_0) + \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{\mathcal{G}}_j \varphi, F_j \rangle, \quad \varphi \in \tilde{Z}_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S). \tag{7}$$

Розглянемо відображення $(F_0, F_1, \ldots, F_m) \to u$, здійснюване формулою (7).

Якщо $\varphi \in \tilde{Z}_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$, то за лемою 3 $\hat{\mathcal{G}}_0 \varphi \in Z_q(\overline{\Omega}, S)$, а при $q - 2m \geq 2m - m_j - 1$ також $\hat{\mathcal{G}}_j \varphi \in Z_{q-2m+m_j+(j)}(S)$, $j = \overline{1,m}$, $\hat{\mathcal{G}}_0 \varphi \in Z_{p_0}(S)$, якщо $q \geq p_0$, $\hat{\mathcal{G}}_j \varphi \subset Z_{p_j}(S)$, якщо $q \geq p_j + 2m - m_j - 1$, $j = \overline{1,m}$. Тому формулою (7) для довільних $F_0 \in Z'_{p_0}(\overline{\Omega}, S)$, $F_j \in Z'_{p_j}(S)$, $j = \overline{1,m}$, при довільному цілому невід'ємному r та $q \geq q_1$ визначена $u \in \tilde{Z}'_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$.

Нехай тепер $\psi \in X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega})$. Тоді $A^*\psi \in \tilde{Z}_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$ і за лемами 3 та 7 $\hat{\mathcal{G}}_0(A^*\psi) = \psi \in Z_{p_0}(\overline{\Omega}, S)$, $\hat{\mathcal{G}}_j(A^*\psi) = \hat{T}_j \psi \in Z_{p_j}(S)$, $j = \overline{1,m}$. Підставляючи у (7) $\varphi = A^*\psi$, одержуємо тотожність (6) для довільної $\psi \in X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega})$.

Якщо u_1, u_2 — два розв'язки задачі (1), то з (6) маємо $(A^*\psi, u_1 - u_2) = 0$ для довільної $\psi \in X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega})$. Розглянемо допоміжну задачу

$$A^*\psi = \varphi \in \tilde{Z}_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S), \quad \hat{B}_j \psi \big|_S = 0, \quad \hat{T}_j \psi \in Z_{p_j}(S),\ j = \overline{1,m}.$$

Для її розв'язності необхідно й досить, щоб $\int_\Omega \varphi u^0 \, dx = 0$, $u^0 \in N$. Тому при $N = \{0\}$ маємо $(\varphi, u_1 - u_2) = 0$ для довільної $\varphi \in \tilde{Z}_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$, тобто $u_1 = u_2$ у $\tilde{Z}'_{r,q-2m-r}(\overline{\Omega}, S)$.

Нехай $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $p_j \geq 0$, $j = \overline{1,m}$,

$$X_{k,p}(\overline{\Omega}) = \big\{ \psi \in Z_{k+2m}(\overline{\Omega}, S) : A^*\psi \in \tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, S), \quad \hat{T}_j \psi \in Z_{p_j}(S), \\ \hat{B}_j \varphi \big|_S = 0,\ j = \overline{1,m} \big\}.$$

Якщо $\psi \in X_{\overline{p}rq}(\overline{\Omega})$, то при $r = 0$, $q = 2m + k = p_0$ також $\psi \in X_{k,p}(\overline{\Omega})$. З попередніх зауважень випливає, що при

$$k \geq \max\big(\max_{1 \leq j \leq m} (p_j - m_j - 1),\ \max_{1 \leq j \leq m} (2m - m_j - 1) \big) \tag{8}$$

простір $X_{k,p}(\overline{\Omega})$ непорожний і правильні формули (5) для $\psi \in X_{k,p}(\overline{\Omega})$. Далі припускаємо, що k задовольняє (8) та вводимо

$$\tilde{M}_k(\Omega) = \left\{ u : \|u\|_k = \max_{\hat{x} \in S} \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x, \hat{x}) |u(x)| \, dx < \infty \right\};$$
$$\tilde{M}_{k,C}(\Omega) = \{u \in \tilde{M}_k(\Omega) : \|u\|_k \le C\}.$$

Нехай $F_j \in Z'_{p_j}(S)$, $j = \overline{1,m}$, $f(x,u)$ визначена для $x \in \Omega$, $u \in (-\infty, \infty)$ і

$$\int\limits_{\Omega} |\psi(x) f(x,u)| \, dx < \infty, \quad \psi \in X_{k,p}(\overline{\Omega}), \quad u \in \tilde{M}_k(\Omega). \tag{9}$$

