Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 3, 318 – 344

О разрешимости задачи Hele-Shaw в случае нерегулярных начальных данных в весовых классах Гельдера

Наталья В. Васильева

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Рассмотрена нестационарная задача со свободной границей для эллиптического уравнения (задача Hele-Shaw) в случае нерегулярных начальных данных. Доказано существование и единственность решения в малом по времени в весовых классах Гельдера.

2000 MSC. 35J25, 35B40, 35Q35, 35R35.

Ключевые слова и фразы. Эллиптическая краевая задача, весовые функциональные пространства, коэрцитивные оценки, нелинейные задачи со свободной границей.

Введение

Задача Hele-Shaw является математической моделью плоского движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей. Кроме того, ее можно рассматривать как вариант известной задачи Стефана для эллиптического уравнения, поскольку условия на свободной (искомой) границе в обеих задачах имеют одинаковую форму [1, 2]. Несмотря на то, что впервые такая задача ставилась и обсуждалась еще в конце 19-го века, наиболее значительные результаты были получены за последние несколько десятилетий, причем эти успехи были достигнуты благодаря общему развитию краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. К настоящему времени разработана теория корректной разрешимости этой задачи в классе слабых решений. Так C. M. Эллиот, В. Яновский [3], Де Бенедетто, А. Фридман [4] с помощью вариационных неравенств доказали существование и единственность слабого решения.

Статья поступила в редакцию 26.04.2004
Работа выполнена при поддержке гранта НАН Украины для молодых ученых и гранта 01.07/00130 ГКНТ Украины.

ISSN 1810 – 3200.

В работах С. Д. Ховисона и Ю. Е. Хохлова [5–7] с помощью аппарата теории функций комплексного переменного построен ряд точных решений. Проблеме классической разрешимости задачи Hele-Shaw в малом по времени для регулярных начальных данных посвящены работы [8–12]. В работе [13] с помощью качественных методов исследована задача Hele-Shaw в случае, когда начальная область является бесконечным плоским углом. В частности, показано, что в случае расширяющихся областей тупые углы мгновенно сглаживаются, в то время как острые углы при некоторых условиях могут сохраняться на свободной границе в течение некоторого времени.

В данной работе исследуется разрешимость задачи Hele-Shaw в случае, когда начальная свободная граница содержит угловую точку. При доказательстве разрешимости этой задачи используется метод, предложенный Б. В. Базалием в работе [14], который состоит в последовательном сведении задачи со свободной границей к задаче в фиксированной области; выделении линейной части в полученных нелинейных соотношениях; исследовании разрешимости линейной задачи и доказательстве существования неподвижной точки для некоторого нелинейного оператора. Применение этого метода предполагает изучение соответствующих модельных задач и построение регуляризатора — оператора, обращающего главную часть линейной краевой задачи (см. [15, гл. 4]).

1. Постановка задачи и основной результат

Исследование разрешимости задачи Hele-Shaw будет проводиться в весовых классах Гельдера $E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}$.

Пусть D — заданная область в R^n с угловой точкой O в начале координат, $D_T = D\times(0,T)$. Обозначим через $r(y)$ расстояние от начала координат до точки $y\in\overline{D}$ и положим $r=\min\{r(y),r(x)\}$, $x,y\in\overline{D}$. Введем следующие весовые полунормы:

$$\begin{aligned} \left\langle D_y^l v\right\rangle_{y,s,\overline{D}_T}^{(\alpha)} &= \sup_{\overline{D}_T} r^{|l|-s+\alpha}\frac{|D_y^l v(y,t)-D_x^l v(x,t)|}{|x-y|^{\alpha}},\\ \left\langle D_y^l v\right\rangle_{t,s,\overline{D}_T}^{(\beta)} &= \sup_{\overline{D}_T} r^{|l|-s}(y)\frac{|D_y^l v(y,t)-D_y^l v(y,\tau)|}{|t-\tau|^{\beta}}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\left[D_y^l v\right]_{s,\overline{D}_T}^{(\delta,\beta)} = \sup_{\overline{D}_T} r^{|l|-s+\delta}\frac{|D_y^l v(y,t)-D_x^l v(x,t)-D_y^l v(y,\tau)+D_x^l v(x,\tau)|}{|x-y|^{\delta}|t-\tau|^{\beta}}, \tag{2}$$

где $l=(l_1,\dots,l_n)$, $D_y^l=\frac{\partial^{|l|}}{\partial y_1^{l_1}\dots\partial y_n^{l_n}}$, $|l|=l_1+\dots+l_n$, $\alpha,\beta,\delta\in(0,1)$, s — некоторое заданное положительное число.

Будем говорить, что функция $v(y,t)\in E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$, если конечна следующая норма

$$\|v\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)}=\sum_{|l|=0}^{k}\Bigg[\sup_{\overline{D}_T} r^{|l|-s}(y)|D_y^l v(y,t)|+\Big\langle D_y^l v\Big\rangle_{y,s,\overline{D}_T}^{(\alpha)}+\\+\Big\langle D_y^l v\Big\rangle_{t,s,\overline{D}_T}^{(\beta)}+\Big[D_y^l v\Big]_{s,\overline{D}_T}^{(\delta,\beta)}\Bigg],\quad (3)$$

здесь в правой части равенства (3) стоят полунормы, определенные соотношениями (1) и (2).

Заметим, что если область D не содержит угловой точки, то определение пространств $E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$ сохраняется, если только в соотношениях (1)–(3) положить $r(y)=r=1$.

Отметим, что случай, когда угловая точка O области D не совпадает с началом координат, может быть сведен к рассмотренному выше с помощью невырожденного линейного преобразования. Поэтому в дальнейшем в работе будем считать, что угловая точка области совпадает с началом координат.

Пусть θ — заданный угол из промежутка $(0,\pi)$,

$$\begin{gathered}G=\{(y_1,y_2):-y_1\operatorname{tg}(\theta/2)<y_2<0,\ y_1>0\},\quad G_T=G\times(0,T),\\ g=\{(y_1,y_2):y_2=-y_1\operatorname{tg}(\theta/2),\ y_1>0\},\quad g_T=g\times(0,T).\end{gathered}\quad (4)$$

Введем в плоском угле G систему координат (x_1,x_2) такую, что $r=e^{-x_1}$, $\varphi=x_2$, где r,φ — полярная система координат на плоскости (y_1,y_2), $r=(y_1^2+y_2^2)^{1/2}$. Тогда при заданном преобразовании образом угла G будет полоса $B=\{(x_1,x_2):-\frac{\theta}{2}<x_2<0,\quad x_1\in R^1\}$, а образом границы g будет $b=\{(x_1,x_2):x_2=-\frac{\theta}{2},\quad x_1\in R^1\}$. Отметим, что в случае, когда область является бесконечным углом с вершиной в начале координат, можно дать эквивалентное определение этих пространств, используя обычные классы Гельдера $C^{k+\alpha}(\overline{D})$ [16] и класс функций $C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$ со следующей нормой:

$$\|u\|_{C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)}=\sum_{|l|=0}^{k}\Bigg[\sup_{\overline{D}_T}|D_y^l u(y,t)|+\Big\langle D_y^l u\Big\rangle_{y,\overline{D}_T}^{(\alpha)}+\\+\Big\langle D_y^l u\Big\rangle_{t,\overline{D}_T}^{(\beta)}+\Big[D_y^l u\Big]_{\overline{D}_T}^{(\delta,\beta)}\Bigg],$$

где $\langle u\rangle^{(\alpha)}_{y,\overline{D}_T}$, $\langle u\rangle^{(\beta)}_{t,\overline{D}_T}$ — постоянные Гельдера относительно переменных y и t, соответственно, а $[u]^{(\delta,\beta)}_{\overline{D}_T}$ — полунорма, введенная в работе [17], которая отличается от соответствующей полунормы (2) отсутствием веса:

$$[u]^{(\delta,\beta)}_{\overline{D}_T} = \sup_{\overline{D}_T} \frac{|u(y,t) - u(x,t) - u(y,\tau) + u(x,\tau)|}{|x-y|^{\delta}|t-\tau|^{\beta}}.$$

Определение 1. *Будем говорить, что* $v(y,t) \in E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{G}_T)$ *(соответственно,* $v(y) \in E^{k+\alpha}_s(\overline{G})$*), если* $u(x,t) = e^{sx_1}v(y(x),t) \in C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{B}_T)$ *(соответственно,* $u(x) = e^{sx_1}v(y(x)) \in C^{k+\alpha}(\overline{B})$*).*

Множество функций $v(y,t)$ из класса $E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{D}_T)(C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T))$, удовлетворяющих нулевому начальному условию: $v(y,0) = 0$, назовем пространством $E^{k+\alpha,\beta,\delta}_{s,0}(\overline{D}_T)$ $(C^{k+\alpha,\beta,\delta}_0(\overline{D}_T))$.

Пусть при каждом $\tau \in [0,T]$ двусвязная область $\Omega_\tau \subset R^2$, и ее граница состоит из двух непересекающихся компонентов Γ^1 и Γ_τ, где Γ^1 — заданная фиксированная кривая, а Γ_τ — неизвестная (свободная граница). Пусть функция $u(y,t)$ описывает давление внутри области Ω_τ. Задача Hele-Shaw заключается в нахождении функции $u(y,t)$ и свободной границы Γ_τ по условиям:

$$\begin{aligned} &\Delta_y u = 0, \quad y \in \Omega_\tau, \tau \in [0,T]; \quad u|_{\Gamma^1} = 1; \\ &u|_{\Gamma_\tau} = 0, \quad V_n|_{\Gamma_\tau} = -\mu^{-1}\partial u/\partial n; \quad \Gamma_\tau|_{\tau=0} = \Gamma, \end{aligned} \tag{5}$$

где Δ_y — оператор Лапласа по переменным (y_1,y_2), μ — положительная постоянная, n — единичный вектор внешней нормали к Ω_τ, Ω_0 — заданная начальная область, V_n — скорость перемещения точек границы Γ_τ в направлении вектора нормали. Начальное распределение давления задается функцией $w(y)$, которая является решением задачи Дирихле в области Ω_0 :

$$\Delta_y w = 0, \quad y \in \Omega_0, \quad w|_{\Gamma^1} = 1, \qquad w|_{\Gamma_0} = 0. \tag{6}$$

Условие $u|_{\Gamma^1} = 1$ обеспечивает расширение области Ω_τ по времени $(\Omega_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2}, \tau_1 < \tau_2)$ [4].

Пусть $\Omega_0 := \Omega$ — заданная ограниченная область в R^2, симметричная относительно оси oy_2, граница которой состоит из двух непересекающихся компонентов Γ и Γ^1 $(\Gamma^1 \in C^{3+\alpha})$, причем Γ^1 лежит внутри ограниченной области Ω, $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$, $\Gamma^1_T = \Gamma^1 \times (0,T)$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Граница Γ состоит из двух частей: $\Gamma = \Sigma \bigcup \sigma$, где Σ — гладкая часть границы Γ $(\Sigma \in C^{3+\alpha})$, а σ — часть границы Γ, состоящая из прямолинейных отрезков, образующих угол θ с вершиной в начале координат, ось oy_2 является биссектрисой этого угла:

$\sigma = \{(y_1, y_2) : y_2 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}|y_1|, y_1 \in [-\gamma_2, \gamma_2]\}$, γ_2 — заданное положительное число. Для точек кривой Γ введем координату ω, натуральный параметр на кривой, и зададим Γ в виде $y = \bar{m}(\omega)$, где $\bar{m}(\omega)$ — радиус вектор: $\bar{m}(\omega) = \{m_1(\omega), m_2(\omega)\}$.

