Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 2, 236 – 280

Мультипликаторы Фурье и K-функционалы пространств гладких функций

Роальд М. Тригуб

(*Представлена В. П. Моторным*)

Аннотация. В статье, носящей обзорный характер, изучаются результаты о мультипликаторах Фурье в пространствах C и L, а затем метод мультипликаторов применяется для исследования аппроксимативных свойств разных методов суммирования простых и кратных рядов и интегралов Фурье и вычисления с точностью до эквивалентности K-функционалов пространств гладких функций (на торе $\mathbb{T}^m$ и $\mathbb{R}^m$), определяемых разными дифференциальными операторами. При этом появились новые модули гладкости. Есть и точные, и асимптотически точные результаты. Подробные доказательства см. в цитируемых работах (в списке литературы — 87 назв.) и монографии [11].

Приведены и некоторые нерешенные вопросы.

2000 MSC. 41-02, 41A17, 41A05, 41A44, 41A63, 42-02, 42A38, 42A45, 42A82, 42B15, 42B30.

Ключевые слова и фразы. Преобразование Фурье, мультипликатор Фурье, K-функционал, модуль гладкости, приближение функций полиномами, константы Лебега, положительно определенные функции.

Введение

Пусть A_0 и A_1 — подпространства некоторого банахова пространства, а B_0 и B_1 — подпространства, возможно, другого банахова пространства. Пара промежуточных пространств A и B называется интерполяционной, если из того, что линейный оператор T непрерывно действует из A_0 в B_0 и из A_1 в B_1 следует, что его сужение действует непрерывно из A в B.

Статья поступила в редакцию 26.05.2004
Работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины (*проект* 01.07/0021)

ISSN 1810 – 3200.

Пример. В силу классической теоремы Рисса-Торина пара (L_p, L_q) является интерполяционной при $A_0 = L_{p_0},\ B_0 = L_{q_0},\ A_1 = L_{p_1},\ B_1 = L_{q_1}$, если при $\theta \in (0,1)$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Можно было бы предположить, что всякий линейный оператор, который действует непрерывно из C в C и из C^2 в C^2, действует непрерывно и из C^1 в C^1. Но это не так уже для интегральных операторов (Б. С. Митягин, Е. М. Семенов; см. [1]).

Известны два конструктивных метода построения интерполяционных пространств: вещественный (J.-L. Lions, J. Peetre) и комплексный (A. P. Calderon) (см. [1], [78]).

Вещественный метод (K-метод) состоит в следующем. Пусть $a \in A_0 + A_1$. Полагаем при $t > 0$

$$K(t,a) = K(t,a,A_0,A_1) = \inf\left\{\|a_0\|_{A_0} + t\,\|a_1\|_{A_1},\ a = a_0 + a_1\right\}.$$

Эта функция (K-функционал пары (A_0, A_1)) возрастает на $(0,+\infty)$ и выпукла вверх.

При $q \in [1,+\infty]$ и $\theta \in (0,1)$ по определению

$$A_{\theta,q} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{\theta,q} = \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

Аналогично определяется пространство $B_{\theta,q}$. Пара $(A_{\theta,q},\ B_{\theta,q})$ — интерполяционная.

Подобное утверждение справедливо и для квазинормированных пространств и сублинейных операторов (см. там же).

Пример. (J. Peetre, см. [1])

$$K(t^r, f, C, C^r) \asymp \omega_r(f,t), \quad \omega_r(f,h) = \sup_{0<\delta\le h} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f(\cdot + \nu\delta) \right\|_C$$

(модуль гладкости функции f порядка r и шага $h > 0$, см., напр., [2]–[4]). Это двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от r. А точное значение K-функционала известно лишь при $r = 1$ [79].

Из этого примера следует, что если $A_0 = C,\ A_1 = C^r$, то $A_{\theta,q}$ — пространство Бесова (см., напр., [1]).

K-функционал в этом и других подобных случаях показывает как измерять промежуточную гладкость.

З. Чесельский [5] поставил задачу определения K-функционала (по порядку) для периодических функций через линейные средние их рядов Фурье. Еще ранее автор (см. [6, 7]) нашел для классических методов суммирования рядов Фурье точный порядок приближения индивидуальных функций, который выражается через разные модули гладкости. См. также [75] и [76].

В настоящей статье, которая носит обзорный характер, вычисляются с точностью до эквивалентности K-функционалы пространств гладких функций на торе $\mathbb{T}^m$ и на $\mathbb{R}^m$, определяемых дифференциальными операторами эллиптического типа и др. При этом в кратном случае ($m \geq 2$), а иногда и при $m = 1$, пришлось ввести специальные модули гладкости, так как обычные модули не подходят. Доказательств приводится мало, но все доказательства проводятся методом мультипликаторов Фурье.

Операторы-мультипликаторы характеризуются тем, что они перестановочны со сдвигами и представимы в виде свертки функции с мерой (см. [8, гл. 1], [9, т. II, гл. 16]).

Первые эффективные достаточные условия для мультипликаторов Фурье в L_p при $p \in (1, +\infty)$ получены М. Риссом и Ж. Марцинкевичем (см. в [10] теорему Литтльвуда-Пэли). Имеются также в достаточно общем случае переходы от мультипликаторов Фурье на $\mathbb{R}^m$ к мультипликаторам Фурье на торе и наоборот (см. [8, гл. VII]).

К вопросам теории приближений функций теоремы о мультипликаторах Фурье начали применять в начале 60-х годов К. И. Бабенко и Б. С. Митягин.

План статьи таков.

Сначала подробнее, чем обычно, изучаются свойства мультипликаторов на спектре в пространствах C и L_1 (п.1), связь мультипликаторов с алгеброй преобразований Фурье мер и новые достаточные условия (п.2). А далее показаны разные применения мультипликаторов к задачам анализа Фурье и теории приближений функций: регулярность методов суммирования простых и кратных рядов и интегралов Фурье и сравнение их аппроксимативных свойств (п.3), формулы для K-функционалов и точные по порядку двусторонние оценки приближения (п.4), некоторые точные и асимптотически точные результаты, которые можно получить методом мультипликаторов (п.5). Приведены и некоторые нерешенные вопросы.

Подробные доказательства — в цитируемых книгах и статьях, а также в монографии [11].

1. Мультипликаторы Фурье

Начнем с обозначений и определений.

Через c будем обозначать разные абсолютные положительные константы, а через $\gamma(a,b)$ — положительные величины, зависящие лишь от a и b. Для комплексного числа $z \neq 0$ $\operatorname{sign} z = \frac{z}{|z|}$, а для $x \in \mathbb{R}$ $x_+ = \max\{x, 0\}$, п.в. — почти всюду (по мере Лебега).

$\mathbb{R}^m$ — m-мерное вещественное пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_m) = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j e^0_{j,m}$ со скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j y_j$; $|x| = \sqrt{(x,x)}$; $\mathbb{T}^m = (-\pi, \pi]^m$ — тор.

Ряд Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^m)$ будем писать в виде

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{f}(k) e_k, \quad e_k = e^{i(k,x)}, \quad \hat{f}(k) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} f(u) e^{-i(k,u)} du.$$

Комплекснозначную измеримую функцию f предполагаем 2π- периодической по $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Числовая последовательность $\{\varphi(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ определяет мультипликатор Φ из $L_p(\mathbb{T}^m)$ в $L_p(\mathbb{T}^m)$ при $p \in [1, +\infty]$, если для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ ряд $\sum \varphi(k) \hat{f}(k) e_k$ является рядом Фурье некоторой функции $\Phi(f)$ из $L_p(\mathbb{T}^m)$. Множество всех таких мультипликаторов обозначим через $M_p(\mathbb{Z}^m)$ и будем писать

$$\|\{\varphi(k)\}\|_{M_p(\mathbb{Z}^m)} = \sup_{\|f\|_p \le 1} \|\Phi(f)\|_p, \quad \|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{T}^m} |f(u)|^p \, du \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(В случае пространства $C(\mathbb{T}^m)$ непрерывных и периодических функций — $M(\mathbb{Z}^m)$ в отличие от $M_\infty(\mathbb{Z}^m)$ при $p = \infty$). При $m = 1$ верхний индекс опускаем ($\mathbb{R}, L_p(\mathbb{T})$ и т.д.). Легко видеть, что при любом $s \in \mathbb{Z}^m$ $\|\{\varphi(k+s)\}\| = \|\{\varphi(k)\}\|$. Такие операторы являются интегральными и представляются в виде свертки функции f с комплекснозначной мерой, а нормы их в пространствах C, L_∞ и L_1 (при одной последовательности $\{\varphi(k)\}$) одинаковы [8].

Если $f \in L(\mathbb{R}^m)$, то вместо рядов Фурье — интегралы Фурье. Преобразование Фурье

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(u) e^{-i(u,x)} du.$$

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ — ограниченная измеримая функция. Определим на $L_2(\mathbb{R}^m) \cap L_p(\mathbb{R}^m)$ линейный оператор Φ следующим равенством для преобразований Фурье

$$\widehat{\Phi(f)}(x) = \varphi(x)\hat{f}(x), \quad f \in L_2(\mathbb{R}^m) \cap L_p(\mathbb{R}^m).$$

По теореме Планшереля $\hat{f}$ — унитарный оператор в $L_2(\mathbb{R}^m)$. Так что $\Phi(f) \in L_2(\mathbb{R}^m)$, во всяком случае. Пусть еще существует константа D, такая, что для всех $f \in L_2(\mathbb{R}^m) \cap L_p(\mathbb{R}^m)$ $\|\Phi(f)\|_p \le D\|f\|_p$. Тогда при $p < \infty$ оператор имеет единственное продолжение по непрерывности на все $L_p(\mathbb{R}^m)$ с сохранением нормы $\inf D$. Это и есть мультипликатор из L_p в $L_p(\varphi \in M_p(\mathbb{R}^m))$. Очевидно, что $M_2(\mathbb{R}^m) = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ и $\|\varphi\|_{M_2} = \|\varphi\|_\infty$. Легко проверить, что $\|\varphi(\varepsilon\cdot)\|_{M_p(\mathbb{R}^m)} = \|\varphi\|_{M_p(\mathbb{R}^m)}$ при любом $\varepsilon > 0$.

1.1. Для любого $p \in [1, +\infty)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

$$M_p(\mathbb{Z}^m) = M_{p'}(\mathbb{Z}^m), \quad M_p(\mathbb{R}^m) = M_{p'}(\mathbb{R}^m).$$

1.2. (Ж. Марцинкевич). Пусть $m = 1$ и $\Delta\varphi(k) = \varphi(k) - \varphi(k+1)$. Если

$$\lambda(\varphi) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(k)| + \sup_{\nu\ge 0} \sum_{2^\nu - 1 \le |k| < 2^{\nu+1}} |\Delta\varphi(k)| < \infty,$$

то $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in M_p(\mathbb{Z})$ для любого $p \in (1, +\infty)$ и $\|\{\varphi(k)\}\|_{M_p(\mathbb{Z})} \le \gamma(p)\lambda(\varphi)$.

