Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 3, 345 – 361

О проблеме моментов дискретного соболевского типа

Сергей М. Загороднюк

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В данной работе изучается следующая проблема моментов: найти неубывающую на вещественной оси, непрерывную слева функцию $\sigma(\lambda)$, $\sigma(0) = 0$, и вещественную, симметрическую, неотрицательную матрицу M, такие, что

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m} d\sigma(\lambda) + (\lambda^n, (\lambda^n)', \ldots, (\lambda^n)^{(N-1)}) M \begin{pmatrix} \lambda^m \\ (\lambda^m)' \\ \vdots \\ (\lambda^m)^{(N-1)} \end{pmatrix} \Bigg|_{\lambda=0} = s_{n,m},$$

$n, m \in \mathbb{Z}_+$, где $\{s_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ — заданная последовательность вещественных чисел, $N \in \mathbb{N}$. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи и описаны все решения задачи. Для того случая, когда $N = 2$, получены более простые условия разрешимости. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи и описаны все решения задачи для произвольного N в том случае, когда матрица M ищется диагональной.

2000 MSC. 44A60.

Ключевые слова и фразы. Проблема моментов, блочная матрица.

В последнее время интенсивно изучаются системы ортогональных многочленов относительно скалярного произведения соболевского типа [1]. В частности, рассматриваются системы, ортогональные относительно скалярного произведения дискретного соболевского типа (см. [2,3]), т.е. системы многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ ($\deg p_n = n$), такие, что

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda)\, d\sigma(\lambda) + (p_n(0), p_n'(0), \ldots, p_n^{(N-1)}(0)) M \begin{pmatrix} p_m(0) \\ p_m'(0) \\ \vdots \\ p_m^{(N-1)}(0) \end{pmatrix} = \delta_{nm}, \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 29.03.2004

$n, m \in \mathbb{Z}_+$, где $\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция на $\mathbb{R}$, $M = M^* \geq 0$ — вещественная симметрическая матрица порядка N, $N \in \mathbb{N}$. С такими многочленами мы связываем следующую проблему моментов: найти неубывающую на вещественной оси, непрерывную слева функцию $\sigma(\lambda)$, такую, что $\sigma(0) = 0$, и вещественную, симметрическую, неотрицательную матрицу M порядка N, такие, что

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma(\lambda) + (\lambda^n, (\lambda^n)', \ldots, (\lambda^n)^{(N-1)}) M \left.\begin{pmatrix} \lambda^m \\ (\lambda^m)' \\ \vdots \\ (\lambda^m)^{(N-1)} \end{pmatrix}\right|_{\lambda=0} = s_{n,m}, \tag{2}$$

$n, m \in \mathbb{Z}_+$, где $\{s_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ — заданная последовательность вещественных чисел.

Задача (2) представляет собой естественное обобщение проблемы моментов Гамбургера [4]. В работе [5] изучалась задача нахождения позитивной матрицы $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j=0}^{N-1}$ комплексных борелевских мер на $\mathbb{R}$, такой, что

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} (x^m)^{(i)} \overline{(x^n)^{(j)}} \mu_{i,j}(dx) = s_{m,n}, \tag{3}$$

$m, n \in \mathbb{Z}_+$, где $\{s_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ — заданная последовательность комплексных чисел, $N \leq +\infty$, и при $N = +\infty$ позитивность матрицы понимается специальным образом. Для этой задачи получены условия разрешимости [5, Theorem 5, p. 2312–2313]. Процедура проверки этих условий, однако, осталась неясной. Также в работе [5] изучается случай соболевской проблемы моментов на $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и $\mathbb{C}$.

В работах [6, 7] изучалась задача (3) в диагональном случае, т.е. тогда, когда ищется $\mu :\ \mu_{i,j} = 0,\ i, j = 0, 1, \ldots, N-1 :\ i \neq j$. В работе [6] установлены условия разрешимости этой задачи в более общей формулировке, когда требуется $\operatorname{supp} \mu_{i,i} \subseteq \Sigma_i \subseteq \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, N-1$ [6, Corollary 2, p. 374]. В работе [7] предложен матричный алгоритм решения этой задачи, причем порядок N не обязательно фиксирован заранее.

Заметим также, что если задана система многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ класса (1) и требуется найти σ и вещественную матрицу M, то действуя по известной схеме [8], можно определить билинейный функционал $\sigma(\sum_{i=0}^{r} a_i p_i(\lambda), \sum_{j=0}^{r} b_j p_j(\lambda)) = \sum_{i=0}^{r} a_i \overline{b_i}$, где $a_i, b_i \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{Z}_+$, и затем положить по определению $s_{n,m} = \sigma(\lambda^n, \lambda^m),\ n, m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда данная задача сведется к проблеме моментов (2) с данными $\{s_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$.

Нашей целью будет получить условия разрешимости и описать все решения задачи (2) в общем случае, а также в диагональном случае, т.е. тогда, когда ищется M вида $M = \mathrm{diag}\,(m_0, m_1, \ldots, m_{N-1})$, $m_i \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

1. Рассмотрим задачу (2) для произвольного N. Проводя дифференцирование во втором слагаемом левой части (2), получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma(\lambda) + (\delta_{n,0}, 1!\delta_{n,1}, 2!\delta_{n,2}, \ldots, (N-1)!\delta_{n,N-1})M \times \\ \times (\delta_{m,0}, 1!\delta_{m,1}, 2!\delta_{m,2}, \ldots, (N-1)!\delta_{m,N-1})^T = s_{n,m}, \quad (4)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma(\lambda) + \Delta_{n,N} D_N M D_N \Delta_{m,N}^T = s_{n,m}, \quad (5)$$

где $D_N = \mathrm{diag}\,(1, 1!, 2!, \ldots, (N-1)!)$, $\Delta_{n,N} = (\delta_{n,0}, \delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,N-1})$.