Пусть γ_1, γ_0 — некоторые положительные числа, $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2$, и представим σ в виде: $\sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{3} \sigma_i$, где

$$\sigma_1 = \{(y_1, y_2) : y_2 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}|y_1|, y_1 \in [-\gamma_2, -\gamma_1) \cup (\gamma_1, \gamma_2]\};$$
$$\sigma_2 = \{(y_1, y_2) : y_2 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}|y_1|, y_1 \in [-\gamma_1, -\gamma_0) \cup (\gamma_0, \gamma_1]\};$$
$$\sigma_3 = \{(y_1, y_2) : y_2 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}|y_1|, y_1 \in [-\gamma_0, \gamma_0]\}.$$

Пусть $y_1 > 0$ и на границе Γ определим единичный вектор $\bar{l}(\omega)$:

$$\bar{l}(\omega) = \{l_1, l_2\} = \{-\cos(\alpha + \varphi), -\sin(\alpha + \varphi)\},$$
$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, & y \in \sigma, \\ \operatorname{arctg}\frac{dm_2}{d\omega}\left(\frac{dm_1}{d\omega}\right)^{-1}, & y \in \Sigma, \end{cases} \qquad \varphi = \varphi(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & y \in \Sigma \cup \sigma_1, \\ \frac{\theta}{2}, & y \in \sigma_3, \end{cases} \tag{7}$$
$$\varphi = \varphi(y) \in (\theta/2, \pi/2), \quad y \in \sigma_2, \quad \varphi(y) \in C^{3+\alpha}(\sigma_2),$$

где заданная функция $\varphi(y)$ монотонно возрастает при $(y_1, y_2) \in \sigma_2$ и $y_1 > 0$. При $y_1 < 0$ вектор $\bar{l}(\omega)$ зададим симметрично относительно оси oy_2. Так введенный вектор $\bar{l}(\omega)$ коллинеарен единичному вектору внешней нормали к области Ω, если $(y_1, y_2) \in \Sigma \bigcup \sigma_1$, а при $(y_1, y_2) \in \sigma_3$ вектор $\bar{l}(\omega)$ коллинеарен направляющему вектору оси oy_2. Из определения вектора $\bar{l}(\omega)$ и гладкости границы Γ следует, что $\bar{l}(\omega) \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$.

Будем предполагать, что выполнено условие согласования

$$V_n(y, 0)|_\Gamma = -\mu^{-1}\partial w/\partial n. \tag{8}$$

Далее, пусть γ_3 — заданное положительное число такое, что поверхности $\{\bar{y}(y_1, y_2) = \bar{m}(\omega) \pm 2\gamma\prime\bar{l}(\omega), \quad 0 < \gamma\prime < \gamma_3\}$ не имеют самопересечений и не пересекаются с Γ и Γ^1. В задаче (5) будем отыскивать неизвестную границу $\Gamma_\tau := \Gamma_{\rho,T}$ в терминах ее отклонения от начальной границы вдоль вектора $\bar{l}(\omega)$:

$$\Gamma_{\rho,T} = \{(y, \tau) : \overline{y}(\omega, \tau) = \overline{m}(\omega) + \rho(\omega, \tau)\bar{l}(\omega), \quad \tau \in [0, T]\}, \\ |\rho(\omega, \tau)| < \gamma_3/4, \quad \rho(\omega, 0) = 0. \tag{9}$$

Обозначим через $\Omega_{\rho,T}$ область, ограниченную поверхностями Γ^1_T и $\Gamma_{\rho,T}$. Таким образом, задача Hele-Shaw свелась к нахождению двух неизвестных функций $u(y,\tau), \rho(\omega,\tau)$ в областях $\Omega_{\rho,T}$ и $\Gamma_{\rho,T}$ по условиям (5).

Пусть $\theta \in (0,\pi/3)$, $\gamma = \frac{\pi}{\theta} - 2$, $\kappa = [\gamma] + a$, $-1 < a < \{\gamma\}$, где $[\gamma]$ — целая часть числа γ, $\gamma = [\gamma] + \{\gamma\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены указанные выше условия на данные задачи* (5), $\alpha, \beta \in (0,1)$. *Тогда найдется такое* $T_0 > 0$, *зависящее от этих данных, что существует единственное решение* $(u(y,\tau), \rho(\omega,\tau))$ *задачи Hele-Shaw* (5), *определенное на конечном интервале* $[0,T_0]$ *и обладающее следующими свойствами:*

1) *свободная граница* $\Gamma_{\rho,T}$ *задается уравнением* (9), *и для* $\forall\,\tau \in [0,T_0]$ *имеют место вложения:* $\rho_\tau(\omega,\tau) \in E_\kappa^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\bar\Gamma_\tau)$, $\rho(\omega,0) = 0$, $\rho(\omega,\tau)r^{\gamma+1} \in E_{\kappa+1}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\bar\Gamma_\tau)$, *функция* $\rho_\tau(\omega,0)$ *удовлетворяет условию согласования* (8);

2) *функция* $u(y,\tau) \in E_{\kappa+1}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\bar\Omega_\tau)$, *и справедливо неравенство*

$$\|u\|_{E_{\kappa+1}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)} + \left\|\rho r^{\gamma+1}\right\|_{E_{\kappa+1}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_\tau)} + \|\rho_\tau\|_{E_\kappa^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_\tau)} \le \\ \le c\,\|w\|_{E_{\gamma+2}^{3+\alpha}(\overline{\Omega})}, \quad 0 \le \tau \le T_0. \quad (10)$$

Как будет видно из дальнейшего доказательства результаты теоремы 1 можно распространить на области более общего вида. Пусть граница σ задается уравнением:

$$\sigma = \{(y_1,y_2) : y_2 = \operatorname{ctg}(\theta/2)|y_1| + \psi(y_1), y_1 \in [-\gamma_2,\gamma_2]\}, \qquad (11)$$

где $\psi(y_1)$ — четная функция, $\psi(y_1) \in C^{3+\alpha}(-\gamma_2,\gamma_2)$, $\psi(0) = \psi\prime(0) = 0$. Из определения функции $\psi(y_1)$ следует, что $\psi(y_1) \sim |y_1|^{1+\delta}$, $\delta > 0$ при $|y_1| \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *на данные задачи* (5), $\beta \in (0,1)$, *граница* σ *определяется уравнением* (11) *и или*

a) $\delta \in (0,1)$, $\quad \alpha \in (0,\delta)$, *или*

b) $\delta > 1$, $\quad \alpha \in (0,1)$,

тогда существует единственное решение задачи Hele-Shaw (5), *определенное на конечном интервале* $[0,T_0]$ *и обладающее свойствами* 1) *и* 2) *теоремы* 1.

2. Сведение задачи (5) к нелинейной задаче в фиксированной области

Для доказательства разрешимости задачи со свободной границей (5) ее удобно свести к задаче в фиксированной области. Для этой цели воспользуемся некоторыми отображениями, которые аналогичны преобразованиям Ханзавы [18]. Пусть введенное выше число γ_3 настолько малое, что отображение $y(y_1, y_2) : \Gamma \times [-\gamma_3, \gamma_3] \to R^2$, определяемое правилом: $\bar{y}(\bar{m}(\omega), \eta) \to \bar{m}(\omega) + \eta \bar{l}(\omega)$, регулярное и взаимно однозначное. Пусть образ при таком отображении есть

$$N = \{\bar{y}(\omega, \eta) : (\omega, \eta) \in \Gamma \times [-\gamma_3, \gamma_3]\}, \quad |\eta| \le \gamma_3.$$

Поскольку между $\bar{m}(\omega)$ и ω существует взаимно однозначное соответствие, то в дальнейшем соответствующие точки в R^2 мы будем также обозначать через ω. Обратное отображение из N в $\Gamma \times [-\gamma_3, \gamma_3]$ определяется так: $(y_1, y_2) \to (\omega(y), \eta(y))$. Введем функцию

$$\Phi_\rho(y, \tau) = \eta(y) - \rho(\omega(y), \tau), \quad (y, \tau) \in N \times [0, T],$$

тогда поверхность $\Gamma_{\rho,\tau}$ может быть определена так: $\Gamma_{\rho,\tau} = \{(y, \tau) \in N \times [0, T] : \Phi_\rho(y, \tau) = 0\}$, а условие Стефана на $\Gamma_{\rho\tau}$ в исходной задаче (5) примет вид:

$$\frac{\partial \Phi_\rho}{\partial \tau} - \mu^{-1}(\nabla_y u(y, \tau), \nabla_y \Phi_\rho) = 0.$$

Рассмотрим два экземпляра пространств $R^2 \times [0, T]$, в первом из них введем координаты $(x, t) = (x_1, x_2, t)$ и обозначим его через X_T, а во втором введем координаты $(y, \tau) = (y_1, y_2, \tau)$ и обозначим его через Y_T. Определим отображение $e_\rho : X_T \to Y_T$ по следующему правилу. Пусть $\chi(\lambda) \in C_0^\infty(R^1)$ — срезающая функция такая, что $\chi(\lambda) = 1$, при $|\lambda| \le \frac{\gamma_3}{4}$, $\chi(\lambda) = 0$, при $|\lambda| \ge \gamma_3$, $|\chi\prime(\lambda)| \le 4\gamma_3^{-1}/3$, тогда

$$\begin{gathered}
\overline{y}(y_1, y_2) = \overline{y}(\omega(y), \eta(y)),\ \omega(y) = \omega(x),\ \eta(y) = \lambda(x) + \chi(\lambda)\rho(\omega, t), \\
\tau = t \quad \text{при} \quad \{\overline{x}(x_1, x_2), t\} = \{\overline{x}(\omega(x), \lambda(x)), t\} \in N \times [0, T]; \\
\overline{y} = \overline{x}, \quad \tau = t, \quad \text{при} \quad \{\overline{x}(x_1, x_2), t\} \in (R^2 \backslash N) \times [0, T].
\end{gathered} \tag{12}$$

При отождествлении X_T и Y_T такое отображение задает диффеоморфизм $e_\rho : X_T \to X_T$,

$$e_\rho(\overline{x}, t) = (\overline{x}, t) \quad \text{при} \quad \{\overline{x}(x_1, x_2), t\} \in (R^2 \backslash N) \times [0, T],$$

$$e_\rho(\overline{x}(\omega, \lambda), t) = (\overline{x}(\omega, \lambda(x) + \chi(\lambda)\rho(\omega, t)), t) \ \text{при} \ \{\overline{x}(x_1, x_2), t\} \in N \times [0, T];$$

при котором Ω_T и Γ_T переходят в $\Omega_{\rho,T}$ и $\Gamma_{\rho,T}$, соответственно, точки поверхности Γ_T^1 остаются неподвижными, а так как $\rho(\omega,0)=0$, то $e_\rho|_{t=0}$ есть тождественное отображение.

Функция $u(y,\tau)$ при замене переменных (12) преобразуется в функцию $u\circ e_\rho$, для которой мы сохраним прежнее обозначение $u(x,t)$. При этой же замене переменных вектор $\nabla_y u(y,\tau)$ переходит в вектор $(\nabla_y u(y,\tau))\circ e_\rho=\nabla_\rho u(x,t)$, так что $\nabla_\rho=(E_\rho^\star)^{-1}\nabla$, где $\nabla=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2)$ и E_ρ — матрица Якоби отображения $e_\rho(x,t)$ по пространственным переменным, т.е. матрица с элементами $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x,t),\ i,j=1,2$, причем $|\det E\rho|=1+\chi\prime(\lambda(x))\rho(\omega(x),t)\geq 2/3$. Кроме того,

$$(\nabla_y u,\nabla_y\Phi_\rho)\circ e_\rho=S(\omega,\rho,\rho_\omega)\frac{\partial u}{\partial\lambda}+S_1(\omega,\rho,\rho_\omega)\frac{\partial u}{\partial\omega},\ \text{ при }\ (x,t)\in\Gamma_T,$$
$$u(x,t)=0,\quad \text{при}\quad (x,t)\in\Gamma_T, \tag{13}$$

где

$$S(\omega,\rho,\rho_\omega)=(\nabla_\rho\lambda,\nabla_\rho\lambda),\quad S_1(\omega,\rho,\rho_\omega)=(\nabla_\rho\omega,\nabla_\rho\lambda). \tag{14}$$

Из определения отображения $(x_1,x_2)\to(\omega(x),\lambda(x))$ и соотношений (14) следуют равенства:

$$S(\omega,0,0)=1+\operatorname{ctg}^2\varphi,\quad S_1(\omega,0,0)=\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi};$$

$$\begin{aligned}S(\omega,\rho,\rho_\omega)&=S(\omega,0,0)-2S_1(\omega,0,0)\sin^2\varphi(\det E_1)^{-2}\rho_\omega+\\&\quad+(\det E_1)^{-2}\rho_\omega^2+\operatorname{ctg}^2\varphi[\sin^2\varphi-(\det E_1)^2](\det E_1)^{-2};\\S_1(\omega,\rho,\rho_\omega)&=S_1(\omega,0,0)-(\det E_1)^{-2}\rho_\omega+\\&\quad+S_1(\omega,0,0)[\sin^2\varphi-(\det E_1)^2](\det E_1)^{-2},\end{aligned} \tag{15}$$

здесь E_1 — матрица перехода от координат (y_1,y_2) к $y(\omega,\eta)$, причем $\det E_1=\sin\varphi(y)+\rho(\omega,t)(\varphi+\alpha)\prime>\varepsilon>0$, при достаточно малом γ_3.