Аналогичная теорема справедлива и в кратном случае $L_p(\mathbb{T}^m)$ $(M_p(\mathbb{Z}^m),\ 1 < p < \infty)$. При этом попарно непересекающиеся двоичные полуинтервалы оси нужно заменить на всевозможные прямоугольные параллелепипеды, которые являются декартовыми произведениями двоичных полуинтервалов m осей, а разность $\Delta\varphi(k)$ — на смешанную разность. Подобные эффективные достаточные условия при $p \in (1, +\infty)$ для мультипликаторов интегралов Фурье исследовали С. Г. Михлин и Л. Хермандер (см. [10] и [1]). Там же см. 1.1.

Приведем теперь две теоремы, устанавливающие связь между мультипликаторами рядов и интегралов Фурье (см. [8, гл. VII]).

1.3. (de Leeuw K.).

Если при некотором $p \in [1, +\infty]$ $\varphi \in M_p(\mathbb{R}^m)$ и непрерывна во всех точках $k \in \mathbb{Z}^m$, то $\{\varphi(k)\} \in M_p(\mathbb{Z}^m)$ и $\|\{\varphi(k)\}\|_{M_p(\mathbb{Z}^m)} \le \|\varphi\|_{M_p(\mathbb{R}^m)}$.

1.4. Если $\varphi \in C(\mathbb{R}^m)$ и $\lambda = \sup\limits_{\varepsilon>0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M_p(\mathbb{Z}^m)} < \infty$, то $\varphi \in M_p(\mathbb{R}^m)$ и $\|\varphi\|_{M_p(\mathbb{R}^m)} \le \lambda$.

Отметим теперь, что таких операторов-мультипликаторов достаточно много.

1.5. Для любого линейного ограниченного оператора A из $L_p(\mathbb{T})$ в $L_p(\mathbb{T})$ $\quad (p \in [1, +\infty])$ или из $C(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$ существует мультипликатор A_0, такой, что $\|A_0\| \le \|A\|$ и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ $\quad \|f - A_0(f)\|_p \le \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|\tau_t f - A\tau_t f\|_p$, где $\tau_t f = f(\cdot + t)$ (оператор сдвига). Если еще $A = A_n$ и $A_n(e_k) = e_k$ при $k \in [-n, n]$ и $A_n(e_k) = 0$ при $|k| \ge n + 1$ (полиномиальный проектор), то $\|S_n\|_{L_p \to L_p} \le \|A_n\|$, где $S_n(f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k$ — частная сумма ряда Фурье f.

Эта теорема (см. [12]) восходит к Ж. Марцинкевичу.

Рассмотрим теперь вопрос о переходе от неравенств в L_∞ (или C) к таким же неравенствам в L_p при $p \in [1, +\infty)$. Чтобы включить периодический и непериодический случаи, полагаем при $N > 0$

$$\|f\|_{p,N} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int\limits_{-N+x}^{N+x} |f(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{R})$ $\quad \|f\|_p = \lim\limits_{N \to +\infty} \|f\|_{p,N}$, а для 2π-периодических функций $\|f\|_p = \|f\|_{p,\pi}$.

1.6. Пусть E — некоторое линейное множество равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, линейный оператор A действует из E в E и замкнут относительно равномерной сходимости, а $\|Af\|_\infty \le a\|f\|_\infty$. Если еще оператор A перестановочный с оператором сдвига ($A\tau_t = \tau_t A$ для любого $t \in \mathbb{R}$), то для любой $f \in E$, $p \in [1, +\infty)$ и $N > 0$ $\quad \|Af\|_{p,N} \le a\|f\|_{p,N}$.

Пример 1. Неравенство Бернштейна для производной тригонометрических полиномов или целых функций экспоненциального типа в пространстве $L_p(\mathbb{T})$ или $L_p(\mathbb{R})$, соответственно, (см., напр., [2, гл. IV]) сразу следует из случая $p = \infty$. И это неравенство остается точным при любом $p \in [1, +\infty)$, что является, вообще говоря, редкостью. См. также ниже 5.8.

В пространстве L_∞, которое является сопряженным к L_1, замкнутый шар слабо компактен. Поэтому любой ограниченный оператор в L_∞ является слабо компактным, хотя и не обязан быть компактным даже в случае, когда является мультипликатором. Другое дело - пространство C. Здесь любой слабо компактный мультипликатор является компактным и действует из L_∞ в C ([12]).

Приведем теперь с доказательством простые и удобные для проверки достаточные условия для мультипликаторов в $C(\mathbb{T})$, а значит, и в $L_p(\mathbb{T})$ $\quad (p \in [1, +\infty])$ и два применения (см. ниже примеры 2 и 3).

Если $\varphi(k) = \hat{g}(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ — последовательность коэффициентов Фурье некоторой функции $g \in L(\mathbb{T})$, то для любой $f \in L(\mathbb{T})$

$$\Phi(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)\hat{f}(k)e_k$$

и значит, нормы мультипликатора $\{\varphi(k)\}$ в M, M_∞ и M_1 равны

$$\|\Phi\|_{C\to C} = \|\Phi\|_{L_\infty\to L_\infty} = \|\Phi\|_{L_1\to L_1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\|g\|_1.$$

Будем предполагать, что

$$\lim_{|k|\to\infty} \varphi(k) = 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Delta\varphi(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi(k) - \varphi(k+1)| < \infty.$$

Это значит, что $\operatorname{Re}\varphi(k)$ и $\operatorname{Im}\varphi(k)$ при $k \geq 0$ и $k \leq -1$ равны разностям убывающих к нулю при $|k| \to \infty$ последовательностей. Условие, которое используется в следующей теореме, более жесткое и означает аналогично представимость в виде разностей выпуклых и стремящихся к нулю последовательностей (квазивыпуклость).

1.7. Пусть $\lim\limits_{|k|\to\infty} \varphi(k) = 0$ и при $\Delta_2\varphi(k) = \varphi(k) - 2\varphi(k+1) + \varphi(k+2)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)\,|\Delta_2\varphi(k)| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi(k) - \varphi(-k)|}{k} < \infty$$

(последнее условие и необходимо). Тогда существует функция $g \in L(\mathbb{T})$, такая, что $\hat{g}(k) = \varphi(k) \quad (k \in \mathbb{Z})$ и

$$\|g\|_1 \leq c\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)\,|\Delta_2\varphi(k)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi(k) - \varphi(-k)|}{k}\right).$$

А если φ' локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_M \leq c\left(\|\varphi\|_\infty + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t\varphi''(t)|\,dt + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\varphi(t) - \varphi(-t)|}{t}\,dt\right).$$

Отметим, что второе утверждение сразу следует из первого. А первое утверждение для четных последовательностей (Юнг) и нечетных (С. А. Теляковский [13]) можно доказывать одинаково. В силу классического признака Дирихле ряд $\sum \varphi(k)e_k$ сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$ вне любой окрестности нуля. Чтобы убедиться, что сумма ряда интегрируема по Лебегу на $\mathbb{T}$, нужно сделать преобразование Абеля дважды, учитывая, что при $n\ge 2$

$$\frac{\varphi(0)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\cos kt=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\Delta_2\varphi(k)\,F_k(t)+n\varphi(n-1)F_{n-1}(t)+\varphi(n)D_n(t),$$

где D_n — ядро Дирихле, а F_n — ядро Фейера:

$$F_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(t)=\frac{2}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]^2,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}|F_n(t)|dt=\pi.$$

Отсюда при $t\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ и $n\to\infty$ $\quad (n\Delta\varphi_{n-1}\to 0)$

$$g(t)=\frac{\varphi(0)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k)\cos kt=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta_2\varphi(k)\cdot F_k(t)$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|dt\le\pi\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\Delta_2\varphi(k)|.$$

Но если тригонометрический ряд сходится кроме, может быть, счетного числа точек к интегрируемой по Лебегу функции, то он является ее рядом Фурье (теорема Валле-Пуссена [14]). В случае нечетной функции нужно учесть, что $k\sin kt=\Delta_2[(k-1)^2\,F'_{k-2}(t)]$ и в силу неравенства Бернштейна

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F'_n(t)|dt\le\pi n$$

и, значит, аналогично

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k)\sin kt\right|dt\le\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^2\left|\Delta_2\frac{\varphi(k)}{k}\right|\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\,|\Delta_2\varphi(k)|+2\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\varphi(k+1)|+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi(k)|}{k}\le$$
$$\le 3\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\,|\Delta_2\varphi(k)|+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi(k)|}{k}.$$

Утверждение 1.7 доказано.

Пример 2. Теорема Д. Джексона (ср. [2]; [3]; [4, п.2 гл. VII]). Для любого $r \in N$ можно указать функцию ψ с носителем на $[-1,1]$, такую, что для любой функции $f \in C^r(\mathbb{T})$

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \psi\left(\frac{k}{n+1}\right) \hat{f}(k) e_k \right\| \le \gamma(r) \frac{\|f^{(r)}\|}{(n+1)^r} \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

Учитывая, что

$$\frac{f^{(r)}}{(n+1)^r} \sim \sum_k \frac{(ik)^r}{(n+1)^r} \hat{f}(k) e_k,$$

нужно подобрать так ψ, чтобы функция $\varphi(x) = (1-\psi(x))\, x^{-r}$ удовлетворяла условиям 1.7 ($\varepsilon = \frac{1}{n+1}$). Например, $\psi(x) = 1 - x^r \varphi(x)$, где $\varphi(x) = (r+2)x - (r+1)x^2$ на $[0,1]$ и $\varphi(x) = (r+2)x + [2r+4+(-1)^r(r+3)]x^2 + (r+2)(1+(-1)^r)x^3$ на $[-1,0]$.

Аналогично можно поступить и при нецелом $r > 0$. См. также 3.6в.

Пример 3. Для любых наборов $a = \{a_\nu\}_0^r$ и $b = \{b_\nu\}_0^r$ с условиями: $b_r \ne 0$ и $\sum\limits_{\nu=0}^{r} b_\nu z^\nu \ne 0$ при $\operatorname{Re} z = 0$ и для любой функции $f \in C^r(\mathbb{T})$

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu f^{(\nu)} \right\| \le \gamma(a,b,r) \left\| \sum_{\nu=0}^{r} b_\nu f^{(\nu)} \right\|.$$

Для доказательства нужно лишь проверить, что функция

$$\varphi(t) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{r} a_\nu (it)^\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{r} b_\nu (it)^\nu} - \frac{a_r}{b_r}$$

удовлетворяет условиям 1.7. Но легко видеть, что при $t \to 0$ $\quad \varphi(t) - \varphi(0) = O(|t|)$, а при $|t| \to \infty$ $\quad \varphi(t) = O\left(\frac{1}{|t|}\right)$ и $\varphi''(t) = O\left(\frac{1}{|t|^3}\right)$.

Приведем еще две оценки сверху L_1-нормы периодической функции через ее коэффициенты Фурье (первая из них — неравенство Сидона-Теляковского, вторая — неравенство Г. А. Фомина [80]).