Обозначим $M_0 = D_N M D_N$. Рассмотрим задачу: найти неубывающую на $\mathbb{R}$, непрерывную слева функцию $\sigma(\lambda)$, такую, что $\sigma(0) = 0$, и вещественную, симметрическую, неотрицательную матрицу M_0 порядка N, такие, что

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma(\lambda) + \Delta_{n,N} M_0 \Delta_{m,N}^T = s_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (6)$$

Разрешимость задачи (6) равносильна разрешимости задачи (2) и отображение $(\sigma(\lambda), M_0) \to (\sigma(\lambda), D_N^{-1} M_0 D_N^{-1})$, обратным к которому является отображение $(\sigma(\lambda), M) \to (\sigma(\lambda), D_N M D_N)$, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решениями задач (6) и (2). Равенства (6) можно записать в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma(\lambda) + M_{0;n,m} = s_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+ :\ n, m \leq N-1, \quad (7)$$

где $M_{0;n,m}$ — элемент матрицы M_0 в n-й строке, m-м столбце;

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma(\lambda) = s_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+ :\ \max(n, m) > N-1. \quad (8)$$

Обозначим $S = (s_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}$, $S^{(k)} = (s_{n,m})_{n,m=0}^{k-1}$ — матрицы, составленные из моментов $s_{n,m}$.

Предположим, что задача (6) имеет решение $\sigma(\lambda), M_0$. Определим числа s_k:

$$s_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k\, d\sigma(\lambda), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (9)$$

Положим $\Gamma = (s_{n+m})_{n,m=0}^{\infty}$ — бесконечная ганкелева матрица, обозначим $\Gamma_{i;j,k}$ любую часть матрицы Γ размера $(j \times k)$ с элементом s_i в левом, верхнем углу (они все равны). Из равенств (7), (8) заключаем, что

$$S = \Gamma + \begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$S^{(N+k)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{0;N,N} + M_0 & \Gamma_{N;k,N} \\ \Gamma_{N;N,k} & \Gamma_{2N;k,k} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Докажем вспомогательную лемму:

Лемма 1. *Пусть $D = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B^* & C \end{smallmatrix}\right)$ — блочная матрица, где $A \in (r \times r)$, $B \in (r \times l)$, $C \in (l \times l)$, $r, l \in \mathbb{N}$. Матрица D неотрицательна тогда и только тогда, когда*

1) *$C \geq 0$;*
2) *существует матричное решение X уравнения $CX = B^*$;*
3) *$A \geq X^*CX$.*

Если условия 1)–3) выполнены, тогда X^*CX не зависит от выбора X.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $T = \begin{pmatrix} 0_{l\times r} & I_l \\ I_r & 0_{r\times l} \end{pmatrix}$, где I_p — единичная матрица порядка p, и обозначим $D_1 = TDT^*$. Заметим, что $D_1 = \left(\begin{smallmatrix} C & B^* \\ B & A \end{smallmatrix}\right)$. Поскольку T невырождена, то $D \geq 0$ тогда и только тогда, когда $D_1 \geq 0$. Применяя к D_1 обычную лемму о блок-матрице (см. например [9, Лемма о блок-матрице 1.1, с. 223]), получаем утверждение леммы.

Лемма доказана. □

Применяя критерий разрешимости проблемы моментов Гамбургера [10, Теорема А, с. 77] к (9) имеем:

$$\Gamma_{0;N+k,N+k} = \begin{pmatrix} \Gamma_{0;N,N} & \Gamma_{N;k,N} \\ \Gamma_{N;N,k} & \Gamma_{2N;k,k} \end{pmatrix} \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Отсюда

$$S^{(N+k)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{0;N,N} + M_0 & \Gamma_{N;k,N} \\ \Gamma_{N;N,k} & \Gamma_{2N;k,k} \end{pmatrix} \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Применяя к блочным матрицам в (12), (13) лемму 1 получаем, что (12), (13) эквивалентно следующим условиям:

1) $\Gamma_{2N;k,k} \geq 0$;
2) уравнение $\Gamma_{2N;k,k}X_k = \Gamma_{N;N,k}$ имеет решение X_k;

3) выполнены соотношения:

$$S^{(N)} = \Gamma_{0;N,N} + M_0 \geq X_k^* \Gamma_{2N;k,k} X_k; \tag{14}$$

$$\Gamma_{0;N,N} \geq X_k^* \Gamma_{2N;k,k} X_k. \tag{15}$$

Обозначим $G_k^{(A)}$ матрицу, полученную из матрицы в (12) заменой $\Gamma_{0;N,N}$ на произвольную квадратную матрицу A порядка N. При выполнении условий 1), 2) матричный отрезок $I_k := [X_k^* \Gamma_{2N;k,k} X_k, \infty)$ описывает все матрицы A, при которых блочная матрица $G_k^{(A)}$ неотрицательна. Если $l \leq k$, то $G_k^{(A)} \geq 0$ влечет $G_l^{(A)} \geq 0$. Значит I_k содержится в множестве матриц A при которых G_l неотрицательна, т.е. $I_k \subseteq I_l$. Отсюда следует, что

$$Y_k := X_k^* \Gamma_{2N;k,k} X_k \leq X_{k+1}^* \Gamma_{2N;k+1,k+1} X_{k+1} \leq S^{(N)}.$$

Неубывающая последовательность матриц, ограниченная сверху, имеет предел.

Обозначим

$$B = \lim_{k\to\infty} X_k^* \Gamma_{2N;k,k} X_k. \tag{16}$$

Из (14), (15) следует, что

$$S^{(N)} = \Gamma_{0;N,N} + M_0 \geq B; \tag{17}$$

$$\Gamma_{0;N,N} \geq B. \tag{18}$$

Значит

$$B \leq \Gamma_{0;N,N} \leq S^{(N)}. \tag{19}$$

Пусть теперь задана задача (6) с некоторым набором чисел $\{s_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$. Положим $s_n = s_{n,0}$, $n \in \mathbb{Z}_+ : \ n \geq N$. Из (8) следует, что для разрешимости задачи необходимо, чтобы

$$s_{n_1,m_1} = s_{n_2,m_2}, \quad n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}_+ : \ \max(n_1, m_1) \geq N, \\ \max(n_2, m_2) \geq N, \ n_1 + m_1 = n_2 + m_2. \tag{20}$$

Предположим, что это условие выполнено. Рассмотрим матрицу $\Gamma = (s_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$, где $s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}$ — неизвестные. Определим матрицы $\Gamma_{i;j,k}, S, S^{(k)}$ так, как ранее. Будем считать, что условие

$$S^{(N+k)} \geq 0, \ k \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

необходимое, как было показано, для разрешимости задачи (6), выполнено. В силу леммы 1, отсюда следует, что условия 1), 2) после (13) выполнены. Кроме того, выполнено неравенство $S^{(N)} \geq X_k^* \Gamma_{2N;k,k} X_k$, $k \in \mathbb{N}$, и в силу рассуждений после (15) существует конечный предел B в (16) и выполнено неравенство $S^{(N)} \geq B$.