Таким образом, после замены переменных (12) задача (5) переходит в задачу определения функции $u(x,t)$, определенной в фиксированной области Ω_T переменных (x,t), и функции $\rho(\omega,t)$, определенной на Γ_T, по условиям:

$$\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}(x,t,\rho,\rho_\omega)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{2}b_i(x,t,\rho,\rho_\omega,\rho_{\omega\omega})u_{x_i}=0,\ (x,t)\in\Omega_T;$$
$$u(y(x),t)|_{\Gamma_T^1}=1;\quad u(y(x),t)|_{\Gamma_T}=0;\quad u(x,0)=w(x),\ x\in\Omega_T; \tag{16}$$
$$\rho(\omega,0)=0,\ x(\omega)\in\Gamma;\quad \mu\rho_t+S(\omega,\rho,\rho_\omega)\frac{\partial u}{\partial\lambda}+S_1(\omega,\rho,\rho_\omega)\frac{\partial u}{\partial\omega}\Big|_{\Gamma_T}=0.$$

После непосредственных вычислений для коэффициентов уравнения получаются следующие представления:

$$\begin{aligned}
&b_{11}=a_{11}^2+a_{21}^2,\quad b_{22}=a_{12}^2+a_{22}^2,\quad b_{12}=b_{21}=a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22};\\
&b_1=a_{11}\tfrac{\partial a_{11}}{\partial x_1}+a_{12}\tfrac{\partial a_{11}}{\partial x_2}+a_{21}\tfrac{\partial a_{21}}{\partial x_1}+a_{22}\tfrac{\partial a_{21}}{\partial x_2},\\
&b_2=a_{12}\tfrac{\partial a_{12}}{\partial x_2}+a_{11}\tfrac{\partial a_{12}}{\partial x_1}+a_{21}\tfrac{\partial a_{22}}{\partial x_1}+a_{22}\tfrac{\partial a_{22}}{\partial x_2};\\
&a_{12}=(\det E_1\det E_\rho)^{-1}[\rho\{\chi\prime\lambda\tfrac{\partial l_2}{\partial\omega}+\chi\prime l_2\tfrac{\partial m_2}{\partial\omega}-\chi l_2\tfrac{\partial l_2}{\partial\omega}\}-l_2^2\chi\rho_\omega];\\
&a_{21}=(\det E_1\det E_\rho)^{-1}[\rho\{-\chi\prime\lambda\tfrac{\partial l_1}{\partial\omega}-\chi\prime l_1\tfrac{\partial m_1}{\partial\omega}+\chi l_1\tfrac{\partial l_1}{\partial\omega}\}+l_1^2\chi\rho_\omega];\qquad(17)\\
&a_{11}=(\det E_1\det E_\rho)^{-1}[\det E_1-l_1l_2\chi\rho_\omega+\rho\{\chi\prime\lambda l_2\tfrac{\partial l_1}{\partial\omega}-\\
&\quad-\chi\prime l_2\tfrac{\partial m_1}{\partial\omega}-\chi l_1\tfrac{\partial l_1}{\partial\omega}\}];\\
&a_{22}=(\det E_1\det E_\rho)^{-1}[\det E_1+l_1l_2\chi\rho_\omega+\rho\{-\chi\prime\lambda l_1\tfrac{\partial l_2}{\partial\omega}+\\
&\quad+\chi\prime l_1\tfrac{\partial m_2}{\partial\omega}+\chi l_2\tfrac{\partial l_1}{\partial\omega}\}].
\end{aligned}$$

Заметим, что $b_i=0,\quad b_{ij}=\delta^i_j,\quad i,j=1,2$, если $(x,t)\in\Omega_T\setminus N_T$, $N_T=N\times(0,T)$, здесь δ^i_j — символ Кронекера. Поскольку область Ω_T симметрична относительно оси ox_2, то задачу (16) можно рассматривать в области $(x\in\Omega:\quad x_1>0)\times(0,T)$ с условием симметрии на границе $x_1=0$. В дальнейших рассуждениях область Ω_T будем отождествлять с областью $(x\in\Omega:\quad x_1>0)\times(0,T)$.

Для задачи (16) построим функцию $s(\omega,t)$, удовлетворяющую тем же начальным условиям, что и функция $\rho(\omega,t)$, а именно:

$$s(\omega,0)=0,\quad \mu s_t+S(\omega,0,0)\frac{\partial w}{\partial\lambda}+S_1(\omega,0,0)\frac{\partial w}{\partial\omega}|_{\Gamma_0}=0,\qquad(18)$$

где функция $w(x)$ является решением задачи (6). Асимптотическое представление для этого решения дается в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть $\theta\in(0,\pi/3),\alpha\in(0,1)$, тогда существует единственное решение задачи (6), для которого справедливо представление:*

$$w(y)=\chi(r)r^{\frac{\pi}{\theta}}\sin\frac{\pi}{\theta}(\varphi-\varphi_0)+v(y),\quad \varphi_0=\frac{\pi-\theta}{2},$$

здесь функция $v(y)\in E^{3+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}+1}(\overline{\Omega})$, $\chi(r)$ — срезающая функция: $\chi(r)=0$, $r>a$, $\chi(r)=1,\ 0<r<a/2$, здесь a — некоторое положительное число: $\gamma_0/2\le a\le\gamma_2$.

Доказательство леммы 1 будет приведено в приложении. Отметим так же, что аналог леммы 1 имеет место и в случае границы σ, заданной уравнением (11) (см. лемму П.3 из приложения). Возвращаясь к построению функции $s(\omega,t)$, положим $s(\omega,t)=t\partial w/\partial\bar{l}$, тогда из леммы 1 следует справедливость неравенства

$$\|s\|_{E^{2+\alpha,1,\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}-1}(\overline{\Gamma}_T)}+\|s_t\|_{E^{2+\alpha,\overline{\beta},\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}-1}(\overline{\Gamma}_T)}\le c\|w\|_{E^{3+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}}(\overline{\Omega})},\quad \text{при}\quad 1\ge\overline{\beta}>\beta>0.\qquad(19)$$

Продолжим преобразование задачи (5) и вместо искомых функций в задаче (16) введем новые неизвестные функции:

$$\rho(\omega,t)=\sigma(\omega,t)+s(\omega,t),\quad u(x,t)=\Theta(x,t)+w(x)-(\nabla_x w,\bar{e}_\sigma),\quad (20)$$

где $\bar{e}_\sigma=\frac{\partial\bar{x}(\omega,\lambda)}{\partial\lambda}\chi(\lambda(x))\sigma(\omega,t)$. Отметим, что $\bar{e}_\sigma|_{\Gamma_T^1}=0$, $\bar{e}_\sigma|_{\Gamma_T}=\bar{l}(\omega)\sigma(\omega,t)$. Пусть $d(w(x),\omega)=-(\nabla_x w,\bar{l}(\omega))$. Подставим функции (20) в граничные условия задачи (16) и после некоторых преобразований получим:

$$\Theta(y(x),t)|_{\Gamma_T^1}=0;\quad \Theta(y(x),t)+d(w(x),\omega)\sigma(\omega,t)|_{\Gamma_T}=0;\qquad (21)$$

$$\mu\sigma_t+\mu s_t+S(\omega,s+\sigma,(s+\sigma)_\omega)\frac{\partial(\Theta+w)}{\partial\lambda}+S_1(\omega,s+\sigma,(s+\sigma)_\omega)\frac{\partial w}{\partial\omega}+$$
$$+S(\omega,s+\sigma,(s+\sigma)_\omega)\frac{\partial d(w(x),\omega)}{\partial\lambda}\sigma\Big|_{\Gamma_T}=0.\quad (22)$$

Из соотношений (15) и (17) следуют представления для коэффициентов задачи (16):

$$\begin{aligned}
b_{ij}(x,t,s,s_\omega)&\equiv b_{ij}(x,t,\rho,\rho_\omega)-b_{ij}(x,t,\sigma,\sigma_\omega),\\
b_i(x,t,s,s_\omega,s_{\omega\omega})&\equiv b_i(x,t,\rho,\rho_\omega,\rho_{\omega\omega})-b_i(x,t,\sigma,\sigma_\omega,\sigma_{\omega\omega});\\
b_{ij}(x,t,s,s_\omega)&=d_{ij}^1 s_\omega^2+d_{ij}^2 s^2+d_{ij}^3 s_\omega s+d_{ij}^4 s_\omega+d_{ij}^5 s+d_{ij}^6,\\
b_{ij}(x,t,\sigma,\sigma_\omega)&=D_{ij}^1\sigma+D_{ij}^2\sigma_\omega+O(\sigma^2)+O(\sigma_\omega^2)+O(\sigma_\omega\sigma);\\
b_i(x,t,s,s_\omega,s_{\omega\omega})&=d_i^1 s_{\omega\omega}+d_i^2 s s_{\omega\omega}+d_i^3 s_\omega s_{\omega\omega}+d_i^4 s_\omega^2+\\
&+d_i^5 s^2+d_i^6 s_\omega s+d_i^7 s_\omega+d_i^8 s+d_i^9;\\
b_i(x,t,\sigma,\sigma_\omega,\sigma_{\omega\omega})&=D_i^1\sigma+D_i^2\sigma_\omega+D_i^3\sigma_{\omega\omega}+\sum_{i,j=0}^{2}O(D_\omega^i\sigma D_\omega^j\sigma);\\
S(\omega,s,s_\omega)&\equiv S(\omega,\rho,\rho_\omega)-S(\omega,\sigma,\sigma_\omega);\qquad (23)\\
S(\omega,s,s_\omega)&=1+\cos^2\varphi E^{-2}(s)-2\cos\varphi E^{-2}(s)s_\omega+E^{-2}(s)s_\omega^2;\\
S(\omega,\sigma,\sigma_\omega)&=-2(\varphi+\alpha)\prime E^{-3}(s)\{\cos\varphi+s_\omega\}^2\sigma+\\
&+2E^{-2}(s)\{s_\omega-\cos\varphi\}\sigma_\omega+\sum_{i,j=0}^{1}O(D_\omega^i\sigma D_\omega^j\sigma);\\
S_1(\omega,s,s_\omega)&\equiv S_1(\omega,\rho,\rho_\omega)-S_1(\omega,\sigma,\sigma_\omega);\\
S_1(\omega,s,s_\omega)&=\cos\varphi E^{-2}(s)-E^{-2}(s)s_\omega;\\
S_1(\omega,\sigma,\sigma_\omega)&=2(\varphi+\alpha)\prime E^{-3}(s)\{s_\omega-\cos\varphi\}\sigma-E^{-2}(s)\sigma_\omega+\\
&+\sum_{i,j=0}^{1}O(D_\omega^i\sigma D_\omega^j\sigma),
\end{aligned}$$

здесь функция $E(s) = \sin\varphi + (\varphi+\alpha)/s$, где φ и α определяются соотношениями (7). В представлении (23) коэффициенты $D^k_{i,j}, D^l_i$, $d^n_{i,j}, d^m_i$, $k, i, j = 1, 2$, $l = \overline{1,3}$, $m = \overline{1,9}$, $n = \overline{1,6}$, являются известными функциями от x и t, и их свойства определяются начальными данными.