1.8. а) Если $\lim\limits_{|k|\to\infty} \varphi(k) = 0$ и $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \sup\limits_{|k|\ge s} |\Delta\varphi(k)| < \infty$, то

$$\|\{\varphi(k)\}\|_M \le c \sum_{s=0}^{\infty} \sup_{|k|\ge s} |\Delta\varphi(k)|.$$

b) Если $\lim\limits_{|k|\to\infty} \varphi(k) = 0$ и при некотором $p \in (1, +\infty)$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} \sum_{|k|\geq s} |\Delta\varphi(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi(k) - \varphi(-k)|}{k} < \infty,$$

то ряд $\sum \varphi(k) e_k$ есть ряд Фурье, а $\{\varphi(k)\}$ — мультипликатор из $L_\infty(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$ и

$$\|\{\varphi(k)\}\|_M \leq \gamma(p) \left(\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} \sum_{|k|\geq s} |\Delta\varphi(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi(k) - \varphi(-k)|}{k} \right).$$

Отметим, что a) следует из b) (случай $p = \infty$). А достаточное условие b) с уменьшением p становится более общим (менее жестким). Это видно из того, что оно, как показано в [15], для четных последовательностей эквивалентно известному неравенству о сильной суммируемости рядов Фурье ($p \in (0, +\infty)$):

$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |S_k(f, x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma(p) \, \|f\|_\infty \quad \text{(Харди, Литтльвуд)},$$

а для нечетных — следующему

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \tilde{S}_k(f, x) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{n} \leq |t| \leq \pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \, dt \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma(p) \, \|f\|_\infty$$

(частные суммы ряда Фурье и его сопряженного).

Есть и более общие результаты. См. обзоры [13], [16], [17]. В последнем из них приведены оценки L-норм рядов и полиномов в кратном случае. См. также ниже 5.2 и 5.3.

Переходим к мультипликаторам на заданном спектре. Спектром функции $f \in L(\mathbb{T})$ называют множество тех $k \in \mathbb{Z}$, для которых коэффициенты Фурье $\hat{f}(k) \neq 0$. Пусть S — непустое подмножество $\mathbb{Z}$, а $L_p(\mathbb{T}, S)$ $\quad (p \in [1, +\infty])$ — подпространство $L_p(\mathbb{T})$ функций со спектром в S. Числовую последовательность $\{\varphi(k)\}_{k\in S}$ называют мультипликатором в $L_p(\mathbb{T}, S)$ ($\{\varphi(k)\} \in M_p(S)$), если для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}, S)$ ряд $\sum \varphi(k) \hat{f}(k) e_k$ является рядом Фурье некоторой функции $\Phi(f) \in L_p(\mathbb{T}, S)$ и $\|\{\varphi(k)\}\|_{M_p(S)} = \|\Phi\|_{L_p \to L_p}$. В случае пространства $C(\mathbb{T}, S)$ будем писать, как и ранее, $M(S)$ в отличие от $M_\infty(S)$ при $p = \infty$.

1.9. Любой мультипликатор в $C(\mathbb{T},S)$ можно продолжить до мультипликатора в $C(\mathbb{T})$ с сохранением нормы и

$$\|\{\varphi(k)\}\|_{M(S)} = \min\left\{\operatorname{var}\mu;\ \mu : \int\limits_{\mathbb{T}} e_{-k}d\mu = \varphi(k),\ k \in S\right\} =$$

$$= \min_{\{\varphi(k)\}_{k\overline{\in}S}} \sup_n \frac{1}{2\pi}\,\|\sigma_n(\Phi)\|_1 = \min_{\{\varphi(k)\}_{k\overline{\in}S}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\|\sigma_n(\Phi)\|_1,$$

где

$$\sigma_n(\Phi) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\varphi(k)e_k.$$

При этом

$$\Phi(f)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)d\mu(t).$$

Отметим сразу два следствия.

I. Дана последовательность $\{\varphi(k)\}_{k\in S}$. Для того, чтобы для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ существовала хотя бы одна функция $\Phi(f) \in C(\mathbb{T})$ с коэффициентами Фурье $\varphi(k)\hat{f}(k)$ при $k \in S$, необходимо и достаточно, чтобы при некоторой конечной борелевской мере μ на окружности $\mathbb{T}$ $\varphi(k) = \int_{\mathbb{T}} e_{-k}d\mu$ при $k \in S$. Тем самым дан ответ на вопрос, поставленный в [9, т. 2, 16.7.5].

II. Для любого $S \subset \mathbb{Z}$ и $p \in [1,+\infty)$

$$\|\{\varphi(k)\}\|_{M_p(S)} \le \|\{\varphi(k)\}\|_{M(S)} = \|\{\varphi(k)\}\|_{M_\infty(S)}.$$

Останется ли мультипликатор после продолжения со спектра компактным, если был таковым?

Приведем лишь один пример.

Пусть S — конечное подмножество $\mathbb{Z}$. Для того, чтобы мультипликатор $\{\varphi(k)\}_{k\in S}$ можно было продолжить до компактного мультипликатора в $C(\mathbb{T})$ с сохранением нормы, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in S$ и функция $f \in L(\mathbb{T})$, такая, что $e^{i\alpha}\,e^{-iqx}\,f(x) \ge 0$ п.в. При этом $\|\{\varphi(k)\}\|_{M(S)} = |\varphi(q)|$.

Доказательство приведенных утверждений см. в [12].

Как отмечено в [9, с. 347], любой мультипликатор из $M_1(S)$ можно продолжить до мультипликатора из $M_1(\mathbb{Z})$. Норма не сохраняется, вообще говоря. По-видимому, есть мультипликаторы при $S = [-n, n]$, норма которых при любом продолжении увеличивается в $c\log n$ раз. Не известно, при каком $p \ne 2$ любой мультипликатор из $M_p(S)$ можно продолжить с сохранением нормы или хотя бы с увеличением в $\gamma(p)$ раз.

Вернемся к случаю $M(S)$. В случае меры μ, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега ($d\mu = g(t)dt,\ g \in L(\mathbb{T})$), вопрос о продолжении мультипликатора сводится к задаче о наилучшем приближении в $L(\mathbb{T})$.

Пусть A — подпространство в $L(\mathbb{T})$, а $f \in L\backslash A$. Для того, чтобы

$$\|f - g^*\|_1 = \min_{g\in A} \|f - g\|_1,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция h, зависящая от f и A, такая, что п.в. на $\mathbb{T}$

$$|h| \le 1,\ h(f - g^*) = |f - g^*|, \quad \int\limits_{\mathbb{T}} hg = 0 \quad (g \in A).$$

Кроме того, $\|f - g^*\|_1 = \int_{\mathbb{T}} hf$. Если дополнительно $f - g^* \ne 0$ п.в., то $h = \overline{\operatorname{sign}(f - g^*)}$.

Этот критерий только с указанным дополнительным условием приведен, напр., в [2, 3]. В приведенной форме имеется, напр., в [4, п.10 гл. 3]. Как доказал J. P. Kahane [18], $L(\mathbb{T}, S)$ является подпространством существования и единственности (функции g^* для любой $f \in L(\mathbb{T})$) тогда и только тогда, когда S — бесконечная арифметическая прогрессия с нечетной разностью.

Важным является уже частный случай спектра $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. В этом случае (и только) известна формула для нормы компактного оператора из $M_1(\mathbb{Z}_0)$ (С. М. Никольский [81]): если $\{\varphi(k)\}$ — коэффициенты Фурье функции $g \in L(\mathbb{T})$, то

$$\|\{\varphi(k)\}\|_{M_1(\mathbb{Z}_0)} = \frac{1}{2}\max_x \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(t)|dt$$

и ,следовательно, существует функция $g \in L(\mathbb{T})$ такая, что

$$\|\{\varphi(k)\}\|_{M_1(\mathbb{Z}_0)} < \|\{\varphi(k)\}\|_{M(\mathbb{Z}_0)} = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t) - \lambda|dt.$$

Как показано в [19], существуют последовательности мультипликаторов, у которых в C и L разная асимптотика норм. В связи с этим обстоятельством выделим достаточно общий случай, когда эти нормы на спектре $\mathbb{Z}_0$ имеют одинаковую асимптотику. Для любой последовательности $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$ с условиями:

$$\sum_{k\neq 0,-1} |\Delta\varphi(k)| < \infty, \quad \lim_{|k|\to\infty} \varphi(k) = 0$$

при некотором $\theta \in [0, c]$

$$\|\{\varphi(k)\}\|_{M(\mathbb{Z}_0)} = \|\{\varphi(k)\}\|_{M_1(\mathbb{Z}_0)} + \theta \sum_{k\neq 0,-1} |\Delta\varphi(k)|.$$

См. [20].

Пусть теперь $H_p = H_p(D)$ $(p > 0)$ — пространство Харди аналитических в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функций с условием

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0<r<1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

При $p \geq 1$ — это банахово пространство (при $p = \infty$ — банахова алгебра с поточечным умножением) и если исходить из предельной функции $f(e^{it})$ на границе ∂D, то это пространство можно отождествить с $L_p(\mathbb{T}, \mathbb{Z}_+)$. Иная картина при $p \in (0, 1)$. У функции из квазинормированного пространства L_p нет ряда Фурье, если она не из L_1. Более того, как хорошо известно, в L_p при $p \in (0, 1)$ вообще нет ненулевых линейных непрерывных функционалов. А в H_p при любом $p > 0$ есть ряды Тейлора, а значит, и мультипликаторы. Впрочем, мультипликаторы можно ввести и в L_p: сначала на плотном множестве полиномов, а затем непрерывно продолжить. Но в этом случае, как показано в [82], любой мультипликатор — это линейная комбинация сдвигов.

Числовую последовательность $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ назовем мультипликатором в $H_p(D)$ (будем писать $\{\varphi(k)\} \in M_p(\mathbb{Z}_+)$), если для любой функции $f \in H_p(D)$ с коэффициентами Тейлора в нуле $\{c_k\}$

$$\Phi(f)(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \varphi(k) c_k z^k \in H_p(D).$$

При этом, как и ранее, $\|\{\varphi(k)\}\|_{M_p(\mathbb{Z}_+)} = \|\Phi\|_{H_p\to H_p}$. При $p \in (1, +\infty)$, как это следует из теоремы М. Рисса о проекторах, $\{\varphi(k)\} \in M_p(\mathbb{Z}_+)$ тогда и только тогда, когда продолжение $\{\varphi(k)\}$ нулем на $\mathbb{Z}$ является мультипликатором из $M_p(\mathbb{Z})$. При $p = \infty$ и $p = 1$ такие продолжения мультипликаторов существуют (см. выше), но их трудно описать.

При $0 < p < q \leq 1 < r \leq \infty$ имеет место вложение

$$M_p(\mathbb{Z}_+) \subset M_q(\mathbb{Z}_+) \subset M_r(\mathbb{Z}_+).$$

Приведем теперь оценку нормы для финитного случая,т.е.функции с компактным носителем ($\varphi(k) = 0,\ k > n$).

1.10. При $p \in (0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\|\{\varphi(k)\}_{k\in[0,n]}\|_{M_p(\mathbb{Z}_+)} \le \gamma(p) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} \varphi(k)e^{ikx} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\varphi(k)$ при $k \in [-n, -1]$ можно выбирать произвольно. См. [21].