Рассмотрим неравенство (12) для матрицы $\Gamma_{0;N+k,N+k}$ с неизвестными $s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}$. В силу леммы 1 заключаем, что его разрешимость эквивалентна выполнению (15) для всех $k \in \mathbb{N}$. Значит его разрешимость эквивалентна выполнению (18).

Рассмотрим неравенство

$$B \leq \Gamma_{0;N,N} \leq S^{(N)}, \tag{22}$$

относительно неизвестных $s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}$. Если это неравенство имеет решение, тогда для этого решения выполнено (12) и разрешима проблема моментов Гамбургера (9). Положим в этом случае $M_0 := S^{(N)} - \Gamma_{0;N,N} \geq 0$, тогда выполнено (10). Записывая равенство (10) покомпонентно и учитывая (9), получаем, что пара $\sigma(\lambda)$, M_0, где $\sigma(\lambda)$ — любое решение (9), является решением (7), (8).

Изучим теперь неравенство (22). Запишем его в следующем виде:

$$\Gamma_{0;N,N} - B \geq 0; \quad S^{(N)} - \Gamma_{0;N,N} \geq 0. \tag{23}$$

Рассмотрим матрицу $\tilde{I} = (u_{i,j})_{i,j=0}^{N-1}$, $u_{i,j} = \delta_{i+j,N-1}$. Матрица $\tilde{I}$ невырождена и симметричная, поэтому (23) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено

$$\tilde{I}(\Gamma_{0;N,N} - B)\tilde{I} \geq 0; \quad \tilde{I}(S^{(N)} - \Gamma_{0;N,N})\tilde{I} \geq 0. \tag{24}$$

Пусть $B = (b_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}$. Тогда (24) равносильно выполнению следующих неравенств:

$$C_1 := \begin{pmatrix} s_{2N-2}-b_{N-1,N-1} & s_{2N-3}-b_{N-1,N-2} & \ldots & s_N-b_{N-1,1} & s_{N-1}-b_{N-1,0} \\ s_{2N-3}-b_{N-2,N-1} & s_{2N-4}-b_{N-2,N-2} & \ldots & s_{N-1}-b_{N-2,1} & s_{N-2}-b_{N-2,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_N-b_{1,N-1} & s_{N-1}-b_{1,N-2} & \ldots & s_2-b_{1,1} & s_1-b_{1,0} \\ s_{N-1}-b_{0,N-1} & s_{N-2}-b_{0,N-2} & \ldots & s_1-b_{0,1} & s_0-b_{0,0} \end{pmatrix} \geq 0; \tag{25}$$

$$C_2 := \begin{pmatrix} s_{N-1,N-1}-s_{2N-2} & s_{N-1,N-2}-s_{2N-3} & \ldots & s_{N-1,1}-s_N & s_{N-1,0}-s_{N-1} \\ s_{N-2,N-1}-s_{2N-3} & s_{N-2,N-2}-s_{2N-4} & \ldots & s_{N-2,1}-s_{N-1} & s_{N-2,0}-s_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{1,N-1}-s_N & s_{1,N-2}-s_{N-1} & \ldots & s_{1,1}-s_2 & s_{1,0}-s_1 \\ s_{0,N-1}-s_{N-1} & s_{0,N-2}-s_{N-2} & \ldots & s_{0,1}-s_1 & s_{0,0}-s_0 \end{pmatrix} \geq 0. \tag{26}$$

Обозначим множество решений неравенств (25), (26) D. Предположим, что $D \neq \emptyset$. Мы предполагаем, что читатель знаком с основами теории проблемы моментов Гамбургера в пределах первых трех глав книги [4]. Пусть $\vec{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}) \in D$. Тогда для этих s_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, выполнено (22), и, следовательно, как уже отмечалось после (22), выполнено (12). Заметим, что $\Gamma_{0;i,i} \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, N$, что следует из неотрицательности матрицы $\Gamma_{0;N+1,N+1}$. В силу критерия разрешимости проблемы моментов Гамбургера, отсюда следует, что задача (9) имеет решение. При этом возможны 3 случая:

(i) $\Gamma_{0;k,k} > 0,\ k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\Gamma_{0;k,k} > 0,\ k = \overline{1,l},\ \det\Gamma_{0;l+n,l+n} = 0,\ n \in \mathbb{N}$; где $l \in \mathbb{N}$.

(iii) $s_0 = 0$.

В случае (i), если при этом проблема моментов (9) неопределенная, формула [4, Теорема 3.2.2, с. 124]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} = -\frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)}, \tag{27}$$

где $\begin{pmatrix} A(z) & C(z) \\ B(z) & D(z) \end{pmatrix}$ — матрица Неванлинны, строящаяся по моментам, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функциями $\varphi(z)$ из класса Неванлинны N и решениями $\sigma(\lambda)$ проблемы моментов (9). Функция $\sigma(\lambda)$ находится с помощью формулы обращения Стилтьеса-Перрона [4, с. 155].

В случае (i), когда проблема моментов (9) определенная, $\sigma(\lambda)$ находится с помощью формулы обращения Стилтьеса-Перрона из формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} = K_\infty(z), \tag{28}$$

где $K_\infty(z)$ — предельная точка, соответствующая проблеме моментов (см. [4, Теорема 2.2.4, с. 55]).

В случае (ii) у решения задачи не может быть более l точек роста. Существует единственное разложение [11, Теорема 5, с. 13] вида

$$s_k = \sum_{i=1}^{l} \rho_i \xi_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2l, \tag{29}$$

где $\rho_i > 0$ — коэффициенты квадратурной формулы, и $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_l$. Равенства (29) можно записать так:

$$s_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k \, d\sigma(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2l, \tag{30}$$

где $\sigma(\lambda)$ — кусочно-постоянная, непрерывная слева функция, $\sigma(0) = 0$, имеющая скачки в точках ξ_i равные $\rho_i,\ i = \overline{1,l}$. В силу единственности, функция $\sigma(\lambda)$ является решением.

В случае (iii) решением может быть лишь функция $\sigma(\lambda) \equiv 0$. Поскольку задача (9) разрешима, то $\sigma(\lambda)$ является ее решением.

В любом из рассмотренных случаев пары $\sigma(\lambda)$, $M_0 := S^{(N)} - \Gamma_{0;N,N}$ будут решениями задачи (6), что следует из приведенных выше рассуждений (после (22)).

Наоборот, любое решение $\sigma(\lambda)$, M_0 задачи (6) дает решение $\sigma(\lambda)$ задачи (9), где $s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}$, удовлетворяют (22), а $M_0 = S^{(N)} - \Gamma_{0;N,N}$ (см. рассуждения от (9) до (22)).