Из представления (15) и свойств функции $s(\omega, t)$ следует справедливость соотношений:

$$\begin{gathered} b_{ij}(x,0,0,0) = \delta^i_j, \quad b_i(x,0,0,0) = 0; \\ S(\omega,s,s_\omega)|_{t=0} = 1 + \operatorname{ctg}^2\varphi, \quad S_1(\omega,s,s_\omega)|_{t=0} = \cos\varphi\sin^{-2}\varphi. \end{gathered} \tag{24}$$

Для коэффициентов, заданных соотношениями (23), справедливы результаты.

Лемма 2. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $\bar\beta \in (0,1]$, тогда для $\forall\,\beta : 0 < \beta < \bar\beta$ имеют место неравенства:*

1) $D^k_{i,j}, D^l_i, d^n_{i,j}, d^m_i \in C^{1+\alpha,\bar\beta,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $\quad k, i, j = 1, 2$, $l = \overline{1,3}$, $m = \overline{1,9}$, $n = \overline{1,6}$;

2) $b_{ij}(x,t,s,s_\omega) \in C^{1+\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $\quad b_i(x,t,s,s_\omega,s_{\omega\omega}) \in C^{\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $i, j = 1, 2$, $\quad S(\omega,s,s_\omega)$, $S_1(\omega,s,s_\omega) \in C^{1+\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Gamma}_T)$;

3)
$$\begin{aligned} &\|b_{ij}(x^k,0,0,0) - b_{ij}(x,t,s,s_\omega)\|_{C^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{B}_{\varsigma,T})} + \\ &\qquad + \|d^6_{ij}(x,t) - b_{ij}(x,t,s,s_\omega)\|_{C^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{B}_{\varsigma,T})} \le \\ &\qquad \le c_1(\varsigma^{1-\alpha} + T^{\overline{\beta}-\beta})\|b_{ij}\|_{C^{1+\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T)}, \\ &\|S(x^k,0,0,0) - S(\omega,t,s,s_\omega)\|_{C^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{B}_{\varsigma,T}\cap\overline{\Gamma}_T)} \le \\ &\qquad \le c_4(\varsigma^{1-\alpha} + T^{\overline{\beta}-\beta})\|S\|_{C^{1+\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Gamma}_T)}, \\ &\|b_i(x,t,s,s_\omega,s_{\omega\omega})\|_{C^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{B}_{\varsigma,T})} \le c_3 T^{\overline{\beta}-\beta}\|b_i\|_{C^{\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T)}, \end{aligned} \tag{25}$$

где константы $c_i, i = \overline{1,4}$, зависят от норм начальных функций, B_ς — шар с центром в точке x^k и радиуса ς.

Доказательство. Справедливость утверждения 1) следует из представления для функций $D^k_{i,j}, D^l_i$, $d^n_{i,j}, d^m_i$, $l = \overline{1,3}$, $m = \overline{1,9}$, $n = \overline{1,6}$, $k, i, j = 1, 2$, и свойств функции $s(\omega,t)$. Покажем, например, справедливость этого утверждения для функции $d^5_{11}(x,t)$, для остальных функций доказательство будет аналогичным. Непосредственно вычисляя, имеем:

$$\begin{aligned} (\det E_1)^{-1} &= c_{11}(s(\omega,t)) - c_{12}(s(\omega,t))\sigma + O(\sigma^2), \\ (\det E_\rho)^{-1} &= c_{21}(s(\omega,t)) - c_{22}(s(\omega,t))\sigma + O(\sigma^2), \end{aligned}$$

где $c_{11}(s(\omega,t)) = (\sin\varphi + (\varphi+\alpha)\prime s)^{-1}$, $c_{12}(s(\omega,t)) = (\varphi+\alpha)\prime(\sin\varphi + (\varphi+\alpha)\prime s)^{-2}$, $c_{21}(s(\omega,t)) = (1+\chi\prime(\lambda)s)^{-1}$, $c_{22}(s(\omega,t)) = -\chi\prime(\lambda)(1+\chi\prime(\lambda)s)^{-2}$. Поскольку функция $s(\omega,t) \in E^{2+\alpha,1,\alpha}_{\pi/\theta-1}(\bar{\Gamma}_T)$,$|s(\omega,t)| \le \gamma_3$, то, применяя к функциям $c_{ij}(s(\omega,t)), i,j=1,2$, результаты лемм 3.A.1–3.A.10 из работы [18], получаем вложение $c_{ij}(s(\omega,t)) \in C^{2+\alpha,1,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)$, $i,j=1,2$. Из представления (17) имеем:

$$d^5_{11}(x,t) = c_{21}(s(\omega,t))\big[\chi\prime\lambda l_2\tfrac{\partial l_1}{\partial\omega} - \chi\prime l_2\tfrac{\partial m_1}{\partial\omega} - \chi l_1\tfrac{\partial l_1}{\partial\omega}\big],$$

где функция $\big[\chi\prime\lambda l_2\frac{\partial l_1}{\partial\omega} - \chi\prime l_2\frac{\partial m_1}{\partial\omega} - \chi l_1\frac{\partial l_1}{\partial\omega}\big] \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, следовательно, $d^5_{11}(x,t) \in C^{1+\alpha,\bar{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T)$. Второе утверждение леммы 2 следует из предыдущего утверждения и представления для коэффициентов (23).

Доказательство оценок (25) следует из второго утверждения данной леммы и представления (24). Так, например, покажем справедливость первого неравенства в (25). Имеем

$$\begin{aligned}
&|b_{ij}(x^k,0,0,0) - b_{ij}(x,t,s,s_\omega)| \le |b_{ij}(x^k,0,0,0) - b_{ij}(x,0,0,0)| + \\
&\quad + |b_{ij}(x,0,0,0) - b_{ij}(x,t,0,0)| + |b_{ij}(x,t,0,0) - b_{ij}(x,t,s,0)| + \\
&\quad + |b_{ij}(x,t,s,0) - b_{ij}(x,t,s,s_\omega)| \le \\
&\quad \le c\|s\|_{E^{2+\alpha,1,\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}-1}(\overline{\Gamma}_T)}(\varsigma^{1+\alpha} + T^{\overline{\beta}})\|b_{ij}\|_{C^{1+\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T)}.
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно показать справедливость подобных неравенств для констант Гельдера по x и t, а так же полунорм вида (2) для функции $\{b_{ij}(x^k,0,0,0) - b_{ij}(x,t,s,s_\omega)\}$. Это и завершает доказательство леммы 2. □

Вернемся теперь к рассмотрению задачи (16). Подставим функции (20) в выражения (16) и разложим последние по степеням функций (Θ,σ) и их производных. Тогда с учетом соотношений (16), (21)–(23) получаем:

$$\begin{gathered}
\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}(x,t,s,s_\omega)\Theta_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x,t,s,s_\omega,s_{\omega\omega})\Theta_{x_i} + c_1(x,t)\sigma_\omega + \\
+c_2(x,t)\sigma = c_3(x,t) - \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}(x,t,\sigma,\sigma_\omega)\Theta_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{2} b_i(x,t,\sigma,\sigma_\omega,\sigma_{\omega\omega})\times \\
\times\Theta_{x_i} \equiv F_0(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T; \quad \Theta(x,t) + w_l(x)\sigma(\omega,t)|_{\Gamma_T} = 0, \qquad (26) \\
\mu\sigma_t + a_1(x,t)\Theta_\lambda + a_2(x,t)\sigma_\omega + a_3(x,t)\sigma = a_4(x,t) - \\
-S(\omega,\sigma,\sigma_\omega)\Theta_\lambda \equiv F(x,t), \quad x(\omega)\in\overline{\Gamma}_T; \quad \Theta(x,t)|_{\Gamma^1_T} = 0; \\
\Theta(x,0) = 0, \quad x\in\overline{\Omega}, \sigma(\omega,0) = 0, \quad \sigma_t(\omega,0) = 0, \quad x(\omega)\in\overline{\Gamma}.
\end{gathered}$$

Здесь $c_1(x,t) := c_1(x,t,D_x w, D_x^2 w)$, $c_2(x,t) := c_2(x,t,D_x w, D_x^2 w, D_x^3 w)$, $c_3(x,t) = \sum\limits_{i,j=1}^{2} b_{ij}(x,t,s,s_\omega) w_{x_i x_j} + \sum\limits_{i=1}^{2} b_i(x,t,s,s_\omega,s_{\omega\omega}) w_{x_i}$,

$$a_1(x,t) = S(\omega,s,s_\omega), \quad a_2(x,t) = 2(s_\omega - \cos\varphi)E^{-2}(s)w_\lambda - E^{-2}(s)w_\omega,$$

$$a_3(x,t) = -2(\varphi+\alpha)\prime(\cos\varphi + s_\omega)^2 E^{-3}(s)w_\lambda + 2(\varphi+\alpha)\prime E^{-3}(s)\times$$
$$\times (s_\omega - \cos\varphi)w_\omega + S(\omega,s,s_\omega)\partial d(w,\omega)/\partial l,$$

$$a_4(x,t) = S(\omega,s,s_\omega)w_\lambda + S_1(\omega,s,s_\omega)w_\omega + \mu s_t,$$

здесь $E(s)$ — функция, определенная в (23).

Из представлений (27) и определения функций $s(\omega,t)$ и $w(x)$ следует, что $c_i(x,t) \in C^{\alpha,\bar\beta,\alpha}(\bar\Omega_T)$, $c_i(x,0) = 0$, $i = \overline{1,3}$, $a_j(x,t) \in C^{1+\alpha,\bar\beta,\alpha}(\bar\Gamma_T)$, $j = \overline{1,4}$, $c_i(x,t) = 0$, $(x,t) \in (\overline{\Omega \setminus N}) \times (0,T)$, $i = 1,2$.

3. Исследование линейной задачи: оценки, разрешимость

Пусть $\partial/\partial l$ — производная по направлению вектора $\bar l(\omega)$, заданного соотношениями (7). Предметом наших исследований в этом пункте является линейная краевая задача с переменными коэффициентами, в которой требуется найти функции $\Theta(y,t)$ и $\sigma(\omega,t)$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{gathered}
\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}(y,t)\Theta_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i(y,t)\Theta_{y_i} + c_1(y,t)\sigma_\omega + \\
+c_2(y,t)\sigma = F_0(y,t), \quad (y,t) \in \Omega_T; \\
\sigma_t + a_1(y,t)\Theta_l + a_2(y,t)\sigma_\omega + a_3(y,t)\sigma = F(y,t), (y,t) \in \overline{\Gamma}_T; \\
\Theta(y,t) + w_l(y)\sigma|_{\Gamma_T} = F_1(y,t), \qquad \Theta(y,t)|_{\Gamma_T^1} = F_2(y,t); \\
\Theta(y,0) = 0, \quad y \in \overline{\Omega}, \quad \sigma(\omega,0) = 0, \quad \sigma_t(\omega,0) = 0, \quad y(\omega) \in \overline{\Gamma}.
\end{gathered} \tag{28}$$

Задача (28) является аналогом задачи (26) при $F_i(y,t) = 0$, $i = 1,2$, если в правых частях последней заморозить функциональные аргументы. Таким образом, в задаче (28) будем предполагать такую же гладкость коэффициентов, что и в задаче (26). Однако, задачу (28) будем рассматривать при более слабых требованиях относительно гладкости границ Σ, Γ^1.