Рассмотрим еще вопрос о неравенстве типа Бернштейна для производной тригонометрического полинома $T_n(x) = \sum\limits_{-n}^{n} c_k e^{ikx}$.

В. В. Арестов [22] доказал при $r \in \mathbb{N}$ точное неравенство:

$$\|T_n^{(r)}\|_p \le n^r \, \|T_n\|_p \quad (0 < p < 1).$$

Э. С. Белинский и Вит. В. Волчков независимо доказали, что и при нецелом $r > 0$, а спектре T_n на $[0, n]$

$$\|T_n^{(r)}\|_p \le \gamma(r) n^r \|T_n\|_p.$$

Совсем другое неравенство имеет место для полиномов с полным спектром $[-n, n]$ [23].

1.11. Если нецелое $r > 0$, а $p \in (0,1)$, то

$$\sup_{T_n : \|T_n\|_p \le 1} \|T_n^{(r)}\|_p \asymp n^r, n^{\frac{1}{p}-1}, n^{\frac{1}{p}-1} \log n$$

(двусторонние неравенства с положительными константами, зависящими от r и p), соответственно, при $r > \frac{1}{p} - 1$, $r < \frac{1}{p} - 1$ и $r = \frac{1}{p} - 1$.

И, наконец, приведем формулу, позволяющую оценить разность между интегралом Фурье и его римановой интегральной суммой, которая является рядом Фурье.

1.12. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ и при некотором $r \in \mathbb{Z}_+$ f и $f^{(r)}$ — функции ограниченной вариации на $[n, +\infty)$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(\nu)}(x) = 0$ при $\nu = 0, 1, \ldots, r$. Тогда при $0 < |x| \le \pi$

$$\sum_{k=n}^{\infty} f(k)e^{ikx} = \int\limits_{n}^{\infty} f(t)e^{itx}dt + \frac{1}{2} f(n)e^{inx} +$$

$$+ e^{inx} \sum_{p=0}^{r-1} \frac{(-i)^{p+1}}{p!} h^{(p)}(x)\, f^{(p)}(n) + \frac{\theta}{\pi^r} \bigvee\nolimits_{n}^{\infty} (f^{(r)}),$$

где $\bigvee_n^\infty$ — полная вариация, $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$, а $|\theta| \le 3$.

При $r = 0$, когда сумма по p отсутствует, это соотношение доказано, по сути, Э. С. Белинским. Общий случай см. в [24]. Переходя к пределу при $x \to 0$ в случае сходимости ряда $\sum^{\infty} f(k)$, получаем в качестве следствия классическую формулу Эйлера-Маклорена.

Приведем еще одно следствие, которое используется далее в тексте. Если φ — функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0$, то для любого $p \in [1, +\infty)$ и $\varepsilon > 0 (|\theta| \in (0,1))$

$$\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\varepsilon k) e^{ikx} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\varepsilon^{\frac{1}{p}-1} \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{\varepsilon}}^{\frac{\pi}{\varepsilon}} \left| \hat{\varphi}(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + 4\pi\theta \bigvee\nolimits_{-\infty}^{\infty} (f).$$

Подобные соотношения только в виде неравенств справедливы и при $p \in (0,1)$ (см. там же или в [11]).

2. Абсолютная сходимость интегралов Фурье. Связь между алгебрами A, B и M

Пусть

$$B(\mathbb{R}^m) = \left\{ f : f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-i(u,x)}\, d\mu(u), \quad \|f\|_B = \mathrm{var}\,\mu < \infty \right\}$$

(преобразования Фурье всех конечных на $\mathbb{R}^m$ комплекснозначных борелевских мер). Это банахова подалгебра равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^m$ функций с sup-нормой и поточечным умножением. Норма f не меняется при сдвиге $(x \to x + h)$ и подобии $(x \to \lambda x,\ \lambda \ne 0)$. Если еще мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т.е. $d\mu = g(u)du$, $g \in L(\mathbb{R}^m)$, то будем писать $f \in A(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_A = \|g\|_1$. Это функции, представимые абсолютно сходящимся интегралом Фурье. A — идеал алгебры B.

Положим еще при $p \in (0,1)$

$$A_p(\mathbb{R}^m) = \left\{ f : f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(u) e^{i(u,x)}\, du,\ \|f\|_{A_p} = \|g\|_p < \infty \right\}$$

в предположении, что $g \in L_p \cap L(\mathbb{R}^m)$, напр. В частности, для финитной функции принадлежность $A_p(\mathbb{R}^m)$ эквивалентна тому, что $\hat{f} \in L_p(\mathbb{R}^m)$.

Если $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$, то при $p > 0$

$$A_p(\mathbb{T}^m) = \left\{ f : f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k e^{i(k,x)},\ \|f\|_{A_p} = \left(\sum_k |c_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Известно, что алгебры $B(\mathbb{R}^m), A(\mathbb{R}^m)$ и $A(\mathbb{T}^m)$ ($p = 1$) обладают локальным свойством и локально устроены одинаково (см., напр., [25]). Разница в поведении функций из $B(\mathbb{R}^m)$ и $A(\mathbb{R}^m)$ — лишь около ∞. Если $f \in B(\mathbb{R}^m)$ и вне некоторой окрестности нуля имеет ограниченную вариацию по Витали, а $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$, то $f \in A(\mathbb{R}^m)$, и $\|f\|_B = (2\pi)^{-m} \|\hat{f}\|_1$. (см. [7]).

Имеется связь между алгеброй B и алгеброй M мультипликаторов (см. п.1).

2.1. a) Если $\varphi \in B(\mathbb{R}^m)$, то при любом $\varepsilon > 0$ $\quad \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(\mathbb{Z}^m)} \le \|\varphi\|_B$.

b) Если φ непрерывна п.в. на $\mathbb{R}^m$ и при некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$

$$K = \sup_n \|\{\varphi(k\varepsilon_n)\}\|_{M(\mathbb{Z}^m)} < \infty,$$

то функцию φ можно исправить на множестве ее точек разрыва так, что она войдет в $B(\mathbb{R}^m)$ и $\|\varphi\|_B \le K$.

В частности, для любой непрерывной функции (см. еще 1.3–1.4)

$$\|\varphi\|_{M(\mathbb{R}^m)} = \sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(\mathbb{Z}^m)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(\mathbb{Z}^m)} = \|\varphi\|_B.$$

Так что мультипликатор — это свертка функции с мерой, а если функция периодическая, то свертка на $\mathbb{T}^m$ функции с мерой на торе (периодизация меры).

2.2. a) Если $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$, φ непрерывна п.в. на $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, а

$$\varliminf_{\varepsilon \to +0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(\mathbb{Z}_0)} = K < \infty,$$

то ее можно исправить в точках разрыва и доопределить в нуле по непрерывности, после чего $\|\varphi\|_{M(\mathbb{Z}^m)} = K$.

b) Если $\varphi \in C(\mathbb{R}^m)$, то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(\mathbb{Z}_0)} = \sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(\mathbb{Z}_0)} = \|\varphi\|_B = \|\varphi\|_{M(\mathbb{R}^m)}.$$

По поводу 2.1 и 2.2 см. [7] и [12].

Достаточные условия принадлежности $A(\mathbb{R}^m)$ и $A_p(\mathbb{T}^m)$ (аналоги теоремы С. Н. Бернштейна) хорошо известны (см. [14, 25, 8]). Необходимое условие принадлежности $A(\mathbb{R}^m)$ см. в [7].

2.3. a) Пусть $p \in (0,1]$ и $q = \left[\frac{m}{2} - \frac{m+1}{2}\right]$ (целая часть). Если финитная функция $f \in C^q(\mathbb{R}^m)$, а ее частная производная $D_{q,j}(f) = \frac{\partial^q f}{\partial x_j^q}$ как функция от x_j имеет ограниченное по остальным переменным число точек перегиба (точнее: точек, отделяющих интервалы выпуклости) и $\omega(D_{q,j};t)$ — модуль непрерывности в пространстве $C(\mathbb{R}^m)$, $1 \le j \le m$, то из условия

$$\max_j \int_0^1 t^{qp+(m+1)\left(\frac{p}{2}-1\right)}\,\omega^p\left(D_{q,j};t\right)dt < \infty$$

следует, что $f \in A_p(\mathbb{R}^m)$ (или $\hat{f} \in L_p(\mathbb{R}^m)$).

b) Если для всех $x \in \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \int\limits_{|x_j|\le|u_j|<\infty(1\le j\le m)} g(u)\,du, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^m} \operatorname*{ess\ sup}_{|u_j|\ge|v_j|(1\le j\le m)} |g(u)|\,dv < \infty,$$

то $f \in A(\mathbb{R}^m)$.

См. [7] и [27].

В одной теореме А. Берлинга [28] появилась алгебра

$$A^*(\mathbb{R}) = \left\{ f : f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(u)\,e^{-iux}\,du,\ \|f\|_{A^*} = \int_0^\infty \operatorname*{ess\ sup}_{|u|\ge v} |g(u)|\,dv < \infty \right\}.$$

Если $f \in C(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, $\quad h \in A^*(\mathbb{R})$ и для всех x и $t \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(x+t)| \le |h(x) - h(x+t)|,$$

то $f \in A(\mathbb{R})$ [28]. Новое доказательство этой теоремы, и сразу в кратном случае, см. в [7]. Именно эта теорема используется при доказательстве 2.3b). См. также ниже 3.3.

В случае $p \in (0,1)$ и спектра $\mathbb{Z}_+^m$ (пространства Харди) справедливы следующие предложения (см. еще 1.10).

2.4. a) Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}^m)$ и равна нулю вне параллелепипеда $[-n_1,n_1]\times\ldots\times[-n_m,n_m]$. Если при некотором $p \in (0,1]$ $\hat{\varphi} \in L_p(\mathbb{R}^m)$, то

$$\sup_{\varepsilon>0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}_{k\in\mathbb{Z}^m}\|_{M_p(\mathbb{Z}^m)} \le \gamma(m,p)\left(\prod_{j=1}^m n_j\right)^{\frac{1}{p}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\hat{\varphi}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

b) Если $\sup\limits_{\varepsilon>0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}_{k\in\mathbb{Z}_+^m}\|_{M_p(\mathbb{Z}_+^m)} < \infty$, то для любой точки с положительными координатами существует финитная функция ψ, которая совпадает с φ в некоторой окрестности этой точки и $\hat{\psi} \in L_p(\mathbb{R}^m)$.

c) Пусть, как и ранее, $p \in (0,1]$, а $\varphi \in C^r(\mathbb{R}_+^m)$ при некотором $r > m\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$. Если еще

$$|\varphi(x)| \le \frac{A}{1+|x|^\alpha}, \quad \sum_{j=1}^m \left|\frac{\partial^r \varphi}{\partial x_j^r}(x)\right| \le \frac{B}{1+|x|^\beta},$$

где $\alpha > 0$, а $\beta = r + \alpha$ или $\alpha = \beta > m\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$, то

$$\sup_{\varepsilon>0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}_{k\in\mathbb{Z}_+^m}\|_{M_p(\mathbb{Z}_+^m)} \le \gamma(m,p,r,\alpha,\beta)\ (A+B).$$

См. [21]. Эти результаты и их применение (см., напр, ниже 4.7) относятся к пространству Харди $H_p(D^m)$ на поликруге. Вит. В. Волчков [29] доказал подобные теоремы для пространства Харди на шаре $\{z : \sum\limits_{j=1}^m |z_j|^2 < 1\}$ в $\mathbb{C}^m$, а А. В. Товстолис [30] — на конусах в $\mathbb{R}^m$. Вит. В. Волчков, в частности, показал точность на классе условий на α и β в 2.4c) при $\alpha = \beta$.