Из приведенных рассуждений, с учетом связи между задачами (6) и (2), следует

Теорема 1. *Пусть задана проблема моментов* (2) *с некоторым набором вещественных чисел* $\{s_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$. *Для того, чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

а) $s_{n_1,m_1} = s_{n_2,m_2}$, $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}_+ :$ $\max(n_1, m_1) \geq N$, $\max(n_2, m_2) \geq N$, $n_1 + m_1 = n_2 + m_2$*;*

б) $S^{(N+k)} \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$*;*

в) Положим $s_n = s_{n,0}$, $n \in \mathbb{Z}_+ :$ $n \geq N$, *и определим* B *формулой* (16), *где* X_k *— любое решение уравнения* $\Gamma_{2N;k,k} X_k = \Gamma_{N;N,k}$, *здесь* $\Gamma_{i;j,k}$ *определяются как раньше. Пусть* $B = (b_{n,m})_{n,m=0}^{N-1}$, *и обозначим* D *— множество решений* $\vec{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_{N-1})$ *неравенств* (25), (26) *относительно неизвестных* $s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}$. *Тогда* $D \neq \emptyset$.

В том случае, когда условия а)–в) выполнены, решения задачи строятся следующим образом. Для каждого $\vec{s} \in D$ *обозначим* $V(\vec{s})$ *— набор решений проблемы моментов Гамбургера* (9), *которая в нашем случае разрешима. В случае* (i), *когда проблема моментов* (9) *неопределенная, этот набор находится из* (27) *с помощью формулы обращения Стилтьеса-Перрона. В случае* (i), *когда проблема моментов* (9) *определенная, этот набор находится с помощью формулы обращения Стилтьеса-Перрона из* (28). *В случае, когда выполнено* (ii), *этот набор состоит из одного решения из формулы* (30). *В случае* (iii) *набор состоит из одной функции* $\sigma(\lambda) \equiv 0$. *Положим* $M(\vec{s}) = D_N^{-1}(S^{(N)} - \Gamma_{0;N,N})D_N^{-1}$, *где* D_N *как в* (5). *Пары* $\sigma(\lambda), M$, *где* $\sigma(\lambda) \in V(\vec{s})$, $M = M(\vec{s})$, $\vec{s} \in D$, *являются всеми решениями задачи* (2).

Исследуем теперь вопрос разрешимости (25), (26). Если (25), (26) выполнены, тогда

$$C_1 + \varepsilon I_N > 0,\ C_2 + \varepsilon I_N > 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{31}$$

Наоборот, если выполнено (31), то $\langle C_i \vec{x}, \vec{x} \rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \langle (C_i + \varepsilon I_N)\vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$. Определим матрицы:

$$K_{1,j}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} s_{2(N-1)} - b_{N-1,N-1} + \varepsilon & \dots & s_{N+j-1} - b_{N-1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N+j-1} - b_{j,N-1} & \dots & s_{2j} - b_{j,j} + \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$K_{2,j}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} s_{N-1,N-1} - s_{2(N-1)} + \varepsilon & \dots & s_{N-1,j} - s_{N+j-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j,N-1} - s_{N+j-1} & \dots & s_{j,j} - s_{2j} + \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$j = N-1, N-2, \dots, 0;$$

являющиеся главными угловыми подматрицами матриц $C_1 + \varepsilon I_N$ и $C_2 + \varepsilon I_N$, соответственно. Если выполняется (31), то

$$K_{1,j}(\varepsilon) > 0,\ K_{2,j}(\varepsilon) > 0, \quad j = N-1, N-2, \dots, 0;\ \forall \varepsilon > 0. \tag{32}$$

Обратно, из (32) при $j = 0$ следует (31).

При $j = N-1, N-2, \dots, \left[\frac{N-1}{2}\right] + 1$, матрицы в (32) не содержат неизвестных и являются условиями совместности на известные моменты. Они эквивалентны условию

$$K_{i,\left[\frac{N-1}{2}\right]+1}(\varepsilon) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0,\ i = 1,2. \tag{33}$$

В силу рассуждений, аналогичных рассуждениям после (31), последнее условие эквивалентно следующему:

$$K_{i,\left[\frac{N-1}{2}\right]+1}(0) \geq 0, \quad i = 1,2. \tag{34}$$

Будем далее считать условие (34) выполненным.

Применим критерий положительности блочной матрицы ([13, Теорема, с. 559]) для матриц $K_{1,j}(\varepsilon),\ K_{2,j}(\varepsilon)$, последовательно при $j = \left[\frac{N-1}{2}\right], \left[\frac{N-1}{2}\right] - 1, \dots, 0$; с правым нижним блоком размера (1×1). Получим, что (32) эквивалентно выполнению неравенств:

$$s_{2j} - b_{j,j} + \varepsilon > B_{1,j}^* K_{1,j+1}^{-1}(\varepsilon) B_{1,j},\ s_{j,j} - s_{2j} + \varepsilon > B_{2,j}^* K_{2,j+1}^{-1}(\varepsilon) B_{2,j},$$
$$j = \left[\frac{N-1}{2}\right], \left[\frac{N-1}{2}\right] - 1, \dots, 0;\ \forall \varepsilon > 0, \tag{35}$$

где $B_{i,j}$ — правый, верхний блок разбиения матрицы $K_{i,j}(\varepsilon)$, $i = 1,2$. Перепишем последние неравенства в виде:

$$s_{2j} > b_{j,j} - \varepsilon + B_{1,j}^* K_{1,j+1}^{-1}(\varepsilon) B_{1,j} =: \varphi_j(\varepsilon) = \varphi_j(\varepsilon; s_{N-1}, s_{N-2}, \dots, s_{2j+1}), \tag{36}$$

$$s_{2j} < s_{j,j} + \varepsilon - B^*_{2,j} K^{-1}_{2,j+1}(\varepsilon) B_{2,j} =: \psi_j(\varepsilon) = \psi_j(\varepsilon; s_{N-1}, s_{N-2}, \ldots, s_{2j+1}),$$
$$j = \left[\frac{N-1}{2}\right], \left[\frac{N-1}{2}\right] - 1, \ldots, 0;\ \forall \varepsilon > 0. \quad (37)$$

Зафиксируем в (36) и (37) некоторое $\varepsilon > 0$. Множества векторов $\vec{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_{N-1})$, являющиеся решениями (36) (решениями (37)) при этом ε, обозначим $D_1(\varepsilon)$ (соответственно $D_2(\varepsilon)$). Очевидно, что $D_1(\varepsilon) \neq \emptyset$, $D_2(\varepsilon) \neq \emptyset$, $\forall \varepsilon > 0$. Кроме того, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, то $D_1(\varepsilon_2) \subseteq D_1(\varepsilon_1)$, $D_2(\varepsilon_2) \subseteq D_2(\varepsilon_1)$. Действительно, выполнение (36) (выполнение (37)) эквивалентно выполнению первого (соответственно второго) неравенства в (32), при фиксированном ε. Вложенность же множеств решений для неравенств из (32) очевидна.