Пусть $\theta \in (0,\pi/3)$, $\gamma = \frac{\pi}{\theta} - 2$, $\kappa = [\gamma] + a$, $-1 < a < \{\gamma\}$, где $[\gamma]$ — целая часть числа $\gamma, \gamma = [\gamma] + \{\gamma\}$, и выполнены следующие условия на коэффициенты и данные задачи (28):

1. $\Sigma, \Gamma^1 \in C^{2+\alpha}, \quad \sigma = \{(y_1, y_2) : y_2 = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}|y_1|, y_1 \in [-\gamma_2, \gamma_2]\}$;
2. $a_i(y,t) \in C^{1+\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Gamma}_T), \quad i = \overline{1,3}; \qquad a_1(\omega, 0) = 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi$;
3. $b_{ij}(y,t) \in C^{1+\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T), \quad b_i(y,t) \in C^{\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T), \quad i,j = 1,2$; $b_{ij}(y,0) = \delta^i_j, \quad c_i(y,0) = b_i(y,0) = 0$, где δ^i_j — символ Кронекера, $\alpha \in (0,1), \quad 0 < \beta < \overline{\beta} < 1$;
4. $w(y) \in E^{3+\alpha}_{\gamma+2}(\overline{\Omega})$, $w(y) = \pm\chi(r) r^{\gamma+2} \cos(\frac{\pi}{\theta}(\frac{\pi}{2} - \varphi)) + v(y)$, $v(y) \in E^{3+\alpha}_{\gamma+3}(\overline{\Omega})$, $w_l(y) \neq 0$, $y \in \Sigma$, $\quad 0 < \chi(r) < 1$, $\chi(r) = 0$, $y \notin B_{\frac{\gamma_0}{2}}$, $\chi(r) = 1$, $y \in B_{\frac{\gamma_0}{4}}$, где $B_{\frac{\gamma_0}{2}}(B_{\frac{\gamma_0}{4}})$ — шар с центром в начале координат, радиуса $\gamma_0/2$ $(\gamma_0/4)$;
5. $$\begin{gathered} F_0(y,t) \in E^{\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa-1,0}(\overline{\Omega}_T), \quad F(y,t) \in E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa,0}(\overline{\Gamma}_T), \\ F_1(y,t) \in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1,0}(\overline{\Gamma}_T), \quad F_2(y,t) \in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1,0}(\overline{\Gamma}^1_T). \end{gathered} \tag{29}$$

Для функций $F_0(y,t)$ и $F_2(y,t)$ справедливы представления:

$$\begin{aligned} F_0(y,t) &= F_{01}(y,t)F_{02}(y,t) + F^*_{01}(y,t)F^*_{02}(y), \\ F_2(y,t) &= F_{21}(y,t)F_{22}(y,t) + F^*_{21}(y,t)F^*_{22}(y), \end{aligned}$$

где $F_{01}(y,t) \in C^{\alpha,\beta,\alpha}_0(\overline{\Omega}_T)$, $F^*_{01}(y,t) \in C^{\alpha,\overline{\beta},\alpha}_0(\overline{\Omega}_T)$, $F_{02}(y,t) \in E^{\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa-1,0}(\overline{\Omega}_T)$, $F^*_{02}(y) \in E^{\alpha}_{\kappa-1}(\overline{\Omega})$, $F_{21}(y,t) \in C^{2+\alpha,\beta,\alpha}_0(\overline{\Gamma}^1_T)$, $F^*_{22}(y) \in E^{2+\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}^1)$, $F_{22}(y,t) \in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1,0}(\overline{\Gamma}^1_T)$, $F^*_{21}(y,t) \in C^{2+\alpha,\overline{\beta},\alpha}_0(\overline{\Gamma}^1_T)$. Такое представление для правых частей в (28) является следствием линеаризации исходной нелинейной задачи Hele-Shaw в предположении существования решения в классах $\Theta(y,t) \in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Omega}_T)$, $\sigma_t(\omega,t) \in E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa}(\overline{\Gamma}_T,)$ $\quad \sigma(\omega,t) r^{\gamma+1} \in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}_T)$. Для задачи (28) справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Задача* (28) *при* $T \le T_0$ *имеет единственное решение* $\Theta(y,t)$, $\sigma(\omega,t)$, *где* T_0 *зависит от коэффициентов задачи и не зависит от правых частей, такое, что* $\Theta(y,t) \in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Omega}_T)$, $r^{\gamma+1}\sigma(\omega,t) \in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}_T)$, $\sigma_t(\omega,t) \in E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa,0}(\overline{\Gamma}_T)$, *и справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|\Theta\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Omega}_T)} &+ \left\|\sigma r^{\gamma+1}\right\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}_T)} + \|\sigma_t\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa}(\overline{\Gamma}_T)} \le \\ &\le c(\|F\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa}(\overline{\Gamma}_T)} + \|F_1\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}_T)} + \|F_2\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}^1_T)} + \\ &\qquad + \|F_0\|_{E^{\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa-1}(\overline{\Omega}_T)} + C_1(F_0) + C_1(F_2)), \end{aligned} \tag{30}$$

где c — положительная постоянная, которая зависит от коэффициентов соотношений (28) *и гладкости кривых* Γ *и* Γ^1, *константы*

$C_1(F_0)$ и $C_1(F_2)$ зависят от норм функций $F_{ij}(y,t)$, $F^*_{i1}(y,t)$, $F^*_{i2}(y)$, $i=0,2$, $j=1,2$, так что

$$C_1(F_0) := \|F_{01}\|_{C^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Omega}_T)}\,\|F_{02}\|_{E^{\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa-1}(\overline{\Omega}_T)} + \|F^*_{01}\|_{C^{\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T)}\,\|F^*_{02}\|_{E^{\alpha}_{\kappa-1}(\overline{\Omega})}, \tag{31}$$

аналогичное соотношение справедливо и для $C_1(F_2)$.

Доказательство теоремы 3 подробно изложено в работе [19]. Здесь только напомним, что обратный оператор в задаче (28) строится с помощью разбиения единицы в Ω и регуляризатора по некоторой совокупности модельных задач, которые фактически получаются из (28) удерживанием старших членов и замораживанием коэффициентов в некоторой точке $y^k \in \overline{\Omega}, t=0$ (см. [15, гл. 4]). Центральной в этом построении является модельная задача в плоском угле следующего вида:

$$\begin{gathered}
\Delta_y u = f_0, \quad (y,t)\in G_T; \quad u(y,0)=0, \quad y\in\overline{G},\\
\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y_2=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(y,0)=0, \quad y\in\overline{g},\\
r^{1-\frac{\pi}{\omega}}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial r} = f(y_1,t), \quad (y,t)\in\overline{g}_T,
\end{gathered} \tag{32}$$

где Δ_y — оператор Лапласа по переменным (y_1,y_2), $h=-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2})$, $f_0(y,t)$, $f(y,t)$ — заданные функции, $f_0(y,0)=0$, $y\in\overline{G}$, $f(y,0)=0$, $y\in\overline{g}$, угол G и его граница g определяются соотношениями (4), в которых следует заменить угол θ на угол $\omega\in(0,\pi)$.

Ранее задача (32) без сингулярного множителя при производной по времени в граничном условии исследовалась в работах В. А. Солонникова и Е. В. Фроловой [20,21] в весовых классах Соболева. Вопрос о разрешимости такой задачи и получение соответствующих коэрцитивных оценок в весовых пространствах Гельдера $E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s$ изучен в работах [22, 23]. Для решения задачи (32) имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $\omega\in(0,\pi/2)$, $\gamma=\frac{\pi}{\omega}-2$, $\kappa=[\gamma]+a_1$, $-1<a_1<\{\gamma\}$, $\alpha,\beta\in(0,1)$, $f_0(y,t)\in E^{\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa-1}(\overline{G}_T)$, $f(y,t)\in E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa}(\overline{g}_T)$. Тогда существует единственное решение задачи (31) $u(y,t)\in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{G}_T)$, для которого справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{G}_T)} + \left\|u_t r^{-(\gamma+1)}\right\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa}(\overline{g}_T)} \le\\
&\qquad\qquad \le c_1(\|f_0\|_{E^{\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa-1}(\overline{G}_T)} + \|f\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa}(\overline{g}_T)}).
\end{aligned} \tag{33}$$

Если же дополнительно для функции $f_0(y,t)$ справедливо представление

$$f_0(y,t) = f_{01}(y,t)f_{02}(y,t) + f^*_{01}(y,t)f^*_{02}(y),$$

где $f_{01}(y,t) \in C_0^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)$, $f_{01}^*(y,t) \in C_0^{\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{G}_T)$, $f_{02}^*(y) \in E_{\kappa-1}^{\alpha}(\overline{G})$, $f_{02}(y,t) \in E_{\kappa-1,0}^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)$, $1 > \bar\beta > \beta > 0$, *и функция* $f(y_1,t)$ *финитна с носителем в шаре* $B_d(0) = \{y_1 : |y_1| < d\}$, *тогда имеет место оценка:*

$$\|u\|_{E_{\kappa+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)} \le c_2 T^{\delta_1}(C(f_0) + d^{\beta\gamma}\|f\|_{E_{\kappa}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T)}), \delta_1 = \min(\beta, \bar\beta - \beta),$$

здесь c_i, $i = 1,2$, *положительные постоянные, величина* $C(f_0)$ *определяется соотношением типа* (31).

Доказательство теоремы 4 изложено в работах [22, 23], поэтому здесь мы только лишь напомним основные этапы. Отметим, что при доказательстве теоремы 4 существенно используется эквивалентное определение пространств $E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}$ (см. определение 1), поскольку с помощью стандартного преобразования: $r = e^{-x_1}$, $\varphi = x_2$, задача (32) сводится к изучению аналогичной задачи в полосе. Далее, с помощью преобразований Фурье по пространственной переменной x_2 и Лапласа по временной исследование задачи (32) редуцируется к исследованию конечно-разностного уравнения специального вида, которое изучено в [20, 21]. Используя результаты этих работ, строится интегральное представление для решения. На следующем этапе получаются соответствующие оценки самого решения и его производных.

Отметим, что теорема 3 остается в силе и для областей более общего вида. А именно, рассмотрим задачу (28) в области Ω с участком границы σ, определяемым уравнением типа (11) с четной функцией $\psi(y_1) : \psi(y_1) \in C^{3+\alpha}(-\gamma_2, \gamma_2)$, $\psi(0) = \psi\prime(0) = 0$. Из определения функции $\psi(y_1)$ следует, что $\psi(y_1) \sim |y_1|^{1+\delta}$, $\delta > 0$ при $|y_1| \to 0$.

Пусть $B_d(0)$ — шар с центром в начале координат и радиуса d, $0 < d \le \min(1/3, \gamma_2)$. Определим функцию $\widetilde{\chi}(|y|) \in C_0^\infty(R^1) : 0 \le \widetilde{\chi}(|y|) \le 1$; $\widetilde{\chi}(|y|) = 1$, $y \in \overline{B_d(0) \bigcap \Omega}$; $\widetilde{\chi}(|y|) = 0$, $y \notin \overline{B_{2d}(0) \bigcap \Omega}$; $\widetilde{\chi}\prime(|y|) \le c/d$. В задаче (28) сделаем замену переменных:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 - \widetilde{\chi}(|y|)\psi(y_1). \tag{34}$$

При таком преобразовании область Ω перейдет в область $\widetilde{\Omega}$ с прямолинейными участками границы в окрестности угловой точки. Граница Γ перейдет в $\widetilde{\Gamma}$, так что часть границы Γ в окрестности угловой точки перейдет в $\{(x_1,x_2) : x_2 = |x_1|\operatorname{ctg}(\theta/2),\ x_1 \in [-d,d]\}$. Задача (28) перейдет в задачу о нахождении функций $\Theta(y(x),t)$, $\sigma(y(x),t)$ по условиям (здесь мы сохранили старые обозначения за искомыми функциями):

$$\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{b}_{ij}(x,t)\Theta_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} \tilde{b}_i(x,t)\Theta_{x_i} + \tilde{c}_1(x,t)\sigma_\omega +$$
$$+\tilde{c}_2(x,t)\sigma = \tilde{F}_0(x,t), (x,t) \in \widetilde{\Omega}_T;$$
$$\sigma_t + \tilde{a}_1(x,t)\Theta_l + \tilde{a}_2(x,t)\sigma_\omega + \tilde{a}_3(x,t)\sigma = \tilde{F}(x,t), (x,t) \in \overline{\widetilde{\Gamma}}_T; \tag{35}$$
$$\Theta(x,t) + w_l(x)\sigma|_{\widetilde{\Gamma}_T} = \tilde{F}_1(x,t), \quad \Theta(x,t)|_{\widetilde{\Gamma}^1_T} = \tilde{F}_2(x,t);$$
$$\Theta(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\widetilde{\Omega}}, \quad \sigma(\omega,0) = 0, \quad \sigma_t(\omega,0) = 0, \quad x(\omega) \in \overline{\widetilde{\Gamma}}.$$