При условиях типа выпуклости имеются и более точные результаты, включая асимптотику.

2.5. a) Пусть f локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$, равна нулю при $x < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, а

$$\|f\|_{V^*} = \int_0^\infty \operatorname{ess}\sup_{u\ge v} |f'(u)| dv < \infty.$$

Тогда для любого $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\hat{f}(y) = -\frac{i}{y\sqrt{2\pi}} f\left(\frac{\pi}{2|y|}\right) + F(y), \quad \|F\|_1 \le c\|f\|_{V^*}.$$

b) Пусть $f(x) = f_0(|x|)$, $f_0 \in C^{m_1}[0,\pi]$ при $m_1 = \left[\frac{m-1}{2}\right]$ и производная $f_0^{(m_1)}$ выпукла на $[0,\pi]$, а $|f_0^{(m_1+1)}(0)| < \infty$. Для того, чтобы $f \in A(\mathbb{R}^m)$ (или $\hat{f} \in L(\mathbb{R}^m)$), необходимо и достаточно:

$$\left|\int_0^\pi u^{-\frac{m+1}{2}}\, f_0(\pi - u)\, du\right| < \infty.$$

См. [27]. Как заметил И. Р. Лифлянд, условие $|f_0^{(m_1+1)}(0)| < \infty$ можно опустить. Им же получена асимптотика преобразования Фурье в более общем случае [31].

Очевидно, что если $f \in B(\mathbb{R}^m)$, а мера μ в представлении f положительная, то $\|f\|_B = f(0)$. И наоборот, если $\operatorname{var}\mu = f(0) = \int d\mu$, то мера положительная. Обозначим эту подалгебру алгебры $B(\mathbb{R}^m)$ через $B^+(\mathbb{R}^m)$. В силу теоремы Бохнера-Хинчина в нее входят только функции непрерывные и положительно определенные. А в силу теоремы Пойя в $B^+(\mathbb{R})$ входят все четные, положительные, убывающие и выпуклые на $[0,+\infty)$ функции. Это утверждение эквивалентно тому, что $(1-|x|)_+ \in B^+(\mathbb{R})$ (см., напр., [32]). А если еще $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, то $f \in A^*(\mathbb{R})$ (определение см. перед 2.4). Справедливо следующее обобщение теоремы Пойя на радиальные функции m переменных [33, 34].

2.6. Пусть $n = \left[\frac{m+2}{2}\right]$ (целая часть). Если $f_0 \in C[0,+\infty)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f_0(t) \ge 0$, $f_0 \in C^{n-1}(0,+\infty)$, $(-1)^{n-1} f_0^{(n-1)}$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$ и

$$\lim_{t\to+0} t^n f_0^{(n)}(t) = \lim_{t\to+\infty} t^n f_0^{(n)}(t) = 0$$

(имеется в виду, напр., правая производная), то $f_0(|x|) \in B^+(\mathbb{R}^m)$.

Отметим еще, что в [34] приведен и новый критерий положительной определенности.

Нельзя не отметить здесь же, что В. П. Заставный [35] решил проблему Шёнберга о положительной определенности функции $\exp(-\|x\|^\alpha)$ в случае пространств l_m^p, L_p, C. Ему же принадлежит описание множества нулей преобразования Фурье индикатора плоского выпуклого тела [36].

Приведем еще примеры точного вычисления нормы в $B(\mathbb{R})$.

2.7. a) Если $f \in B(\mathbb{R})$, $f(-x) = \overline{f(x)}$ $(x \in \mathbb{R})$ и существует $x_0 \ne 0$: $f(x_0) = \|f\|_B$, то

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi x}{x_0}} \quad \Big((-1)^k c_k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z}\Big).$$

(обратное утверждение очевидно).

b) Пусть функция f имеет период $T = 2l$ и при некоторых $h \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{C}$ функция $f(x+h) - a$ — четная, выпуклая на $[-l,l]$ и с интегралом по $[-l,l]$ равным нулю. Тогда $\|f\|_B = |a| + |f(l) - a|$.

c) Если четная функция f представима в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g(t)\,dt,$$

где четная функция $g \in L[0,+\infty)$ и убывает на $[0,+\infty)$, то и $f_1(x) = xf(x) \in B(\mathbb{R})$ и $\|f_1\|_B = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\,dx$.

Утверждение а) есть, по сути, в [32].

3. Регулярность методов суммирования рядов Фурье и сравнение их по норме

Пусть $f \in L(\mathbb{T}^m)$ и $\sum \hat{f}(k)e_k$ — ее тригонометрический ряд Фурье. Рассмотрим матрицу $\{\lambda_{n,k}\}$ при $n \in \mathbb{Z}_+^m$ и $k \in \mathbb{Z}^m$ и введем полиномиальные средние

$$\Lambda_n^0(f) = \sum_{\substack{|k_j| \le n_j \\ (1 \le j \le m)}} \lambda_{n,k}\, \hat{f}(k)e_k.$$

При $\lambda_{n,k} = 1$ или 0 имеем разные частные суммы (кубические, шаровые и др.).

Пусть еще $E \subset L(\mathbb{T}^m)$. Метод суммирования называют регулярным в том или ином смысле, если при $n \to \infty$ для всех $f \in E$ $\Lambda_n^0(f) \to f$ во всех точках некоторого подмножества $\mathbb{T}^m$ или по норме, если в E введена таковая. Отметим только, что эта регулярность (F — регулярность) не связана с регулярностью по Тёплицу.

С. Бохнер ввел следующие шаровые средние типа Рисса ($n \in \mathbb{N}$)

$$S_n^\delta(f) = \sum_{|k| \le n} \left(1 - \frac{|k|^2}{n^2}\right)^\delta \hat{f}(k)e_k$$

и выяснил роль критического показателя $\delta = \frac{m-1}{2}$ при $m \ge 2$. Ch. Fefferman [83] доказал, что S_n^0 (шаровые частные суммы) сходятся на $L_p(\mathbb{T}^m)$ при $m \ge 2$ лишь при $p = 2$.

До сих пор не исследована полностью регулярность средних S_n^δ Бохнера-Рисса в $L_p(\mathbb{T}^m)$ $(m \ge 3, \delta > 0, p \in (1, +\infty))$. Если E — банахово пространство, то все упирается в ограниченность последовательности операторных норм $\|\Lambda_n^0\|$, называемых константами Лебега.

3.1. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ непрерывна п.в. на $\mathbb{R}^m$ и при любом $\varepsilon > 0$ $\{\varphi(k\varepsilon)\} \in M(\mathbb{Z}^m)$. Для того, чтобы при $\varepsilon \to 0$

$$\sum_k \varphi(k\varepsilon)\hat{f}(k)e_k \to f$$

на $L(\mathbb{T}^m)$ или $C(\mathbb{T}^m)$, необходимо и достаточно, чтобы после исправления в точках разрыва $\varphi \in B(\mathbb{R}^m)$ и $\varphi(0) = 1$ [7].

Примеры.

I. Средние типа Бохнера-Рисса, когда $\varphi(x) = \left(1 - \sum\limits_{j=1}^{m} |x_j|^\alpha\right)_+^\delta$, регулярны на $L(\mathbb{T}^m)$ и $C(\mathbb{T}^m)$ лишь в следующих случаях: $\alpha = 1, \delta > 0$; $\alpha > 0, \alpha \neq 1, \delta > \frac{m-1}{2}$. А в случае пространства $H_p(D^m), p \in (0,1]$ (функции со спектром на $\mathbb{Z}_+^m$), когда $\varphi(x) = (1-|x|^{2r})_+^\delta$, лишь в случае $\delta > \frac{m}{p} - \frac{m+1}{2}$.

II. Средние типа Бернштейна-Рогозинского на $\mathbb{T}^2$.

$$R_n(f,x) = R_n(f,W,\gamma,\mu,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} S_n\Big(f,W; x - \frac{\gamma u}{n}\Big)\,d\mu(u),$$

где при $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(f,W) = \sum_{k \in nW} \hat{f}(k) e_k$$

частная сумма ряда Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^2)$, порожденная ограниченным множеством $W \subset \mathbb{R}^2, \gamma > 0$, μ — конечная комплекснозначная борелевская мера на $\mathbb{R}^2$ и $\int_{\mathbb{R}^2} d\mu = 1$.

В частном случае, когда W — круг, а мера μ равномерно распределена по его границе ∂W, средние R_n исследовали S. Minakshisundaram и K. Chandrasekharan [84]. Если мера μ имеет компактный носитель, а W — ограниченное связное множество, содержащее некоторую окрестность нуля, удовлетворяет еще двум условиям: двумерная мера ∂W равна нулю и в любой окрестности граничной точки есть внутренние точки W и $\mathbb{R}^2 \backslash W$, то для регулярности R_n в $C(\mathbb{T}^2)$ необходимо и достаточно:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\gamma(x,u)}\,d\mu(u) = 0 \quad (x \in \partial W).$$

Необходимость следует из 3.1, достаточность — [37]. Случай многоугольника W и дискретной меры μ исследован Ю. Л. Носенко [46].

Пусть теперь $\{\nu_k\}_0^\infty$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |f(x) - S_{\nu_k}(f;x)| = 0?$$

R. Salem, поставивший этот вопрос, доказал, что для выполнения этого равенства для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ достаточно, чтобы последовательность имела степенной рост. Ему же принадлежит и необходимое условие.

3.2. a) Если последовательность $\{\nu_k\}_0^\infty$ выпукла, т.е. $\nu_{k+2}-2\nu_{\nu+1}+\nu_k \geq 0$ для $k \geq 0$, то для того, чтобы имело место указанное предельное равенство для всех $f \in C(\mathbb{T})$ (всюду или равномерно на $\mathbb{T}$), необходимо и достаточно: $\log \nu_n = O(\sqrt{n})$.

b) В кратном случае, когда в качестве $S\nu_k$ берутся кубические частные суммы ряда Фурье f, при тех же условиях ответ такой: $\log \nu_n = O(n^{\frac{1}{2m}})$.

c) При $m=1$ и $\nu_k = [2^{k^\alpha}]$ нельзя взять $\alpha > \frac{1}{2}$ даже в том случае, когда знак модуля вынесен за знак суммы (приближение средними арифметическими частных сумм с пропусками).

a) — [38] и независимо L. Carleson ([39]), b) — [40], c) — [41]. Неизвестен подобный критерий для сходимости в точках Лебега любой функции $f \in L(\mathbb{T}^m)$, т.е. в точках, где

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{r^m} \int\limits_{|x-x_0|<r} |f(x)-f(x_0)|\, dx = 0.$$

3.3. Пусть $\varphi \in B(\mathbb{R}^m)$. Для того, чтобы для любой функции $f \in L(\mathbb{T}^m)$ имела место суммируемость ее ряда Фурье методом, определяемым функцией φ (см. 3.1), во всех точках Лебега f, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(0) = 1$ и $\varphi \in A^*(\mathbb{R}^m)$ (определение A^* см. перед 2.4).