Возьмем $\varepsilon_1, \varepsilon_2 :\ \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, и некоторое $\vec{s} \in D_1(\varepsilon_2)$. Тогда $K_{1,j}(\varepsilon_2) < K_{1,j}(\varepsilon_1)$, что равносильно $K^{-1}_{1,j}(\varepsilon_2) > K^{-1}_{1,j}(\varepsilon_1)$. Пользуясь видом обратной матрицы к блочной матрице [13, с. 559] с правым нижним блоком размера (1×1), замечаем, что правый нижний элемент $K^{-1}_{1,j}(\varepsilon_k)$ есть $(s_{2j} - b_{j,j} + \varepsilon_k - B^*_{1,j} K^{-1}_{1,j+1}(\varepsilon_k) B_{1,j})^{-1}$, $k = 1, 2$. Следовательно,

$$(s_{2j} - b_{j,j} + \varepsilon_2 - B^*_{1,j} K^{-1}_{1,j+1}(\varepsilon_2) B_{1,j})^{-1} >$$
$$> (s_{2j} - b_{j,j} + \varepsilon_1 - B^*_{1,j} K^{-1}_{1,j+1}(\varepsilon_1) B_{1,j})^{-1};$$

$$s_{2j} - b_{j,j} + \varepsilon_2 - B^*_{1,j} K^{-1}_{1,j+1}(\varepsilon_2) B_{1,j} < s_{2j} - b_{j,j} + \varepsilon_1 - B^*_{1,j} K^{-1}_{1,j+1}(\varepsilon_1) B_{1,j}.$$

Значит

$$\varphi_j(\varepsilon_2) > \varphi_j(\varepsilon_1),\ \varepsilon_2 < \varepsilon_1,\ \vec{s} \in D_1(\varepsilon_2);\ j = \left[\frac{N-1}{2}\right], \left[\frac{N-1}{2}\right] - 1, \ldots, 0. \quad (38)$$

Взяв $\varepsilon_1, \varepsilon_2 :\ \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, и $\vec{s} \in D_2(\varepsilon_2)$, и поступая аналогично для матрицы $K_{2,j}(\varepsilon_k)$, $k = 1, 2$, приходим к неравенству:

$$\psi_j(\varepsilon_2) < \psi_j(\varepsilon_1),\ \varepsilon_2 < \varepsilon_1,\ \vec{s} \in D_2(\varepsilon_2);\ j = \left[\frac{N-1}{2}\right], \left[\frac{N-1}{2}\right] - 1, \ldots, 0. \quad (39)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$D_1(\varepsilon_2) \subset D_1(\varepsilon_1),\ D_2(\varepsilon_2) \subset D_2(\varepsilon_1),\ \varepsilon_2 < \varepsilon_1. \quad (40)$$

Положим $D(\varepsilon) = D_1(\varepsilon) \cap D_2(\varepsilon)$, и $D = \cap_{\varepsilon > 0} D(\varepsilon)$. В силу (40), $D(\varepsilon_2) \subseteq D(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Значит $D = \cap_{k \in \mathbb{N}} D(2^{-k})$. Если (36), (37) имеют решение, то $D \neq \emptyset$, и наоборот. При этом D является множеством решений (36), (37), а значит и (32), (31), (25), (26).

Из наших рассуждений следует

Предложение 1. *Пункт в) последней теоремы можно заменить следующими двумя пунктами:*

в) Положим $s_n = s_{n,0}$, $n \in \mathbb{Z}_+ : \ n \geq N$, *и определим* B *формулой* (16), *где* X_k *— любое решение уравнения* $\Gamma_{2N;k,k}X_k = \Gamma_{N;N,k}$, *здесь* $\Gamma_{i;j,k}$ *определяются как раньше. Пусть* $B = (b_{n,m})_{n,m=0}^{N-1}$. *Тогда выполнено* (34);

г) Обозначим $D = \cap_{k\in\mathbb{N}} D(2^{-k})$, $D(\varepsilon) = D_1(\varepsilon) \cap D_2(\varepsilon)$, *где* $D_1(\varepsilon)$ *и* $D_2(\varepsilon)$ *являются непустыми наборами решений неравенств* (36) *и* (37), *соответственно, при фиксированном* $\varepsilon > 0$. *Тогда* $D \neq \emptyset$.

В том случае, когда $N = 2$, можно упростить решение неравенств (25), (26). Итак, пусть задана задача (6) с некоторым набором чисел $\{s_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$, и $N = 2$. Поступаем так же, как и в рассуждениях после (19), вплоть до (25), (26) включительно. В нашем случае (25), (26) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} s_2 - b_{1,1} & s_1 - b_{1,0} \\ s_1 - b_{0,1} & s_0 - b_{0,0} \end{pmatrix} \geq 0; \ \begin{pmatrix} s_{1,1} - s_2 & s_{1,0} - s_1 \\ s_{0,1} - s_1 & s_{0,0} - s_0 \end{pmatrix} \geq 0. \tag{41}$$

Неотрицательность матриц в (41) эквивалентна [12, Теорема 4, с. 278] неотрицательности всех ее главных миноров, т.е. выполнению неравенств

$$s_2 - b_{1,1} \geq 0, \ (s_2 - b_{1,1})(s_0 - b_{0,0}) - (s_1 - b_{1,0})^2 \geq 0, \ s_0 - b_{0,0} \geq 0,$$

$$s_{1,1} - s_2 \geq 0, \ (s_{1,1} - s_2)(s_{0,0} - s_0) - (s_{1,0} - s_1)^2 \geq 0, \ s_{0,0} - s_0 \geq 0, \tag{42}$$

где мы учли, что матрицы B и $S^{(2)}$ симметричны.