Для коэффициентов задачи (35) справедливы представления:

$$\tilde{b}_{ij}(x,t) = b_{ij}(x,t)[1 + a_{ij}(x)], \ i,j = 1,2, \quad \tilde{b}_1(x,t) = b_1(x,t),$$
$$\tilde{b}_2(x,t) = b_2(x,t)[1 + a_2(x)] + b_{11}(x,t)a_3(x)+$$
$$+ b_{22}(x,t)a_4(x) + 2b_{12}(x,t)a_5(x),$$
$$\tilde{c}_1(x,t) = c_1(x,t)[1 + d_1(x,t)], \quad \tilde{a}_1(x,t) = a_1(x,t)[1 + d_2(x,t)],$$
$$\tilde{a}_2(x,t) = a_2(x,t)[1 + d_3(x,t)], \quad \tilde{c}_2(x,t) = c_2(x,t), \quad \tilde{a}_3(x,t) = a_3(x,t),$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$, $i,j = 1,2$, $a_2(x)$ определены в лемме П.2 (см. приложение). Так же как и в лемме П.2 можно показать справедливость неравенства

$$\sum_{ij=1}^{2} \|a_{ij}(x)\|_{C^\alpha(\widetilde{\Omega})} + \|a_2(x)|x|\|_{C^\alpha(\widetilde{\Omega})} + \sum_{i=3}^{5} \|a_i(x)\|_{C^\alpha(\widetilde{\Omega})} +$$
$$+ \sum_{ij=1}^{3} \|d_{ij}(x,t)\|_{C^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\widetilde{\Gamma}_T)} < \varepsilon, \tag{36}$$

где постоянная $\varepsilon < 1$ и зависит от d, $\sin(\theta/2)$, δ, α. Отметим, что при преобразовании (34) соответствующие нормы в областях $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Gamma}$ и Ω, Γ эквивалентны. Наконец, из результатов теоремы 3, леммы П.3, оценки (36) и принципа сжатых отображений получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть участок границы σ определяется уравнением* (11), *выполнены указанные выше условия на функцию $\psi(y_1)$ и или*

a) $0 < \alpha < \delta < 1$, *или*

b) $\delta > 1$, $\alpha \in (0,1)$,

коэффициенты и правые части задачи (28) *удовлетворяют условиям теоремы* 3, *тогда существует единственное решение задачи* (28) *для* $\forall\, t \in [0, T_0]$, *для которого справедлива оценка* (30).

4. Доказательство разрешимости нелинейной задачи

Для завершения доказательства теоремы 1 вернемся к рассмотрению нелинейной задачи (26). Пусть H_Ψ пространство элементов $\Psi = (\Theta, \sigma)$ с нормой

$$\|\Psi\|_{H_\Psi} = \|\Theta\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Omega}_T)} + \left\|\sigma r^{\gamma+1}\right\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}_T)} + \|\sigma_t\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa}(\overline{\Gamma}_T)}.$$

Введем также пространство H_h с элементами $h = (F_0, F)$ и нормой

$$\|h\|_{H_h} = \|F_0\|_{E^{\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa-1}(\overline{\Omega}_T)} + \|F\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa}(\overline{\Gamma}_T)}.$$

В рамках введенных обозначений задачу (26) можно записать в виде

$$A\Psi = f(x,t) + F_1(\Psi), \tag{37}$$

где A — линейный оператор, определяемый левыми частями соотношений (26), $A : H_\Psi \to H_h$, вектор $f(x,t)$ строится только по начальным условиям, $F_1(\Psi)$ содержит элементы Ψ, начиная с квадратичных членов.

Поскольку оператор A удовлетворяет условиям теоремы 3, то нелинейную задачу (37) можно записать в виде:

$$\Psi = A^{-1}f(x,t) + A^{-1}F_1(\Psi) \equiv P(\Psi).$$

Очевидно, что неподвижная точка нелинейного оператора $P(\Psi)$ дает решение исходной задачи.

Лемма 3. *Пусть B_d — шар радиуса d с центром в нуле, $B_d \subset H_\Psi$. При $\Psi \in B_d$ имеют место оценки:*

$$\|F_1(0)\|_{H_h} \le c(w(x), s(\omega,t))T^{\overline{\beta}-\beta}, \tag{38}$$

$$\|F_1(\Psi_1) - F_1(\Psi_2)\|_{H_h} \le c(w(x), s(\omega,t))d\|\Psi_1 - \Psi_2\|_{H_\Psi}, \tag{39}$$

где $c(w(x), s(\omega,t))$ — постоянная, зависящая от норм функций $w(x)$, $s(\omega,t)$, и

$$\|\Psi_1 - \Psi_2\|_{H_\Psi} = \|\Theta_1 - \Theta_2\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Omega}_T)} + \left\|(\sigma_1 - \sigma_2)r^{\gamma+1}\right\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}_T)} + \\ + \|(\sigma_1 - \sigma_2)_t\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa}(\overline{\Gamma}_T)}.$$

Доказательство. Оценка (38) следует из представления для $F_1(\Psi)$ (см. (26)) и более высокой гладкости по t элемента $f(x,t)$, который определяется функциями $w(x)$ и $s(\omega,t)$. При доказательстве оценки (39) нам потребуются следующие свойства весовых пространств, которые следуют непосредственно из определений классов $E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s$ и $C^{k+\alpha,\beta,\delta}$.

Предложение 1. *Пусть* Ω *— ограниченная область в* R^n, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\alpha, \beta \in (0,1)$ $s > 0$, k *— целое неотрицательное, тогда:*

1) *если граница области* $\partial\Omega \in C^1$, *то существуют такие положительные постоянные* c_i, $i = 1,2$, *что выполняется неравенство*

$$c_1\|v\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq \|v\|_{C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq c_2\|v\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)};$$

2) *если же* $n = 2$ *и* $\partial\Omega = \Sigma\bigcup\sigma$, $\Sigma \in C^1$, $\sigma = \{(y_1,y_2) : y_2 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}|y_1|, \ y_1 \in [-a,a]\}$, *тогда существуют положительные постоянные* c_i, $i = \overline{3,5}$, *такие, что справедливы неравенства*

$$\|v\|_{C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq c_3\|v\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)},$$

$$c_4\|v\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega'}_T)} \leq \|v\|_{C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega'}_T)} \leq c_5\|v\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega'}_T)},$$

где $\Omega' \subset \Omega$, $\operatorname{dist}(\partial\Omega', 0) \geq \delta > 0$.

Предложение 2. *Пусть* Ω *— ограниченная область в* R^n, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\alpha, \beta \in (0,1)$ $s > 0$, k *— целое неотрицательное.*

1) *Пусть* $\Psi(x,t) \in E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)$ *и* $\Phi(x,t) \in C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)$, *тогда*

$$\|\Psi\Phi\|_{E_s^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq c_1\|\Psi\|_{E_s^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}\|\Phi\|_{C^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)},$$

$$\begin{aligned}\|\Psi\Phi\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq c_1(&\|\Psi\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}\|\Phi\|_{C^{k-1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}+\\ &+\|\Psi\|_{E_s^{k-1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}\|\Phi\|_{C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}), \quad k \neq 0.\end{aligned}$$

2) *Пусть* $\Psi(x,t), \quad \Phi(x,t) \in E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)$, *тогда*

$$\begin{aligned}\|\Psi\Phi\|_{E_s^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} &\leq c_2\|\Psi\|_{E_s^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}\|\Phi\|_{C^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq\\ &\leq c_3\|\Psi\|_{E_s^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}\|\Phi\|_{E_s^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\Psi\Phi\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq c_4(&\|\Psi\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}\|\Phi\|_{E_s^{k-1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}+\\ &+\|\Psi\|_{E_s^{k-1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}\|\Phi\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}) \leq\\ &\leq c_5\|\Psi\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}\|\Phi\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}, \quad k \neq 0,\end{aligned}$$

здесь c_i,$i = \overline{1,5}$, *— положительные постоянные.*

Предложение 3. *Пусть функции* $\Psi(y,t)$ *и* $\Psi_t(y,t)$ *определены в ограниченной области* $\overline{\Omega}_T$, $\Psi_t(y,t) \in E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)$ *и* $D_t^m\Psi_t(y,0) = 0$, $y \in \overline{\Omega}$, $m = 0,1$, *тогда* $\Psi(y,t) \in E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)$ *и справедливы неравенства:*

$$\|\Psi\|_{E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq c_1T\|\Psi_t\|_{E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)},$$

$$\|\Psi\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq c_2d^{1-\alpha}T^{1-\beta}\|\Psi_t\|_{E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)},$$

где c_i, $i = 1,2$ *— положительные постоянные,* $d = \operatorname{diam}\Omega$.

Вернемся к доказательству неравенства (39). Отметим, что оно есть следствием того обстоятельства, что $F_1(\Psi)$ не содержит линейных слагаемых относительно Ψ. Таким образом, используя представления (26) и (23), оценку (30) с $F_i(y,t)=0,\ i=1,2$, и результаты предложений 1–3, можно показать справедливость неравенства (39). Так, например, имеем

$$\begin{aligned}
&\left\|D^1_{ij}(x,t)\sigma_1\Theta_{1x_ix_j} - D^1_{ij}(x,t)\sigma_2\Theta_{2x_ix_j}\right\|_{E^{\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa-1}(\overline{\Omega}_T)} \le \\
&\quad\le c\left\|D^1_{ij}(x,t)\right\|_{C^{\alpha,\overline{\beta},\alpha}(\overline{\Omega}_T)}\Big(\left\|(\sigma_1-\sigma_2)r^{\gamma+1}\right\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}_T)}\times \\
&\qquad\times\left\|\Theta_1\right\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Omega}_T)} + \left\|\Theta_{1x_ix_j}-\Theta_{2x_ix_j}\right\|_{E^{\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa-1}(\overline{\Omega}_T)}\times \\
&\qquad\times\left\|\sigma_2 r^{\gamma+1}\right\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{\kappa+1}(\overline{\Gamma}_T)}\Big) \le Tdc(w(x),s(\omega,t))\|\Psi_1-\Psi_2\|_{H_\Psi}.
\end{aligned}$$

Для остальных слагаемых оценки получаются аналогично, это и завершает доказательство леммы. □

Таким образом, вследствие оценок (38) и (39) и ограниченности оператора A^{-1}, отображение P переводит B_d в себя и при достаточно малых d и T является сжимающим. Справедливость теоремы 1 следует тогда из принципа сжимающих отображений.

Отметим, что доказательства теоремы 2 полностью повторяет доказательство теоремы 1. Единственное отличие будет состоять в том, что при доказательстве разрешимости нелинейной задачи (26) (см. лемму 3) вместо теоремы 3 используется теорема 5.

Из теорем 1, 2 и 4 следует, что для функции $\rho(y_1,t)$ из задачи (5) справедлива оценка с ограниченной постоянной $c(T)$:

$$|\rho_{y_1}(y_1,t)| \le c(T)|y_1|^{[\gamma]+a_1+\delta\gamma-1-\gamma}.$$

Из которой следует, что при $\theta<\pi/3$, $\rho_{y_1}(y_1,t)\to 0$, когда $y_1\to 0$. Это означает, что геометрия угла в задаче Hele-Shaw в этом случае не разрушается. Более того, т.к. $\rho_t\in E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_\kappa(\overline{\Gamma}_t)$, $\forall\, t\in(0,T_0)$, то в случае углов $\theta<\pi/3$ имеем $\rho_t(y_1,t)\to 0$ при $y_1\to 0$, $t\in(0,T_1)$, $T_1<T_0$, а это означает, что в течении некоторого времени угловая точка остается неподвижной.