Розв'язком задачі

$$A(x,D)u = f(x,u), \quad x \in \Omega, \quad B_j u \big|_S = F_j, \quad j = \overline{1,m} \tag{10}$$

називається така $u \in \tilde{M}_k(\Omega)$, що

$$\int\limits_{\Omega} A^* \psi u \, dx = \int\limits_{\Omega} \psi f \, dx + \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{T}_j \psi, F_j \rangle, \quad \psi \in X_{k,p}(\overline{\Omega}). \tag{11}$$

Використовуючи (11) та формули (5), можна довести, що задача (10) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} G_0(x,y) f(y, u(y)) \, dy = \sum_{j=1}^{m} \langle G_j(x,y), F_j \rangle, \quad u \in \tilde{M}_k(\Omega). \tag{12}$$

Розглянемо оператори

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{K}_1 u)(x) &= \int\limits_{\Omega} G_0(x,y) f(y,u(y)) \, dy, \\ (\mathcal{K} u)(x) &= (\mathcal{K}_1 u)(x) + \sum_{j=1}^{m} \langle G_j(x,y), F_j \rangle, \end{aligned}\right. \quad x \in \Omega, \ u \in \tilde{M}_k(\Omega).$$

За лемою 3

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) |G_0(x,y)| \, dx \le (\varrho^{k+2m}(y,\hat{x}) + 1) \varphi_0(y,\hat{x}), \quad \varphi(\cdot, \hat{x}) \in C(\overline{\Omega}).$$

Тому за теоремою Фубіні при $\hat{x} \in S$

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) \left| \int\limits_{\Omega} G_0(x,y) f(y,u(y))\, dy \right| dx \le$$
$$\le \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) |G_0(x,y)|\, dx \right) |f(y,u(y))|\, dy \le$$
$$\le \max_{\hat{x}\in S} \int\limits_{\Omega} |f(y,u(y))|\, dy < \infty.$$

Якщо оператор-функція $fu = f(\cdot, u(\cdot)) : \tilde{M}_k(\Omega) \to L_1(\Omega)$, то оператор $\mathcal{K}_1$ діє з $\tilde{M}_k(\Omega)$ в $\tilde{M}_k(\Omega)$. Оскільки також

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) |G_0(x,y)|\, dx \le \varrho_1^k L_0,$$

де $\varrho_1 = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}, \hat{x}\in S} \varrho(x,\hat{x})$, $L_0 = \max\limits_{y\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} |G_0(x,y)|\, dx$, то за умови існування такої додатної сталої C_0, що

$$2\varrho_1^k L_0 \int\limits_{\Omega} |f(y,u(y))|\, dy \le C, \quad u \in \tilde{M}_{k,C}(\Omega), \quad C > C_0, \tag{13}$$

$\mathcal{K}_1 : \tilde{M}_{k,C}(\Omega) \to \tilde{M}_{k,C}(\Omega)$.

За лемою 2 існують такі натуральні числа N_j, $f_j \in L_2(S)$, що

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) |\langle G_j(x,y), F_j\rangle|\, dS =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) \left| \int\limits_{S} (1-\Delta_S)_y^{\frac{N_j}{2}} G_j(x,y) f_j(y)\, dS \right| dx \le$$
$$\le \int\limits_{S} \left(\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) |(1-\Delta_S)_y^{\frac{N_j}{2}} G_j(x,y)|\, dx \right) f_j(y)\, dS;$$

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) \left|(1-\Delta_S)_y^{\frac{N_j}{2}} G_j(x,y)\right| dx \le c(1 + \varrho^{m_j+1+k-N_j}(y,\hat{x}))$$

при $k \ge 2m-1-m_j$, $\varrho^{m_j+1+k-N_j}(y,\hat{x}) \in L_2(S)$ при $k > N_j - 1 - m_j + \frac{1-n}{2}$, що є при $k > p_j - m_j - 1$. Отож, якщо k задовольняє (8), то існує така додатна стала C_1, що

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) |\langle G_j(x,y), F_j\rangle|\, dS \le C_1,$$

$\hat{x} \in S$. Вибираючи $C > \max(C_0, \frac{C_1}{4})$, за умов (8) та (13) одержуємо, що $\mathcal{K} : \tilde{M}_{k,C}(\Omega) \to \tilde{M}_{k,C}(\Omega)$.