Из (42) получаем, что для разрешимости (41) необходимо, чтобы

$$b_{1,1} \leq s_2 \leq s_{1,1}, \tag{43}$$

и множество на плоскости (s_0, s_1), описываемое неравенствами

$$b_{0,0} \leq s_0 \leq s_{0,0}, \tag{44}$$

$$b_{1,0} - \sqrt{s_2 - b_{1,1}}\sqrt{s_0 - b_{0,0}} \leq s_1 \leq b_{1,0} + \sqrt{s_2 - b_{1,1}}\sqrt{s_0 - b_{0,0}}, \tag{45}$$

$$s_{1,0} - \sqrt{s_{1,1} - s_2}\sqrt{s_{0,0} - s_0} \leq s_1 \leq s_{1,0} + \sqrt{s_{1,1} - s_2}\sqrt{s_{0,0} - s_0}, \tag{46}$$

являющееся пересечением внутренностей двух парабол (45), (46) и полосы (44), непусто. Оно является множеством решений (42), которые, как было сказано, эквивалентны (41). Обозначим это множество D. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть задана проблема моментов* (2) *с некоторым набором вещественных чисел* $\{s_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ *и* $N = 2$. *Для того, чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

а) $s_{n_1,m_1} = s_{n_2,m_2}$, $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}_+ :\ \max(n_1, m_1) \geq 2$, $\max(n_2, m_2) \geq 2$, $n_1 + m_1 = n_2 + m_2$;

б) $S^{(2+k)} \geq 0$, $k \in N$;

в) Положим $s_n = s_{n,0}$, $n \in \mathbb{Z}_+ :\ n \geq 2$, *и определим* B *формулой* (16), *где* $N = 2$, X_k *— любое решение уравнения* $\Gamma_{4;k,k} X_k = \Gamma_{2;2,k}$, $\Gamma_{i;j,k}$ *определяются как раньше. Пусть* $B = (b_{n,m})_{n,m=0}^{1}$. *Тогда выполнено* (43).

г) Множество D *в плоскости* (s_0, s_1), *описываемое соотношениями* (44)–(46), *непусто.*

Если условия а)–г) выполнены, то описание решений проводится так, как в теореме 1 при $N = 2$, *с использованием определенного выше множества* D.

Доказательство. Необходимость условий *а)–б)* следует из теоремы 1 для $N = 2$. Необходимость *в)*, *г)* была показана перед формулировкой теоремы. С другой стороны, если *а)–г)* выполнены, то множество D, как было сказано выше, является множеством решений (41), т.е. (25), (26), и значит (22). Таким образом, множество D совпадает со множеством D из теоремы 1. Поскольку оно непусто, то согласно теореме 1, проблема моментов (2) разрешима и описание решений описано в формулировке теоремы 1.

Теорема доказана. $\square$

В работе [5] задача (3) связывалась с некоторой матричной проблемой моментов Гамбургера. Заметим, что в случае задачи (2) мера μ имеет специальный вид:

$$\mu = \begin{pmatrix} \sigma(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \mu_M,$$

где $\mu_M = \left\{ \begin{smallmatrix} 0, & \lambda \leq 0 \\ M, & \lambda > 0 \end{smallmatrix} \right.$. Можно выписать условия разрешимости матричной проблемы моментов Гамбургера в случае, когда ищутся решения такого специального вида.

Как для случая специальной меры, так и для общего случая, справедливо [5]:

$$s_{m,n} = \sum_{i,j=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} (x^m)^{(i)} (x^n)^{(j)} \mu_{i,j}(dx) = \sum_{i,j=0}^{N-1} i!j! \binom{m}{i} \binom{n}{j} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}} x^{m-i} x^{n-j} \, d\mu_{i,j} = \sum_{i,j=0}^{N-1} i!j! \binom{m}{i} \binom{n}{j} A_{m-i,n-j}^{(i,j)} \qquad m,n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $A_{k,l}^{(i,j)} = \int_{\mathbb{R}} x^{k+l} d\mu_{i,j}$;

$$s_{m,n} = \sum_{i,j=0}^{N-1} i!j! \binom{m}{i} \binom{n}{j} A_{m-i,n-j}^{(i,j)}, \quad m,n \in \mathbb{Z}_+. \tag{47}$$

Таким образом, как задачу (3) [5], так и задачу (2) можно связать с матричной проблемой моментов Гамбургера

$$\int_{\mathbb{R}} x^{k+l} \, d\mu = A_{k,l}, \quad k,l \in \mathbb{Z}_+,$$

где $A_{k,l} = (A_{k,l}^{(i,j)})_{i,j=0}^{N-1}$.

Вопрос о разрешимости уравнений (47) относительно неизвестных $A_{k,l}^{(i,j)}$, $k,l \in \mathbb{Z}_+$, $i,j = 0,1,\ldots,N-1$, однако, остается открытым.

С другой стороны, диагональный случай задачи (3), который изучался в [6, 7], значительно отличается от задачи (2), т.к. в нашем случае матрица из моментов $S = (s_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}$ не допускает разложения в сумму вида $\sum_{k=0}^{N-1} D_k V^k M^{(k)} (V^T)^k D_k$, где $M^{(k)}$ — ганкелевы матрицы, $V = (\delta_{n,m+1})_{n,m=0}^{\infty}$, $D_k = \mathrm{diag}\,(d_{k,m})_{m=0}^{\infty}$, $d_{k,m} = k!\binom{m}{k}$, а верхний индекс T обозначает транспонирование. Поэтому методы, предложенные в этих работах, неприменимы в нашем случае.

2. Рассмотрим теперь задачу (2) при дополнительном условии, что матрица M ищется диагональной: $M = \mathrm{diag}\,(m_0, m_1, \ldots, m_{N-1})$, $m_i \geq 0$, $i = 0,1,2,\ldots,N-1$. Для решения задачи в этом случае можно было бы воспользоваться результатом [6, Corollary 2, p. 374] или матричным алгоритмом, предложенным в работе [7], но мы предложим независимый, простой способ решения.

Для рассматриваемой задачи равенства (2) примут вид:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m} \, d\sigma(\lambda) + \sum_{k=0}^{N-1} m_k (\lambda^n)^{(k)} (\lambda^m)^{(k)}|_{\lambda=0} = s_{n,m}, \quad n,m \in \mathbb{Z}_+, \tag{48}$$

или

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma(\lambda) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{n!m!}{(n-k)!(m-k)!} m_k \delta_{n,k}\delta_{m,k} = s_{n,m}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+, \quad (49)$$

где $(-l)! = 1,\ l \in \mathbb{N}$.