Приложение

В этом пункте получим асимптотическое представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области с угловой точкой в весовых классах с нормой, заданной соотношением (3).

Пусть $\Omega_0 := \Omega$ — заданная ограниченная область в R^2, симметричная относительно оси oy_2, граница которой состоит из двух непересекающихся компонентов Γ и Γ^1 ($\Gamma^1 \in C^{3+\alpha}$), причем Γ^1 лежит внутри ограниченной области Ω, границей которой является Γ. Граница Γ состоит из двух частей: $\Gamma = \Sigma \bigcup \sigma$, где Σ — гладкая часть границы Γ ($\Sigma \in C^{3+\alpha}$), а σ — часть границы Γ, состоящая из прямолинейных отрезков, образующих угол θ с вершиной в начале координат, ось oy_2 является биссектрисой этого угла: $\sigma = \{(y_1, y_2) : y_2 = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} |y_1|,\ y_1 \in [-a, a]\}$, a — заданное положительное число. Рассмотрим задачу о нахождении функции $w(y)$ по условиям

$$\Delta_y w = 0, \quad y \in \Omega, \quad w|_{\Gamma^1} = 1, \qquad w|_{\Gamma} = 0. \tag{П.1}$$

В монографии [24, гл. 6] доказана однозначная разрешимость задачи (П.1) в обычных классах Гельдера $C^{2+\alpha}$ при $\theta \in (0, \pi/3)$. В работе [25, гл. 1] получено асимптотическое представление решения этой задачи в случае весовых классов Соболева. Нас же в дальнейшем будет интересовать асимптотическое представление решения $w(y)$ в классе $E_s^{k+\alpha}$.

Пусть r, ϕ — полярная система координат на плоскости (y_1, y_2), $r = (y_1 + y_2)^{1/2}$, $\chi(r)$ — срезающая функция: $\chi(r) \in C^\infty(0, +\infty)$; $\chi(r) = 0,\ \ r > a$; $\chi(r) = 1$, $r < a/2$. Решение задачи (П.1) будем искать в виде

$$w(y) = \chi(r) r^{\pi/\theta} \sin \frac{\pi}{\theta}(\phi - \phi_0) + v(y), \quad \phi_0 = \frac{\pi - \theta}{2}. \tag{П.2}$$

Первое слагаемое в представлении (П.2) принадлежит классу $E^{3+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}}(\overline{\Omega})$. Подставим представление (П.2) в соотношения (П.1), получим

$$\Delta_y v = f(y(r, \phi)), \quad y \in \Omega, \quad v|_{\Gamma^1} = 1, \qquad v|_{\Gamma} = 0, \tag{П.3}$$

здесь $f(y(r, \phi)) = -r^{\pi/\theta} \sin \frac{\pi}{\theta}(\phi - \phi_0) \Delta_y \chi(r) - \sum\limits_{i,j=1}^{2} \chi_{y_i}(r) \frac{\partial}{\partial y_j}(r^{\pi/\theta} \sin \frac{\pi}{\theta} \times$ $\times (\phi - \phi_0))$. Из представления для функции $f(y(r, \phi))$ следует, что $f(y(r, \phi)) \in E^{1+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}-2}(\overline{\Omega})$. Кроме того, поскольку слагаемые, входящие в определение функции $f(y(r, \phi))$, финитны, то из результатов предложения 1 следует принадлежность этой функции к пространству $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. Применение результатов монографии [24, гл. 6, теорема 6.4.2.5] к задаче (П.3) позволяет показать справедливость вложения: $v(y) \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$. Покажем, что на самом деле имеет место вложение: $v(y) \in E^{3+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}+1}(\overline{\Omega})$.

Пусть λ — достаточно малое число: $0 < \varepsilon < \lambda < a/2$, и $B_\lambda(0)$ — шар с центром в нуле и радиуса λ, $\Omega_0 = \Omega \bigcap B_\lambda(0)$, $\Gamma_0 = \Gamma \bigcap B_\lambda(0)$.

Введем функцию $\xi_0(y) \in C^\infty(R^2) : 0 \le \xi_0(y) \le 1$, $\xi_0(y) = 1$, $y \in B_{\lambda/2}(0)$, $\xi_0(y) = 0$, $y \in R^2 \backslash B_\lambda(0)$, $|D_y \xi_0| \le c/\lambda$.

Поскольку задача (П.3) инвариантна относительно поворота, то совершая поворот системы координат на угол $\pi/2$ и умножая соотношения в (П.3) на $\xi_0(y)$, для функции $u_0(y) = \xi_0(y)v(y)$ получаем задачу

$$\begin{gathered}\Delta_y u_0 = f\xi_0 - 2\nabla_y \xi_0 \nabla_y v - v\Delta_y \xi_0 \equiv F_0, \quad y \in G,\\ u_0|_g = 0, \quad \partial u_0/\partial y_2|_{y_2=0} = 0.\end{gathered} \tag{П.4}$$

Здесь мы сохранили старые обозначения за функцией и переменными, угол G и его граница g задаются соотношениями (4). Делая замену переменных: $r = e^{-y_1}$, $\phi = y_2$, в соотношениях (П.4), а затем, используя результаты работы [24, гл. 6, теорема 6.4.1.1], получим

$$\|u_0\|_{E^{2+\alpha}_{1+\pi/\theta}(\overline{\Omega}_0)} \le c\|F_0\|_{E^{\alpha}_{\pi/\theta-2}(\overline{\Omega}_0)}. \tag{П.5}$$

Возвращаясь к определению функции $F_0(y)$, имеем

$$\begin{aligned}\|F_0\|_{E^{\alpha}_{\pi/\theta-2}(\overline{\Omega}_0)} \le c[\|f\xi_0\|_{E^{\alpha}_{\pi/\theta-2}(\overline{\Omega}_0)} + \|\nabla_y v\nabla_y \xi_0\|_{E^{\alpha}_{\pi/\theta-2}(\overline{\Omega}_0)} +\\ + \|v\Delta_y \xi_0\|_{E^{\alpha}_{\pi/\theta-2}(\overline{\Omega}_0)}].\end{aligned} \tag{П.6}$$

Очевидно, что

$$\|f\xi_0\|_{E^{\alpha}_{\pi/\theta-2}(\overline{\Omega}_0)} \le c\|f\|_{E^{\alpha}_{\pi/\theta-2}(\overline{\Omega}_0)}. \tag{П.7}$$

Получим оценку второго слагаемого в правой части неравенства (П.6), оценка для третьего слагаемого получается аналогично. Имеем:

$$\begin{aligned}\sup_{\overline{\Omega}_0} r^{2-\frac{\pi}{\theta}+\alpha}|D^l_y \xi_0(y)|\frac{|D^l_y v(y) - D^l_x v(x)|}{|x-y|^\alpha} \le \frac{\widetilde{c}}{\lambda}\sup_{\overline{\Omega}_0} r^{1-\frac{\pi}{\theta}}|D^{l+1}_y v(y)|r^2 \le\\ \le c\lambda\|v\|_{E^{2+\alpha}_{1+\frac{\pi}{\theta}}(\overline{\Omega}_0)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{\overline{\Omega}_0} r^{2-\frac{\pi}{\theta}+\alpha}|D^l_y v(y)|\frac{|D^l_y \xi_0(y) - D^l_x \xi_0(x)|}{|x-y|^\alpha} \le\\ \le \frac{\widetilde{c}}{\lambda^{1+\alpha}}\sup_{\overline{\Omega}_0} r^{-\frac{\pi}{\theta}}|D^l_y v(y)|r^{2+\alpha} \le c\lambda\|v\|_{E^{2+\alpha}_{1+\frac{\pi}{\theta}}(\overline{\Omega}_0)},\end{aligned}$$

$$\sup_{\overline{\Omega}_0} r^{2-\frac{\pi}{\theta}+\alpha}|D^l_y v(y)||D^l_y \xi_0(y)| \le \frac{\widetilde{c}}{\lambda}\sup_{\overline{\Omega}_0} r^{-\frac{\pi}{\theta}}|D^l_y v(y)|r^2 \le c\lambda\|v\|_{E^{2+\alpha}_{1+\frac{\pi}{\theta}}(\overline{\Omega}_0)}.$$

Из полученных оценок следует справедливость неравенства

$$\|\nabla_y \xi_0 \nabla_y v\|_{E^{\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}-2}(\overline{\Omega}_0)} \leq c\lambda \|v\|_{E^{2+\alpha}_{1+\frac{\pi}{\theta}}(\overline{\Omega}_0)}. \tag{П.8}$$

Из оценок (П.5–П.8) получаем

$$\|u_0\|_{E^{2+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}+1}(\overline{\Omega}_0)} \leq c\big(\lambda \|v\|_{E^{2+\alpha}_{1+\frac{\pi}{\theta}}(\overline{\Omega}_0)} + \|f\|_{E^{\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}-2}(\overline{\Omega})}\big). \tag{П.9}$$

Пусть теперь $\xi_k \in C^\infty(R^2) : 0 \leq \xi_k \leq 1$, $\xi_k(y) = 0$, $y \in R^2 \backslash B_\lambda(y_k)$, $\xi_k(y) = 1$, $y \in B_{\lambda/2}(y_k)$, $k = \overline{1, N}$, где $B_\lambda(y_k) = \{y \in R^2, \quad y_k \in \overline{\Omega} : |y - y_k| < \lambda\}$, $\Omega_k = \Omega \bigcap B_\lambda(y_k)$, $\Gamma_k = \Gamma \bigcap B_\lambda(y_k)$. Рассмотрим семейство функций $u_k(y) = \xi_k(y) v(y)$, $v(y) = \sum\limits_{k=0}^{N} u_k(y)$. Применение результатов работы [16, гл. 3] к функции u_k, $k \neq 0$, позволяет получить следующий результат:

$$\|u_k\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_k)} \leq c(\lambda, \varepsilon)\|v\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_k)} + c\|f\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}, \tag{П.10}$$

где $c(\lambda, \varepsilon) \ll 1$, при достаточно малых λ и ε. Наконец, из оценок (П.9), (П.10) и результатов предложения 1 (см. пункт 5)следует неравенство

$$\|v\|_{E^{2+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}+1}(\overline{\Omega})} \leq c\|f\|_{E^{\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}-2}(\overline{\Omega})}. \tag{П.11}$$

Поскольку $f(y(r, \phi)) \in E^{1+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}-2}(\overline{\Omega})$, то дифференцируя соотношения в (П.3) и повторяя приведенные выше рассуждения, получаем:

$$\|v\|_{E^{3+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}+1}(\overline{\Omega})} \leq c\|f\|_{E^{1+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}-2}(\overline{\Omega})}.$$

Таким образом, для решения задачи (П.3) справедливо утверждение.

Лемма П.1. *Пусть* $\theta \in (0, \pi/3), \alpha \in (0, 1)$ *и выполнены предположения на данные задачи* (П.1), *тогда существует единственное решение задачи* $w(y) \in E^{3+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}}(\overline{\Omega})$, *для которого справедливо представление* (П.2) *с функцией* $v(y) \in E^{3+\alpha}_{\frac{\pi}{\theta}+1}(\overline{\Omega})$.

Заметим, что результаты леммы П.1 могут быть распространены на области с угловыми точками более общего вида. Рассмотрим задачу (П.1) в ограниченной области $\widetilde{\Omega}$, которая отличается от области Ω только лишь участком границы $\widetilde{\sigma}$ $(\partial\widetilde{\Omega} = \Gamma^1 \bigcup \widetilde{\Gamma},\ \widetilde{\Gamma} = \Sigma \bigcup \widetilde{\sigma})$:

$$\widetilde{\sigma} = \{(y_1, y_2) : \quad y_2 = \mathrm{ctg}(\theta/2)|y_1| + \psi(y_1), \quad y_1 \in [-a, a]\}, \tag{П.12}$$

где функция $\psi(y_1)$ — четная, $\psi(y_1) \in C^{3+\alpha}(-a, a)$, $\psi(0) = \psi\prime(0) = 0$. Из определения функции $\psi(y_1)$ следует, что $\psi(y_1) \sim |y_1|^{1+\delta}$, $\delta > 0$ при $|y_1| \to 0$.