$$\int\limits_{\Omega} |\varrho^k(x+z,\hat{x})(\mathcal{K}_1 u)(x+z) - \varrho^k(x,\hat{x})(\mathcal{K}_1 u)(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Biggl(\int\limits_{\Omega} \Biggl| \int\limits_{0}^{1} \frac{\partial}{\partial x_l} (\varrho^k(x+\alpha z,\hat{x}) G_0(x+\alpha z,y)) d\alpha \Biggr| dx \Biggr) |f(y,u(y))|\, dy\, |z_l| \leq$$

$$\leq c \sum_{l=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \bigl(\varrho^{k+2m-1}(y,\hat{x}) + 1\bigr) |f(y,u(y))|\, dy\, |z_l|;$$

$$\int\limits_{\Omega} \bigl|\varrho^k(x+z,\hat{x})\langle G_j(x+z,y), F_j\rangle - \varrho^k(x,\hat{x})\langle G_j(x,y), F_j\rangle\bigr|\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \bigl|\langle \varrho^k(x+z,\hat{x}) G_j(x+z,y) - \varrho^k(x,\hat{x}) G_j(x,y), F_j\rangle\bigr|\, dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{n} \Biggl| \Biggl\langle \int\limits_{0}^{1} \frac{\partial}{\partial x_l} (\varrho^k(x+\alpha z,\hat{x}) G_j(x+\alpha z,y))\, d\alpha, F_j \Biggr\rangle \Biggr| dx\, |z_l|.$$

Знову використовуючи лему 2, доводимо обмеженість деякою сталою $C' > 0$ останнього виразу при $z \in \overline{\Omega}$, $|z| \leq \delta$ та $k \geq p_j - m_j - 1$.

Отож, якщо k задовольняє (8), а функція f — умову (13), то

$$\max_{\hat{x}\in S} \int\limits_{\Omega} |\varrho^k(x+z)(\mathcal{K}u)(x+z,\hat{x}) - \varrho^k(x,\hat{x})(\mathcal{K}u)(x)| \leq (C' + C'')\delta$$

при $z \in \overline{\Omega}$, $|z| \leq \delta$. За теоремою Ріса [9] оператор $\mathcal{K}$ — компактний в $\tilde{M}_k(\Omega)$.

Для $u_1, u_2 \in \tilde{M}_k(\Omega)$

$$\|\mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2\|'_k = \max_{\hat{x}\in S} \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) |(\mathcal{K}u_1)(x) - (\mathcal{K}u_2)(x)|\, dx =$$

$$= \max_{\hat{x}\in S} \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x,\hat{x}) \Biggl| \int\limits_{\Omega} G_0(x,y)[f(y,u_1(y)) - f(y,u_2(y))]\, dy \Biggr| dx \leq$$

$$\leq L \max_{\hat{x}\in S} \int\limits_{\Omega} (\varrho^{k+2m}(y,\hat{x}) + 1) |f(y,u_1(y)) - f(y,u_2(y))|\, dy.$$

Якщо існують такі додатні сталі L_1, C_0, α, що

$$\int\limits_{\Omega} |f(y,u_1(y)) - f(y,u_2(y))|\,dy \le L_1\|u_1 - u_2\|_k^\alpha,$$

$$u_1, u_2 \in \tilde{M}_{k,C}(\Omega),\ C > C_0, \quad (14)$$

то $\|\mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2\|_k \le LL_1(\varrho_1^{k+2m} + 1)\|u_1 - u_2\|_k^\alpha$, а тоді $\mathcal{K}$ — неперервне відображення $\tilde{M}_{k,C}(\Omega)$ в себе.

За теоремою Шаудера [10] одержуємо такий результат.

Теорема 2. *Нехай* $F_j \in Z'_{p_j}(S)$, $j = \overline{1,m}$, *число* k *задовольняє* (8), *функція* $f(x,u)$ *визначена для* $x \in \Omega, u \in (-\infty,\infty)$, *задовольняє умови* (9), (14). *Існує розв'язок* $u \in \tilde{M}_k(\Omega)$ *задачі* (10).

З'ясуємо, коли цей розв'язок належить до $C^{2m}(\Omega)$. Нехай Ω' — внутрішня підобласть області Ω. Оскільки

$$u(x) = \int\limits_{\Omega'} G_0(x,y) f\big(y, u(y)\big)\,dy + g_1(x, u(x)),\ x \in \Omega',$$

де

$$g_1(\cdot, u) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega'} G_0(\cdot,y) f\big(y,u(y)\big)\,dy + \sum_{j=1}^{m} < G_j(\cdot,y), F_j > \in C^\infty(\Omega')$$

для довільної $u \in \tilde{M}_k(\Omega)$, то правильна

Теорема 3. *Якщо виконані умови теореми* 2 *і, крім того, для довільної* Ω' $(\overline{\Omega'} \subset \Omega)$ $\int_{\Omega'} |x-y|^{2m-n}|f(y,u)|\,dy < \infty$, $x \in \Omega'$, $u \in L_1(\Omega')$, $f_{y_l}u = f_{y_l}(\cdot,u) : u \in C^{2m-1}(\Omega') \to C(\Omega')$, $l = 1,\dots,n$, *то існує розв'язок* $u \in \tilde{M}_k(\Omega) \cap C^{2m}(\Omega)$ *задачі* (10).