Пусть задача (48) имеет решение $\sigma(\lambda), M$. Тогда из (49) следует, что

$$k!^2 m_k = s_{k,k} - s_{k+1,k-1}, \quad k = 1,2,\ldots,N-1. \quad (50)$$

Заметим, что если есть решение (48) $\sigma(\lambda), M = (m_0, m_1, \ldots, m_{N-1})$ с $m_0 \geq 0$, то есть решение (48) с $m_0 = 0$, т.к. можно рассмотреть функцию $\tilde{\sigma}(\lambda) = \left\{\begin{smallmatrix} \sigma(\lambda)+m_0, & \lambda>0 \\ \sigma(\lambda), & \lambda\leq 0 \end{smallmatrix}\right.$, и тогда $\tilde{\sigma}(\lambda)$ порождает решение $\tilde{\sigma}(\lambda), \tilde{M} = (0, m_1, \ldots, m_{N-1})$. Будем далее рассматривать решение с $m_0 = 0$, обозначая его вновь $\sigma(\lambda), M$. Тогда из (49) при $m = 0$ получаем:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^n d\sigma(\lambda) = s_{n,0}, \quad n = 0,1,2,\ldots. \quad (51)$$

Значит, в силу критерия разрешимости проблемы моментов Гамбургера, выполнено

$$(s_{n+m,0})_{n,m=0}^{k} \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (52)$$

Кроме того, из (49) следует, что

$$s_{n,m} = s_{n+m,0},\ n,m \in Z_+:\ n \neq m \text{ или } \max(n,m) \geq N; \quad (53)$$

$$s_{k,k} - s_{k-1,k+1} \geq 0, \quad k = 1,2,\ldots,N-1. \quad (54)$$

Теорема 3. *Пусть дана задача* (48) *с некоторым набором вещественных чисел* $\{s_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$. *Для того, чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (52)–(54).

Если эти условия выполнены, тогда обозначим V — набор решений разрешимой проблемы моментов Гамбургера (51), *который строится так же, как строились решения проблемы моментов* (9). *Положим*

$$m_k = \frac{1}{k!^2}(s_{k,k} - s_{k+1,k-1}),\ k = 1,2,\ldots,N-1. \quad (55)$$

Обозначим $\hat{V} \subseteq V$ — множество тех решений (51), *которые имеют ненулевой скачок в точке $\lambda = 0$, а $\tilde{V} = V \backslash \hat{V}$. Для любой функции $\sigma(\lambda) \in \hat{V}$, имеющей скачок в нуле, равный $\alpha > 0$, обозначим $W(\sigma)$ — множество функций вида*

$$\sigma_a(\lambda) = \begin{cases} \sigma(\lambda) - a, & \lambda > 0 \\ \sigma(\lambda), & \lambda \leq 0 \end{cases},\ 0 \leq a \leq \alpha. \quad (56)$$

Для $\hat{\sigma}(\lambda) \in \hat{V}$ *рассмотрим набор* $\{\sigma(\lambda), M : \sigma(\lambda) = \hat{\sigma}_a(\lambda) \in W(\hat{\sigma}),\ M = (a, m_1, m_2, \ldots, m_{N-1})\} =: K(\hat{\sigma})$. *Также рассмотрим набор* $\{\sigma(\lambda), M :\ \sigma(\lambda) \in \tilde{V},\ M = (0, m_1, m_2, \ldots, m_{N-1})\} =: L$.

Тогда $U := (\cup_{\hat{\sigma}\in\hat{V}} K(\hat{\sigma})) \cup L$ *является набором всех решений задачи* (48). *При этом множества* $K(\hat{\sigma}),\ \hat{\sigma} \in \hat{V},\ L$ *не пересекаются между собой.*

Доказательство. Необходимость условий (52)–(54) была показана перед формулировкой теоремы. Предположим, что эти условия выполнены. Тогда проблема моментов Гамбургера (51) разрешима. Заметим, что равенства (49) равносильны следующим равенствам:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma(\lambda) = s_{n,m}, \quad n, m \in Z_+ :\ n \neq m \text{ или } \max(n,m) \geq N; \tag{57}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2n}\, d\sigma(\lambda) + (n!)^2 m_n = s_{n,n}, \quad n \in Z_+ :\ n < N. \tag{58}$$

Возьмем любую пару $u = (\sigma^1(\lambda), M) \in U,\ M = (m_0, m_1, \ldots, m_{N-1})$. Проверим выполнение (57), (58). В силу (53), равенство (57) принимает вид:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma(\lambda) = s_{n+m,0},\ n, m \in Z_+ : n \neq m \text{ или } \max(n,m) \geq N. \tag{59}$$

Если $u \in L$, то $\sigma^1(\lambda)$ является решением (51), и значит (59) выполнено. Если $u \in K(\hat{\sigma}),\ \hat{\sigma} \in \hat{V}$, то $\sigma^1(\lambda)$ является функцией типа (56),

$$\sigma^1(\lambda) = \begin{cases} \hat{\sigma}(\lambda) - a, & \lambda > 0 \\ \hat{\sigma}(\lambda), & \lambda \leq 0 \end{cases},\ 0 \leq a \leq \alpha, \tag{60}$$

α — скачок в нуле функции $\hat{\sigma}(\lambda)$, а $\hat{\sigma}(\lambda)$ является решением (51). Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\sigma^1(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+m}\, d\hat{\sigma}(\lambda) = s_{n+m,0},$$
$$n, m \in Z_+ :\ n \neq m \text{ или } \max(n,m) \geq N.$$

Значит (59) выполнено и в этом случае.

Учитывая определение чисел $m_k,\ k = 1, 2, \ldots, N-1$, из (55), заключаем, что левая часть (58) при $n \neq 0$ равна:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2n}\, d\sigma(\lambda) + s_{n,n} - s_{n+1,n-1}. \tag{61}$$

В силу доказанного равенства (57), $s_{n+1,n-1} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{2n}\, d\sigma^1(\lambda)$. Подставляя в (61) $\sigma^1(\lambda)$ и выражение для $s_{n+1,n-1}$, получаем, что это выражение равно $s_{n,n}$. Значит (58) выполнено.

Если $u \in L$, то $m_0 = 0$, и правая часть (58) при $n = 0$, после подстановки $\sigma^1(\lambda), m_0$, примет вид: $\int_{\mathbb{R}} d\sigma^1(\lambda)$. В силу (51), $\int_{\mathbb{R}} d\sigma^1(\lambda) = s_{0,0}$, и значит (58) выполнено.