Пусть $B_d(0)$ — шар с центром в начале координат и радиуса d, $0 < d \le \min(1/3, a)$. Определим функцию $\widetilde{\chi}(|y|) \in C_0^\infty(R^1) : 0 \le \widetilde{\chi}(|y|) \le 1$; $\widetilde{\chi}(|y|) = 1$, $y \in \overline{B_d(0) \bigcap \Omega}$; $\widetilde{\chi}(|y|) = 0$, $y \notin \overline{B_{2d}(0) \bigcap \Omega}$; $\widetilde{\chi}\prime(|y|) \le c/d$. В задаче (П.1) сделаем замену переменных:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 - \widetilde{\chi}(|y|)\psi(y_1). \tag{П.13}$$

При таком преобразовании область $\widetilde{\Omega}$ перейдет в область Ω с прямолинейными участками границы в окрестности угловой точки, а часть границы $\widetilde{\sigma}$ в окрестности угловой точки перейдет в $\{(x_1, x_2) : \quad x_2 = |x_1| \operatorname{ctg}(\theta/2), \quad x_1 \in [-d, d]\}$. Остальные точки области $\overline{\widetilde{\Omega} \backslash B_{2d}(0)}$ при преобразовании (П.13) перейдут в себя. Обозначим через σ и Γ соответствующие точки $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\Gamma}$ при преобразовании (П.13). Функция $\widetilde{\chi}(|y|)$ перейдет в срезающую функцию $\chi(|x|) \in C_0^\infty(R^1) : 0 \le \chi(|x|) \le 1$; $\chi(|x|) = 1$, $x \in \overline{B_{d\varepsilon}(0) \bigcap \Omega}$; $\chi(|x|) = 0$, $x \notin \overline{B_{2d\varepsilon}(0) \bigcap \Omega}$; $\chi\prime(|x|) \le \tilde{c}/\varepsilon d$, $\varepsilon \in (\sin(\theta/2)(1 + \sin^2(\theta/2) + \sin\theta)^{-1}; \sin(\theta/2))$.

В новых переменных задача (П.1) примет вид:

$$\begin{gathered} \Delta_x w + a(x) w_{x_2 x_2} - 2b(x) w_{x_1 x_2} + c(x) w_{x_2} = 0, \quad x \in \Omega, \\ w|_{\Gamma^1} = 1, \qquad w|_{\Gamma} = 0, \end{gathered} \tag{П.14}$$

где коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ являются известными функциями x_1, x_2 и их свойства определяются свойствами функций $\widetilde{\chi}(|y|)$ и $\psi(y_1)$ и их производных. Имеет место следующий результат для коэффициентов уравнения в (П.14).

Лемма П.2. *При преобразовании* (П.13) *оператор*

$$A := \sum_{ij=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

перейдет в оператор

$$\widetilde{A} := \sum_{ij=1}^{2} (1 + b_{ij}(x)) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} (1 + b_i(x)) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

с коэффициентами $b_{ij}(x) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $i, j = 1, 2$, $b_2(x)|x| \in C^\alpha(\Omega)$, $b_1(x) = 0$, *где или* $0 < \alpha < \delta < 1$, *или* $\delta \ge 1, \alpha \in (0, 1)$, *и имеет место неравенство*

$$\sum_{ij=1}^{2} \|b_{ij}\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|b_2 |x|\,\|_{C^\alpha(\Omega)} < \tilde{\varepsilon} < 1, \tag{П.15}$$

где постоянная $\tilde{\varepsilon}$ *зависит от* d, $\sin(\theta/2)$, δ, α.

Доказательство. Непосредственные вычисления дают: $b_1(x) = 0$, $b_{11}(x) = 0$, $b_{12}(x) = b_{21}(x) = -2\chi\psi\prime - 2\chi\prime\psi(x_1 - x_2 - \chi\psi)|y(x)|^{-1}$, $b_{22}(x) = \chi\prime\psi(x_1 - x_2 - \chi\psi)|y(x)|^{-1}$, где $|y(x)|^2 = x_1^2 + (x_2 + \chi\psi)^2$. Аналогично можно выписать явное представление для функции $b_2(x) = b_2(x, \psi, \chi)$. Далее утверждение леммы следует из свойств функций ψ и χ. Покажем, например, справедливость оценки (П.15) для коэффициента $b_{22}(x)$. Из неравенств:

$$|\chi\prime(|\bar{x}|) - \chi\prime(|\tilde{x}|)||\psi(\bar{x}_1)| \le c_1(d\varepsilon)^{-2}|\bar{x} - \tilde{x}||\bar{x}_1|^{\delta+1} \le c|\bar{x} - \tilde{x}|^{\alpha}|d\varepsilon|^{\delta-\alpha};$$

$$|\chi\prime(|\bar{x}|)||\psi(\bar{x}_1) - \psi(\tilde{x}_1)| \le c|\bar{x} - \tilde{x}|^{\alpha}|d\varepsilon|^{\delta-\alpha};$$

$$\begin{aligned} |(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \chi(|\bar{x}|)\psi(\bar{x}_1))|y(\bar{x})|^{-1} - (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \chi(|\tilde{x}|)\psi(\tilde{x}_1))|y(\tilde{x})|^{-1}| \le \\ \le c|\bar{x}_1||\bar{x} - \tilde{x}| \sin(\theta/2), \end{aligned}$$

следует справедливость оценки:

$$\begin{aligned} |b_{22}(\bar{x}) - b_{22}(\tilde{x})| \le |\chi\prime(|\bar{x}|) - \chi\prime(|\tilde{x}|)||\psi(\bar{x}_1)||\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \chi(|\bar{x}|)\psi(\bar{x}_1)| \times \\ \times |y(\bar{x})|^{-1} + |\chi\prime(|\tilde{x}|)||\psi(\bar{x}_1) - \psi(\tilde{x}_1)||\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \chi(|\bar{x}|)\psi(\bar{x}_1)||y(\bar{x})|^{-1} + \\ + |(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \chi(|\bar{x}|)\psi(\bar{x}_1))|y(\bar{x})|^{-1} - (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \chi(|\tilde{x}|)\psi(\tilde{x}_1))|y(\tilde{x})|^{-1}| \times \\ \times |\chi\prime(|\tilde{x}|)||\psi(\tilde{x}_1)| \le c|\bar{x} - \tilde{x}|^{\alpha}(d\varepsilon)^{\delta-\alpha} \le C(d\sin(\theta/2))^{\delta-\alpha}|\bar{x} - \tilde{x}|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (П.15) для функции $b_{22}(x)$ выполняется с $\tilde{\varepsilon} \in (c(d\sin(\theta/2))^{\delta-\alpha}, 1)$. Аналогично можно показать справедливость оценки для остальных коэффициентов. Это и завершает доказательство леммы. □

Далее из лемм П.1 и П.2, используя метод продолжения по параметру и эквивалентность норм при преобразовании (П.13), для решения задачи (П.1) в случае криволинейных участков границы в окрестности угловой точки получаем следующий результат.

Лемма П.3. *Пусть функция* $\psi(y_1)$ *удовлетворяет указанным выше условиям и или* $0 < \alpha < \delta < 1$, *или* $\delta \ge 1, \alpha \in (0,1)$; $\theta \in (0, \pi/3)$, *и выполнены предположения на данные задачи* (П.1). *Тогда существует единственное решение задачи* $w(y) \in E_{\frac{\pi}{\theta}}^{3+\alpha}(\overline{\overline{\Omega}})$, *для которого справедливо асимптотическое представление* (П.2) *с функцией* $v(y) \in E_{\frac{\pi}{\theta}+1}^{3+\alpha}(\overline{\overline{\Omega}})$.

Автор выражает признательность профессору Б. В. Базалию за постановку задачи и внимание к данной работе.

Литература

[1] J. M. Elliot, J. R. Ockendon, *Weak and variational methods for moving boundary problem*, London, Pitman, 1982.

[2] S. Richardson, *Hele-Shaw flow with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel* // J. Fluid Mech., **56** (1972), 609–618.

[3] J. M. Elliot, V. A. Janovsky, *A variational inequality approach to the Hele-Shaw flow with a moving boundary* // Proc. Royal Soc. Edinburgh, **sect A.88** (1981), 93–107.

[4] E. Di Benedetto, A. Friedman, *The ill-possed Hele-Shaw and Stefan problem for suprecoold water* // Trans. Amer. Math. Soc., **282** (1984), N 3, 183–203.

[5] Ю. Е. Хохлов, *Точные решения в задачах о течениях Hele-Shaw* // Докл. АН СССР, **315** (1990), N 1, 80–83.

[6] Ю. Е. Хохлов, С. Д. Ховисон, *О классификации решений в задаче о течениях Hele-Shaw с неизвестной границей* // Докл. АН СССР, **325** (1992), N 6, 1161–1166.

[7] Yu. E. Hohlov, *Explicit solutions of time dependent free boundary problems* // International Series of Num. Math., **106** (1992), 131–140.

[8] Б. В. Базалий, *О задаче Стефана для уравнения Лапласа* // Доповіді АН України, (1997), N 1, 11–16.

[9] Б. В. Базалий, *О классической разрешимости задачи Hele-Shaw со свободной границей* // Укр. мат. журнал, **50** (1998), N 11, 1452–1462.

[10] J. Escher, G. Simonett, *Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension* // Advances "Differ. Equation", **2** (1997), N 11, 619–642.

[11] J. Escher, G. Simonett, *Classical solutions for Hele-Shaw models* // SIAM J. MATH. Anal., **28** (1997), N 5, 1028–1047.

[12] G. Procert, *Existence results for Hele-Shaw flow driven by surface tension* // Euro. J. of Appl. Math., **9** (1998), 195–224.

[13] J. R. King, A. A. Lacey, J. L. Vazquez, *Persistence of corners in free boundaries in Hele-Shaw flow* // Euro. J. of Appl. Math., **6** (1995), 445–490.

[14] Б. В. Базалий, *Задача Стефана* // Докл. АН УССР, сер. А, (1986), N 11, 3–7.

[15] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1968.

[16] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М.: Наука, 1973.

[17] В. А. Солонников, *О разрешимости второй начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса* // Зап. научн. семинара ЛОМИ, (1977), N 69, 200–218.

[18] Hanzava E., *Classical solutions of the Stefan problem*, Tohoku Math.J., **33**, N.**3**, 1981, p.297-335.

[19] Н. В. Васильева, *Об одной линейной краевой задаче со старшими производными в граничном условии, возникающей при исследовании задачи Hele-Shaw* // Труды ИПММ НАН Украины, **7** (2002), 33–44.

[20] В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *Исследование задачи для уравнения Лапласа с краевым условием специального вида в плоском угле* // Зап. научн. семинара ЛОМИ, **182** (1990), 149–167.

[21] В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *О задаче с третьим краевым условием для уравнения Лапласа в плоском угле и ее применение к параболическим задачам* // Алгебра и анализ, **2** (1990), N 4, 213–241.

[22] B. V. Bazaliy, N. V. Vasylyeva, *Estimates of solutions of Hele-Shaw model problems in nonsmooth domains* // Preprint, Donetsk. IAMM NAS Ukraine: 99.05, 1999, 21p.

[23] Б. В. Базалий, Н. В. Васильева, *О разрешимости модельной задачи Hele-Shaw в весовых пространствах Гельдера в плоском угле* // Укр. мат. журнал, **52** (2000), N 11, 1446–1457.

[24] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, London, Pitman, 1985.

[25] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей*, М.: Наука, 1991.

Сведения об авторах

Наталья Владимировна Васильева

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74,
83114 Донецк,
Украина
E-Mail: vasylyeva@iamm.ac.donetsk.ua