Зокрема додаткові умови теореми 3 виконуються, якщо функції $f(x,u)$ та $f_{x_l}(x,u)$, $l = 1,\dots,n$, неперервні при $x \in \Omega'$, $u \in (-\infty,+\infty)$, функція $f(x,u)$ при всіх $u \in (\infty,+\infty)$ вимірна за x в Ω' і має оцінку [11, с. 375]: $|f(x,u)| \le a(x) + b|u|^q$, $x \in \Omega'$, $u \in (-\infty,+\infty)$, де $a \in L_q(\Omega')$, $b = \mathrm{Const}$, $q < \frac{2m}{n}$.

Приклад 1. Розглянемо узагальнену задачу Діріхле ($F_j \in Z'_{p_j}(S)$, $j = \overline{1,m}$) для рівняння

$$\Delta^{2m} u = |u|^q. \quad (15)$$

Умови теореми 2 набувають вигляду: існують такі додатні сталі C_0, L_1, що для довільних сталої $C > C_0$, $u, u_1, u_2 \in \tilde{M}_{k,C}(\Omega)$

$$2\varrho_1^k L_0 \int\limits_{\Omega} |u|^q \, dy \leq C, \quad \int\limits_{\Omega} \big| |u_1|^q - |u_2|^q \big| \, dy \leq L_1 \|u_1 - u_2\|_k^q,$$

$$k \geq \max(2m-1, \max_{1 \leq j \leq m} (p_j - j - 1)),$$

де $\varrho_1 = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}, \hat{x} \in S} \varrho(x, \hat{x})$, $L_0 = \max\limits_{y \in \overline{\Omega}} \int_{\Omega} |G_0(x,y)| \, dy$, і виконуються при $q \in (0, \frac{n}{k+n})$.

З теореми 2 випливає існування розв'язку $u \in \tilde{M}_k(\Omega)$ узагальненої задачі Діріхле для рівняння (15) при таких k та q. Зауважимо, що функція u, для якої $|u|^{q-1} \leq L_1 \varrho^k(y, \hat{x})$, $y \in \overline{\Omega}$, $\hat{x} \in S$, також задовольняє умови теореми 2. Звідси одержуємо існування розв'язку $u = O(\varrho^l(\cdot, \hat{x}))$ при $\varrho(x, \hat{x}) \to 0$, $\hat{x} \in S$, де $l \in (\max\{-k-n, -\frac{n}{q}\}, \frac{-k}{1-q}]$. З теореми 3 випливає, що $u \in C^{2m}(\Omega)$ при $q \in (0, \min[\frac{n}{k+n}, \frac{2m}{n}])$.

Література

[1] Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, *Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений* // Докл. АН СССР, **148** (1963), N 4, 745–748.

[2] С. Г. Крейн, А. С. Симонов, *Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения* // Докл. АН СССР, **167** (1966), N 6, 1226–1229.

[3] L. Veron, *The boundary traces of positive solutions of some nonlinear elliptic equations* // Book of Abstr. of Int. conf. "Nonlinear partial diff. equat". Donetsk, 1997, p. 169.

[4] Ю. П. Красовский, *Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач* // Изв. АН СССР, **33** (1969), N 1, 109–137.

[5] H. P. Lopushanska, *Generalized solutions of elliptic boundary value problems with strong power singularities* // Nonlinear boundary value problems, **9** (1999), 55–59.

[6] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1981, 512 с.

[7] Г. С. Гупало, *Оцінки фундаментального розв'язку рівняння* $(1-\Delta_S)^{\frac{k}{2}} u = f$ // Вісник Львів. ун-ту. Сер. фіз., хім. і мех.-мат., (1968), 178–182.

[8] А.-В. С. Гупало, Г. П. Лопушанская, *Об одном представлении решения обобщенной эллиптической граничной задачи* // Дифф. уравн., **23** (1087), N 3, 518–521.

[9] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа.* М.: Наука, 1965, 520 с.

[10] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ (Теория и приложения).* М.: Мир, 1969.

[11] П. П. Забрейко и др., *Интегральные уравнения.* М: Наука, 1968, 448 с.

Відомості про авторів

Галина Петрівна Лопушанська

Львівський державний університет
імені Івана Франка,
вул. Університетська 1,
79001, Львів,
Україна
E-Mail: gp_lopushanska@franko.lviv.ua,
lhp@ukr.net