Предположим теперь, что $u \in K(\hat{\sigma})$, $\hat{\sigma} \in \hat{V}$, т.е. $\sigma^1(\lambda)$ является функцией вида (60), где α — скачок функции $\hat{\sigma}$ в нуле, а $\hat{\sigma}$ является решением (51). При этом $m_0 = a$. Подставляя $\sigma^1(\lambda)$, m_0 в правую часть (58) при $n = 0$, получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} d\sigma^1(\lambda) + a = \int\limits_{\mathbb{R}} d\hat{\sigma}(\lambda) - a + a = \int\limits_{\mathbb{R}} d\hat{\sigma}(\lambda).$$

Поскольку $\hat{\sigma}$ является решением (51), то последнее выражение равно $s_{0,0}$, и (58) выполнено.

Итак для $u \in U$ выполнены (59), (58), а значит (57), (58), и следовательно (49). При этом, как мы видели, $m_0 \geq 0$. Заметим, что из условия (54) следует, что $m_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, N-1$. Значит $u \in U$ является решением проблемы моментов (48).

С другой стороны, пусть $\sigma(\lambda), M = (m_0, m_1, \ldots, m_{N-1})$ — решение задачи (48). Тогда числа $m_i, i = 1, 2, \ldots, N-1$, как было показано, удовлетворяют (50) и значит совпадают с $m_i, i = 1, 2, \ldots, N-1$, из (55). Обозначим скачок функции $\sigma(\lambda)$ в нуле Δ. Тогда пара $\tilde{\sigma}(\lambda), \tilde{M}$, где $\tilde{\sigma}(\lambda) = \left\{\begin{smallmatrix} \sigma(\lambda)+m_0, & \lambda>0 \\ \sigma(\lambda), & \lambda\leq 0 \end{smallmatrix}\right.$, $\tilde{M} = (0, m_1, m_2, \ldots, m_{N-1})$, будет решением (48), а также (51), как было показано выше (после (50)). Значит $\tilde{\sigma} \in V$.

Если $\Delta + m_0 = 0$, т.е. $\Delta = m_0 = 0$, тогда $(\tilde{\sigma}, \tilde{M}) = (\sigma, M) \in L \subseteq U$.

Пусть $\Delta + m_0 > 0$.

Если $m_0 = 0$, тогда $\Delta > 0$ и $\sigma \in \hat{V}$. Значит $(\sigma, M) \in K(\sigma) \subseteq U$.

Если $m_0 > 0$, тогда $\tilde{\sigma} \in \hat{V}$. Функция $\sigma(\lambda) \in W(\tilde{\sigma})$ при $a = m_0$, т.е. $\sigma = \tilde{\sigma}_{m_0}$. Значит $(\sigma, M) \in K(\tilde{\sigma}) \subseteq U$.

Итак U является множеством всех решений задачи (48).

Заметим, что если $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^1 \in \hat{V}:\ \hat{\sigma} \neq \hat{\sigma}^1$, то $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}^1$, как решения (51), не могут отличаться лишь скачком в нуле. Значит $K(\hat{\sigma}) \cap K(\hat{\sigma}^1) = \emptyset$.

Пусть $\hat{\sigma} \in \hat{V}$ имеет скачок $\alpha > 0$. Тогда возьмем любую пару $(\sigma_a(\lambda), M) \in K(\hat{\sigma})$, $M = (m_0, m_1, \ldots, m_{N-1})$. Из вида $\sigma_a(\lambda)$ из (56) следует, что $\sigma_a(\lambda)$ имеет скачок в нуле равный $\alpha - a$. Тогда $m_0 + \alpha - a = a + \alpha - a = \alpha$, что следует из определения множества $K(\hat{\sigma})$. С другой стороны, для любой пары $\tilde{\sigma}(\lambda), \tilde{M} = (\tilde{m}_0, \tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_{N-1})$ из L, сумма скачка $\tilde{\sigma}(\lambda)$ в нуле и $\tilde{m}_0$ равна нулю, что следует из определения множества L , т.к. $\tilde{\sigma} \in \tilde{V}$, $\tilde{m}_0 = 0$. Значит $K(\hat{\sigma}) \cap L = \emptyset$, $\forall \hat{\sigma} \in \hat{V}$.

Следовательно, множества $K(\hat{\sigma})$, $\hat{\sigma} \in \hat{V}$, L попарно не пересекаются между собой.

Теорема доказана. □

Представляет интерес дальнейшее изучение проблем моментов соболевского типа, в частности, задачи (3), а также проблем моментов, связанных с ортогональными многочленами на лучах и дискретной соболевской мерой в нуле [3].

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные указания и советы.

Литература

[1] F. Marcellán, M. Alfaro, M. L. Rezola, *Orthogonal polynomials on Sobolev spaces; old and new directions* // J. Comp. Appl. Math. (1993), No 48, 113–131.

[2] W. D. Evans, L. L. Littlejohn, F. Marcellán, C. Markett, A. Ronveaux, *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials* // SIAM J. Math. Anal. (1995), No 26, 446–467.

[3] S. M. Zagorodnyuk, *On generalized Jacobi matrices and orthogonal polynomials* // New York J. Math. (2003), No 9, 117–135.

[4] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* Гос. изд-во физ.-мат. литературы, Москва, 1961.

[5] F. Marcellán, F.H. Szafraniec, *The Sobolev-type moment problem* // Proc. of the Amer. Math. Soc. **128** (2000), No 8, 2309–2317.

[6] D. Barrios Rolania, G. López Lagomasino, H. Pijeira Cabrera, *The moment problem for a Sobolev inner product* // J. Approx. Theory (1999), No 100, 364–380.

[7] F. Marcellán, F. H. Szafraniec, *A matrix algorithm towards solving the moment problem of Sobolev type* // Linear Algebra and its Appl. (2001), No 331, 155–164.

[8] G. Freud, *Orthogonal polynomials.* Budapest, 1974.

[9] В. А. Золотарев, *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов.* Харьков, ХНУ, 2003.

[10] М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, *Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов* // УМН **2**(1947), вып. 3(19), 60–106.

[11] Н. Ахиезер, М. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов.* Науч.-тех. изд-во Украины, Харьков, 1938.

[12] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Москва, Издат-во “Наука”, 1967.

[13] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Москва, “Мир”, 1989.

Сведения об авторах

Сергей Михайлович Загороднюк

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы 4, 61077, Харьков, Украина

E-Mail: zagorodnyuk@univer.kharkov.ua