[42]. Свойства и др. применения алгебры A^* см. в [43].

Сравним теперь классические методы суммирования по их аппроксимативным свойствам для индивидуальных функций.

Определение средних Чезаро σ_n^α порядка $\alpha > 0$ и средних Абеля-Пуассона f_r см. в [14].

3.4. Для любого $\alpha > 0$ и $f \in L_p(\mathbb{T})$ $\quad (p \in [1, +\infty])$

$$\gamma_1(\alpha)\, \|f - f_r\|_p \leq \|f - \sigma_n^\alpha(f)\|_p \leq \gamma_2(\alpha)\, \|f - f_r\|_p,$$

где $r \in (0,1)$, а $n = \left[\frac{1}{1-r}\right]$ (целая часть).

Впервые такое сравнение методов суммирования введено автором [6] и независимо H. Shapiro [44].

Г. Х. Харди установил, что методы Рисса, которые определяются функцией-множителем $\varphi(x) = (1-|x|^\alpha)_+^\delta$, в применении к числовым рядам становятся сильнее с ростом δ (α — фиксировано) и эквивалентны между собой (из суммируемости одним из них следует суммируемость другим) при разных α (δ — фиксировано). Сравнение методов суммирования функциональных рядов в 3.3 (и подобных случаях) иного типа. Для тех же методов Рисса в применении к рядам

Фурье получилась другая картина: с ростом δ ничего не меняется (см. ниже 3.6а), а с ростом α происходит улучшение скорости сходимости.

Подобные 3.4 утверждения справедливы для рядов Фурье-Уолша, напр., [45]. Обобщения на банаховы пространства см. в [20]. Интересно было бы получить подобные соотношения для разложений функций на отрезке в ряды по полиномам Якоби, например, с переменой веса и с учетом положения точки.

Сформулируем теперь общий принцип сравнения двух мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье.

3.5. $\Phi(f) \sim \sum \varphi(k)\hat{f}(k)e_k, \quad \Psi(f) \sim \sum \psi(k)\hat{f}(k)e_k.$
Пусть $S_0 = \{k \in \mathbb{Z}^m : \varphi(k) = 0\}$.

a) Если $\psi(k) = 0$ для $k \in S_0$ (это и необходимо) и $K{=}\inf \left\|\left\{\frac{\psi(k)}{\varphi(k)}\right\}\right\|_M$ $< \infty$ (нижняя грань относится к выбору значений дробей $\frac{0}{0}$), то для любой функции f, такой, что $\Phi(f) \in C(\mathbb{T}^m)$ $\quad \|\Psi(f)\|_\infty \le K\,\|\Phi(f)\|_\infty$. И наоборот, если выполнено это последнее неравенство для любой функции f, такой, что $\Phi(f) \in C(\mathbb{T}^m)$, и $\left\{\frac{1}{\varphi(k)}\right\} \in M(\mathbb{Z}^m \backslash S_0)$, то

$$\inf_{\frac{0}{0}} \left\|\left\{\frac{\psi(k)}{\varphi(k)}\right\}\right\|_M = \min_{\frac{0}{0}} \left\|\left\{\frac{\psi(k)}{\varphi(k)}\right\}\right\|_M \le K.$$

b) Если Φ — компактный оператор в $C(\mathbb{T}^m)$ и равенство $\varphi(k) = 1$ влечёт $\psi(k) = 1$, то для любой функции $f \in C(\mathbb{T}^m)$

$$\|f - \Psi(f)\|_\infty \le K\,\|f - \Phi(f)\|_\infty.$$

тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{\frac{0}{0}} \left\|\left\{\frac{1-\psi(k)}{1-\varphi(k)}\right\}\right\|_M \le K$.

Пример. Из непрерывности функции $D_{2r}(f) = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^{2r}}$ при $r \ge 2$ и $m \ge 2$ не следует непрерывность $\Delta^r f (\Delta$ — оператор Лапласа).

Для доказательства считаем функции периодическими и сравниваем ряды Фурье D_{2r} и Δ^r. Тогда в силу 3.5а), 2.2а) и 2.1в) функция $\varphi(x) = (\sum x_j^2)^r \cdot (\sum x_j^{2r})^{-1}$ должна иметь предел при $x \to 0$. Но эта функция однородная нулевой степени и,значит, должна быть константой, чего быть не может при $r \ge 2$ и $m \ge 2$.

3.6. a) Пусть φ — функция ограниченной вариации на $[0,1]$ и удовлетворяет условию Липшица степени $\alpha > 0$, а $0 = \varphi(1) \le \varphi(x) < \varphi(0)$ на $(0,1)$. Тогда для любого $\delta > 1$, а если φ — кусочно-монотонна на $[0,1]$, то и для любого $\delta > 0$

$$\left\|f - \sum_{k=-n}^{n} \varphi^\delta\left(\frac{|k|}{n}\right)\hat{f}(k)e_k\right\|_\infty \asymp \left\|f - \sum_{k=-n}^{n} \varphi\left(\frac{|k|}{n}\right)\hat{f}(k)e_k\right\|_\infty$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f и n).

b) Пусть $r \in \mathbb{N}$, а $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Для того, чтобы для любой функции с абсолютно непрерывной производной $f^{(r-1)}$ и $\|f^{(r)}\|_\infty < \infty$ и любом $n \in \mathbb{N}$

$$\Big\|f - \sum_k \varphi\Big(\frac{k}{n}\Big)\, \hat{f}(k)e_k\Big\|_\infty \le \frac{K}{n^r}\,\|f^{(r)}\|_\infty$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $g(x) = (1-\varphi(x))x^{-r}$ принадлежала $B(\mathbb{R})$. При этом наименьшее значение K равно $\|g\|_B$.

Другие применения принципа сравнения см. в п.п.4–5.

Известно, что замкнутая система гармоник $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является минимальной в $L_p(\mathbb{T})$ при любом $p \ge 1$. Иначе обстоит дело при $p \in (0,1)$. В. И. Иванов и В. А. Юдин [85] показали, что если из $\mathbb{Z}$ выбросить бесконечную последовательность с отношением соседних членов, которое стремится к ∞, то система остается замкнутой, а если выбросить арифметическую прогрессию — нет.

Каков критерий замкнутости системы гармоник в $L_p(\mathbb{T})$ при $p \in (0,1)$?

4. K-функционалы и модули гладкости. Двусторонние оценки приближения функций

Общее определение K-функционала пары пространств см. во введении, а обозначения — в начале п.1.

Рассмотрим дифференциальный оператор d_r, определяемый матрицей $\{\mu_{k,r}\}_{k\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}}$ ($\mu_{k,r} \ne 0$, $\lim\limits_{|k|\to\infty} \mu_{k,r} = \infty$):

$$d_r f \sim \sum_{k\ne 0} \mu_{k,r}\hat{f}(k)e_k$$

(в случае $\mu_{k,r} = -|k|^{2r}$ — это полигармонический оператор Δ^r). $W(d_r)_p = \{f \in L_p(\mathbb{T}^m) : d_r f \in L_p(\mathbb{T}^m)\}$. Когда

$$K(\varepsilon, f, L_p, W(d_r)_p) \asymp \|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_p?$$

Здесь $\Phi_\varepsilon(f) \sim \sum\limits_k \varphi(k\varepsilon)\hat{f}(k)e_k$. В случае финитной функции φ имеем приближение f полиномами.

4.1. (Лемма)

Если существует константа γ, не зависящая от f и $\varepsilon > 0$, такая, что

a) $\|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_p \le \gamma\varepsilon\|d_r f\|_p$ (в предположении $d_r f \in L_p(\mathbb{T})$),

b) $\sup\limits_{\varepsilon>0} \|\Phi_\varepsilon(f)\|_p \le \gamma\|f\|_p$,

c) $\varepsilon\,\|d_r f\|_p \le \gamma\|f-\Phi_\varepsilon(f)\|_p$ (в предположении $d_r f \in L_p(\mathbb{T})$), то

$$K(\varepsilon, f, L_p, W(d_r)_p) \asymp \|f-\Phi_\varepsilon(f)\|_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f и ε).

Доказательство простое.

Оценка сверху.

$$K(\varepsilon, f, L_p, W(d_r)) \le \|f-\Phi_\varepsilon(f)\|_p + \varepsilon\,\|d_r(\Phi_\varepsilon(f)\|_p$$

и нужно применить неравенства c), a) и b).

Оценка снизу. Применяем b) и a)

$$\begin{aligned}\|f-\Phi_\varepsilon(f)\|_p &= \|(f-g)-\Phi_\varepsilon(f-g)+(g-\Phi_\varepsilon(g))\|_p \le \\ &\le (1+\gamma)\,\|f-g\|_p + \gamma\varepsilon\,\|d_r g\|_p \le (1+\gamma)\,(\|f-g\|_p+\varepsilon\,\|d_r g\|_p).\end{aligned}$$

Осталось взять нижнюю грань по $g \in W(d_r)_p$.

Таким образом, вопрос о формуле для K-функционала сводится к построению линейных процессов аппроксимации $\Phi_\varepsilon(f)$ с указанными свойствами a–c. А это можно сделать применением теорем о мультипликаторах. Кстати, часто из условия a) в лемме следует b) с другой константой (см. [47]).

Для описания порядка приближения функций конечной гладкости уже давно используются модули гладкости ω_r (см., напр., [2, 3, 4]).

Начнем с одномерного случая.

Если $f \in L_p[a,b]$, то при $r \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, \frac{b-a}{r}]$ $\quad(-\infty \le a \le b \le +\infty)$

$$\omega_r(f,h)_p = \sup_{0<\delta\le h}\left(\int\limits_a^{b-r\delta}\left|\sum_{\nu=0}^{r}\binom{r}{\nu}(-1)^\nu f(x+\nu\delta)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(под знаком модуля — r-разность $\Delta_\delta^r f(x)$).

Считаем далее, что $L_\infty[a,b] = C[a,b]$.

В случае 2π-периодических функций — интеграл по периоду $\mathbb{T} = [-\pi,\pi]$.

4.2. a) $\omega_r(f,h) \le Mh^r$ ($p \in [1,+\infty]$) в том и только том случае, когда f после возможного исправления на множестве нулевой меры имеет абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ и $\|f^{(r)}\|_p \le M$ $(1 < p \le \infty)$ или при $p = 1$ имеет производную $f^{(r-1)}$ с полной вариацией не больше M. При этом всегда

$$\lim_{h\to+0}\frac{\omega_r(f,h)_p}{h^r} = \sup_{0<h\le\frac{b-a}{r}}\frac{\omega_r(f,h)_p}{h^r}.$$

b) При $p \in (0,1)$ $\quad \omega_r(f,h)_p \le M h^{r-1+\frac{1}{p}}$ в том и только в том случае, когда после исправления функции на множестве нулевой меры $f^{(r-1)}$ является ступенчатой функцией и при $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f^{(r-1)}(x_k) - f^{(r-1)}(x_{k+1})|^p \le M^p \left(\int\limits_0^r |\frac{1}{(r-1)!}\Delta_1^r(-t)_+^{r-1}|^p dt \right)^{-1}.$$

Для любой функции из L_p

$$\lim_{h\to+0} \frac{\omega_r(f,h)_p}{h^{r-1+\frac{1}{p}}} = \sup_{0<h\le\frac{b-a}{r}} \frac{\omega_r(f,h)_p}{h^{r-1+\frac{1}{p}}}.$$

Утверждение a) доказано давно (см. [11]), а утверждение b) — совсем недавно студентом ДонНУ Ю. С. Коломойцевым [48].

Х. Уитни (1957) доказал, что при $b-a<\infty$ и $r\in\mathbb{N}$ (p_s — алгебраический полином степени не больше s)

$$E_{r-1}\left(f;a,b\right) = \min_{p_{r-1}} \max_{[a,b]} |f(x) - p_{r-1}(x)| \le \gamma(r)\omega_r(f;\frac{b-a}{r})_\infty.$$

Новейший результат: $\gamma(r) \le 2 + \frac{1}{e}$ (Ю. В. Крякин и И. А. Шевчук — статья в печати), а наименьшая константа при $r \ge 9$ еще не найдена.

Ю. А. Брудный [86] обобщил эту теорему Уитни на пространство $L_p(1 \le p < \infty)$ и функции нескольких переменных, а Э. А. Стороженко — на $L_p(0<p<1)$ (её доказательство методом от противного изложено в [4, с. 374]).

Приведем некоторое уточнение этой теоремы (добавляется эрмитовская интерполяция и учитывается положение точки).

4.3. Пусть $\{x_s\}_1^q$ — различные точки из $[-1,1]$, а $X_1(x) = \prod\limits_{s=1}^q (x - x_s)$. Для любых целых $r \ge 0$ и $k \ge 1$, для любой функции $f \in C^r[-1,1]$ существует алгебраический полином $h = h(f)$ степени не выше $\max\{q(r+1)-1, k+r-1\}$, удовлетворяющий при $x \in [-1,1]$ и $\nu \in [0,r]$ неравенствам

$$|f^{(\nu)}(x) - h^{(\nu)}(x)| \le \gamma(k,r,X_1)|X_1(x)|^{r-\nu}\,\omega_k(f^{(r)};|X_1(x)|^{\frac{1}{k}}).$$

В случае $k=(q-1)(r+1)+1$, когда полином h является эрмитовским интерполяционным полиномом, это предложение при $\nu=0$ доказано И. Е. Гопенгаузом [49]. Общий случай см. в [50].

4.4. Для любого $r \in \mathbb{N}$ можно указать финитную функцию $\varphi = \varphi_r$, такую, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ $\quad (p \in [1, +\infty])$ и $\varepsilon > 0$

$$\left\| f - \sum_k \varphi(k\varepsilon)\hat{f}(k)e_k \right\|_p \asymp \omega_r(f;\varepsilon)_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от r). При четном r можно взять $\varphi(x) = (1 - |x|^r)_+$, а при нечетном — $\varphi(x) = (1 - |x|^{r+1}) + i|x|^r(1 - |x|)_+ \cdot \operatorname{sign} x$.

Отметим сразу, что все условия леммы 4.1 при $d_r f = f^{(r)}$ для функции φ выполняются (см. пример во введении).

Оценка приближения сверху — это общая прямая теорема (см. [2]–[4]), а такая же оценка снизу получена автором первоначально с использованием сумм типа Рогозинского-Бернштейна (см., напр., [3, п. 5, гл. V]). Можно описать все полиномы (или функции φ) с указанным в теореме 4.4 свойством. Кроме того, подобные утверждения (двусторонние оценки) найдены для всех классических методов суммирования рядов Фурье (см. [47, 51]). См. также [52].

Доказательство 4.4 приводится ниже (см. после 4.6).

Рассмотрим еще вопрос об определении точного порядка убывания наилучших приближений периодических функций

$$E_n^T(f)_p = \min_{\{a_k\}} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \right\|_p$$

в зависимости от поведения разных модулей гладкости f.

4.5. Для того, чтобы $E_n^T(f)_p \asymp \omega_r(f;\frac{1}{n})_p$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega_r(f,h)_p = O(\omega_{r+1}(f,h)_p) \quad (h \to +0).$$

[53].

Введем теперь удобный для применения мультипликаторов линеаризованный модуль гладкости функций из $L_p (1 \le p \le \infty)$:

$$\tilde{\omega}_r(f,h)_p = \left\| \frac{1}{h} \int\limits_0^h \Delta_\delta^r f(\cdot)\, d\delta \right\|_p$$

(точная грань по $\delta \in (0,h]$ заменена интегральным средним по шагу δ). Очевидно, что $\tilde{\omega}_r(f,h)_p \le \omega_r(f,h)_p$.

Аналогично можно ввести модули $\omega_r(f,h)$ и $\tilde{\omega}_r(f,h)$ для любого $r>0$, если положить

$$\Delta_\delta^r f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{r}{\nu}(-1)^\nu f(x+\nu\delta),\quad \binom{r}{\nu}=\frac{r(r-1)\dots(r-\nu+1)}{\nu!}.$$

Тогда

$$\|\Delta_\delta^r f\|\le\|f\|\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\binom{r}{\nu}\right|=\|f\|\sum_{\nu=0}^{[r]}\binom{r}{\nu}(1+(-1)^{[r]+\nu}).$$

Неравенство является точным, во всяком случае, в пространстве C, а множитель при $\|f\|$ с ростом r строго возрастает.

По поводу разных определений производных дробного порядка и соотношений между ними см. [54].

Усредненная разность $\frac{1}{h}\int_0^h\Delta_\delta^r f(x)d\delta$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_r(kh)\,\hat{f}(k)e_k,\quad \psi_r(x)=\int\limits_0^1(1-e^{ixu})^r du.$$

Для применения $\tilde{\omega}_r$ важно, что $\psi_r(x)\ne0$ для всех $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. При $r\in\mathbb{N}$ это доказано автором [47] с использованием теоремы Линдемана о трансцендентности значений показательной функции. При $r\in(0,1)$ это следует из того, что $\mathrm{Re}(1-e^{iy})^r>0$ при $y\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (А. А. Довгошей).

4.6. Если $\psi_r(x)\ne0$ для $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, то при любом $p\in[1,+\infty]$

$$\omega_r(f,h)_p\le\gamma(r)\tilde{\omega}_r(f,h)_p.$$

Набросок доказательства теорем 4.4 и 4.6 при $r\in\mathbb{N}$.

Очевидно, что достаточно доказать неравенства

$$\sup_{\theta\in(0,1]}\|\Delta_{\theta\varepsilon}^r f\|\le\gamma_1(r)\,\|f-\Phi_\varepsilon(f)\|\le\gamma_2(r)\,\tilde{\omega}_r(f,\varepsilon)$$

при функции $\varphi=\varphi_r$ из 4.4. Следовательно, нужно проверить (см. 3.5 и 2.1а), что

$$\sup_{\theta\in(0,1]}\left\|\frac{(1-e^{i\theta x})^r}{1-\varphi(x)}\right\|_B<\infty,\quad \left\|\frac{1-\varphi}{\psi_r}\right\|_B<\infty$$

или, учитывая локальное свойство, что обе функции допускают продолжение (до функции из $B(\mathbb{R})$) как с отрезка $[-2,2]$, так и с внешности $[-1,1]$. На $[-2,2]$ обе функции удовлетворяют условию $\mathrm{Lip}\,1$

(первая — равномерно по $\theta \in (0,1]$). А при $|x| \geq 1$ можно учесть, что $\|(1-e^{i\theta x})^r\|_B \leq 2^r$ (линейная комбинация сдвигов), а $\psi_r \in B$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} \psi_r(x) = 1$ и, значит, по теореме Винера-Леви [25] и $\frac{1}{\psi_r} \in B$ (локально).

Отметим ещё, что из 4.6 следует точный порядок приближения функциями типа Стеклова.

Далее понадобятся новые модули гладкости. Отметим, что разные модули гладкости функций многих вещественных переменных другим методом исследовал М. Ф. Тиман (см. [55]), а аналитических функций на общих множествах комплексной плоскости — П. М. Тамразов (см. [26]).

Начнем с пространств Харди $H_p(D)$ на единичном круге D. Контурный или граничный модуль ($r \in \mathbb{N}, h > 0$)

$$\omega_r(f,h)_p = \sup_{0<\delta\leq h} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f((\cdot)e^{i\nu\delta}) \right\|_{H_p(D)}$$

(если f заменить на предельную функцию $f(e^{it})$, то и получим модуль на окружности $\partial D = \mathbb{T}$).

Радиальный модуль ($h \in \left(0, \frac{2}{r}\right]$)

$$\omega_r(f;\mathrm{rad};h)_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f(e^{it}(1-\nu h)) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

И наконец, линеаризованный граничный модуль ($q \in \mathbb{N}$)

$$\tilde{\omega}_r(f,h)_p = \left\| \int\limits_{[0,1]^q} \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f\Big((\cdot)e^{i\nu h\sum\limits_1^q u_j}\Big)\, du \right\|_{H_p}$$

(q — кратный интеграл по кубу).

Например, в известном неравенстве Харди и Литтльвуда о росте $|f^{(r)}|$ при подходе к границе ∂D лучше всего использовать радиальный модуль ω_r.

4.7. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,+\infty]$, $f \in H_p(D)$ и $h \in \left(0, \frac{1}{r+1}\right]$.

a) Если $q = 1$ для $p \geq 1$ и $q = \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right]$ для $p \in (0,1)$, то

$$\omega_r(f,h)_p \asymp \tilde{\omega}_r(f,h)_p.$$

b) Если $S_0(z) = 0$, а при $r \geq 2$ $S_{r-1}(z) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, z^k$, то

$$\omega_r(f;\mathrm{rad};h)_p \asymp \omega_r(f - S_{r-1};h)_p$$

(двусторонние неравенства с константами, зависящими лишь от r и p).

Отметим еще, что для двусторонних оценок приближения в круге при любом $r \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, +\infty]$ можно взять $\varphi(x) = (1 - x^r)_+$, $x \geq 0$ (ср. 4.4).

Радиальный и линеаризованный модули введены и изучены автором (см. [56]).

Переходим к кратному случаю функций в $L_p(\mathbb{T}^m)$ ($L_\infty = C$). Пусть $r \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}^m$ и $h > 0$,

$$\omega_r(f; E; h) = \sup_{u \in E} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f(\cdot + \nu h u) \right\|.$$

Для монотонности по h нужно предполагать, что E — звездное относительно нуля множество. Будем предполагать его еще компактным. Тогда наибольший в некотором смысле модуль получается, когда E — шар (полный модуль ω_r^0), а наименьший — когда E — отрезок, выходящий из нуля (модуль гладкости в заданном направлении). Обозначим через ω_r^+ модуль гладкости, определяемый множеством E, состоящим из m единичных отрезков вдоль осей стандартного базиса.

4.8. a) $r \in \mathbb{N}$, $p \in (1, +\infty)$. Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ и $\varepsilon > 0$

$$\left\| f - \sum_k \prod_{j=1}^{m} [1 - (k_j \varepsilon)^r]_+ \hat{f}(k) e_k \right\|_p \asymp \omega_r^+(f; \varepsilon)_p.$$

b) Ни при каком $r \in \mathbb{N}$ и $m \geq 2$ не может быть в $C(\mathbb{T}^m)$

$$\gamma_1(r, m, \varphi)\, \omega_r^+(f, \varepsilon)_\infty \leq \left\| f - \sum_k \varphi(k\varepsilon)\, \hat{f}(k) e_k \right\|_\infty \leq \gamma_2(r, m, \varphi)\, \omega_r^0(f, \varepsilon)_\infty$$

во всяком случае, если φ непрерывна на своем носителе — единичном кубе. См., напр., [27].

Так что обычные модули в $C(\mathbb{T}^m)$ (и $L(\mathbb{T}^m)$) при $m \geq 2$ не подходят. Ограничившись случаем четного r, введем линеаризованный модуль (μ — конечная борелевская комплекснозначная мера)

$$\tilde{\omega}_{2r}(f; \mu; h) = \left\| \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{\nu=0}^{2r} \binom{2r}{\nu} (-1)^\nu f(\cdot + (\nu - r) h u)\, d\mu(u) \right\|.$$

Если $d\mu = \chi_E\, du$ и E — единичный шар в $\mathbb{R}^m$, то будем писать $\tilde{\omega}_{2r}^0(f, h)$, а если $d\mu = \sum\limits_{1}^{m} \chi_{E_j}\, du_j$ и $E_j = [-1, 1]$ на оси Ox_j ($1 \leq j \leq m$), то пишем $\tilde{\omega}_{2r}^+(f, h)$. χ_E — индикатор множества E.

4.9. Для любых $r \in \mathbb{N}$, $\delta > \frac{m-1}{2}$ и $f \in C(\mathbb{T}^m)$

a) $\left\| f - \sum\limits_k (1 - |k|^{2r} \cdot \varepsilon^{2r})_+^\delta \hat{f}(k) e_k \right\|_\infty \asymp \tilde{\omega}^0_{2r}(f, \varepsilon)_\infty$.

b) $\left\| f - \sum\limits_k (1 - \varepsilon^{2r} \sum\limits_{j=1}^m k_j^{2r})_+^\delta \hat{f}(k) e_k \right\|_\infty \asymp \tilde{\omega}^+_{2r}(f, \varepsilon)_\infty$.

Отметим только, что такие же неравенства справедливы, конечно, и в $L_p(\mathbb{T}^m)$ $(1 \le p < \infty)$, эти модули почти монотонны по h и, напр., $\tilde{\omega}^0_{2r}(f, h)_\infty = O(h^{2r})$ $(h \to 0)$ тогда и только тогда, когда $\Delta^r f \in L_\infty(\mathbb{T}^m)$. По поводу 4.8 и 4.9 см. [7].

Сравним теперь разные модули.Введем еще модифицированную разность ($e^0_{j,m}$ — орт оси Ox_j)

$$\Delta^+_{2r,\delta} f(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=0}^{2r} \binom{2r}{\nu} (-1)^\nu f(x + (\nu - r)\delta e^0_{j,m})$$

(при $r = 1$ соответствующий этой разности модуль и для подобных целей в $C(\mathbb{T}^m)$ использовался ранее в [57]).

4.10. a) $r \in \mathbb{N}$, $p \in (1, +\infty)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $h > 0$

$$\tilde{\omega}^0_{2r}(f; h)_p \asymp \omega^0_{2r}(f, h)_p.$$

b) при $m \ge 2$ и $r \ge 2$ модули $\tilde{\omega}^0_{2r}$ и $\tilde{\omega}^{\square}_{2r}$ (E — единичный куб) при $h \to 0$ не сравнимы на $C(\mathbb{T}^m)$.

c) если E обладает следующей симметрией: при перестановке местами любых двух координат или перемене знака любой из координат точка остается в E, то для любого $p \in [1, +\infty]$

$$\tilde{\omega}_2(f; E, h)_p \asymp \tilde{\omega}^0_2(f, h)_p.$$

d) при $r \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, +\infty]$

$$\tilde{\omega}^+_{2r}(f, h)_p \asymp \sup_{0 < \delta \le h} \|\Delta^+_{2r,\delta} f(\cdot)\|_p, \quad \tilde{\omega}^0_{2r}(f, h)_p \asymp \sup_{0 < \delta \le h} \|(\Delta^+_{2,\delta})^r f(\cdot)\|_p.$$

См. [7] и [27].

Подходящий модуль гладкости нецелого порядка r введен автором в [58] (см. ниже 4.12).

Приведем еще двустороннюю оценку приближения средними Марцинкевича двойных рядов Фурье (получена О. И. Кузнецовой в [58]).

4.11. Если $S^{\square}_n(f)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ — квадратная частная сумма ряда Фурье функции $f \in C(\mathbb{T}^2)$, то

$$\left\| f - \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S^{\square}_\nu(f) \right\|_\infty \asymp \left\| \int\limits_1^\infty \left(\Delta^2_{\frac{1}{n}(e^0_{1,2} + e^0_{2,2})} + \Delta^2_{\frac{1}{n}(e^0_{1,2} - e^0_{2,2})} \right) f(\cdot) \frac{dt}{t^2} \right\|_\infty.$$

Теперь по указанной в лемме 4.1 схеме получаем формулы для K-функционалов разных пар пространств гладких функций (см. [59] и [27] и имеющиеся там ссылки).

4.12. Пусть $W^r = \{f \in C(\mathbb{T}) : f^{(r)} \in L_\infty\}$ и r — нецелое > 0. Тогда

$$K(\varepsilon^r; f, C, W^r) \asymp \tilde{\omega}_r(f, \varepsilon),$$

где

$$\tilde{\omega}_r(f,h) = \left\| \int\limits_1^\infty \left(\dot{\Delta}_{hu}^{2s} + \gamma \dot{\Delta}_{hu}^{2s+1} \right) f(\cdot) \frac{du}{u^{1+r}} \right\|_\infty,$$

$s \in \mathbb{N}, 2s > r$, $\dot{\Delta}_\delta f(x) = f(x+\delta) - f(x-\delta)$, а

$$\gamma = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{r\pi}{2} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2s} t}{t^{1+r}}\, dt \left(\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2s+1} t}{t^{1+r}}\, dt \right)^{-1}.$$

(при замене C на L_p при $p \in (1, +\infty)$ можно считать $\gamma = 0$).

4.13. Если Δ — оператор Лапласа, а $D_{2r} = \sum\limits_{j=1}^m \frac{\partial^{2r}}{\partial x_j^{2r}}$, то при любом $p \in [1, +\infty]$ и $\varepsilon > 0$ $(r \in \mathbb{N})$

a) $K(\varepsilon^{2r}; f, L_p, W(\Delta^r)) \asymp \tilde{\omega}_{2r}^0(f, \varepsilon)_p$,

b) $K(\varepsilon^{2r}; f, L_p, W(D_{2r})) \asymp \tilde{\omega}_{2r}^+(f, \varepsilon)_p$.

Подобные утверждения справедливы для тех же операторов Δ^r и D_{2r} в пространствах Харди при $p \in (0,1)$ на поликруге [21], на шаре в $\mathbb{C}^m$ [60], на конусах в $\mathbb{R}^m$ [30].

См. также [77].

Аналогичные задачи для гиперболических операторов (а не эллиптических) являются более трудными (см. [61]).

4.14. [62]. Пусть $D_r = \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_m}}{\partial x_1^{r_1}\ldots\partial x_m^{r_m}}$ — смешанная производная, где для определенности $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_m$. Будем предполагать, что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx_j = 0$ $(1 \le j \le m)$, и положим при $s \in \mathbb{Z}_+^m$

$$\delta_s(f) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e_k, \quad \rho(s) = \{k \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, 1 \le j \le m\}.$$

Тогда в случае $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = 2^n$ и $p \in (1, +\infty)$ (J — единичный оператор)

$$K(\varepsilon^{r_1}, f, L_p, W(D_r)) \asymp \left\| f - \sum_{(s,r) \le r_1 n} \left(J - \frac{1}{2^{r_1 \cdot n}} D_r \right) \delta_s(f) \right\|_p.$$

См. также [5]. Вопрос о таких неравенствах при $p = 1$ и $p = \infty$ остаётся открытым.

Приведем еще одну двустороннюю оценку приближения функций из $H_p(D)$ ($E_n(f)_{H_p}$ — наилучшее приближение f многочленами степени не выше n в $H_p(D)$).

4.15. [62]. Для любого $p \in (0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left\|f(\cdot)-\sum_{\nu=0}^{k}\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}-1}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}(\cdot)^{\nu}\right\|_{H_p} \asymp \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}E_k(f)_{H_p}.$$

Поскольку приведенные теоремы доказываются методом мультипликаторов, а условия на мультипликаторы в $L_p(\mathbb{T}^m)$ и $L_p(\mathbb{R}^m)$ часто одинаковы (см. 1.3–1.4), то точно такие же результаты справедливы и для непериодических функций на $\mathbb{R}^m$. Вместо методов суммирования рядов Фурье — методы суммирования интегралов Фурье с той же функцией — множителем φ, а вместо тригонометрических полиномов — функции с компактным спектром, т.е. целые функции g_σ экспоненциального типа не выше σ.

Например, в неравенстве 5.8 (см. ниже) можно вместо n поставить $\sigma > 0$, а вместо полинома T_n — функцию g_σ. См. также пример в 5.9, который показывает разницу между периодическим и непериодическим случаями.

Отметим еще, что для непрерывных периодических функций вместо методов суммирования рядов Фурье можно взять такие же средние рядов Фурье-Лагранжа, т.е. полиномы интерполяционного типа (см. [14, гл. X]).

Пример. Если $f \in C(\mathbb{T})$, $S_n(f)$ — частная сумма Фурье, а полином $\tilde{\tau}_n$ определяется условиями: $\tilde{\tau}_n(x_k) = \frac{1}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1}))$ при $|k| \le n$ ($x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$), то

$$\left\|f - \frac{S_n(f;\cdot) + S_n(f;\cdot + \frac{2\pi}{2n+1})}{2}\right\|_\infty \asymp \|f - \tilde{\tau}_n(f)\|_\infty \asymp \omega\Big(f; \frac{\pi}{n}\Big)_\infty.$$

Аналогичные утверждения справедливы и в $C(\mathbb{R})$.

Приведем теперь два вопроса.

В каких пространствах Орлича $\varphi(L)$ (определение см., напр., в [14]) справедлива теорема типа Джексона:

$$E_n^T(f)_\varphi \le \gamma\omega\big(f; \frac{1}{n}\big)_\varphi?$$

См. [70]. Дело в том, что К. В. Руновский в приложении к диссертации,которую он защитил в Германии,привел пример, когда такое неравенство неверно.

Как определить модуль $\tilde{\tilde{\omega}}$, чтобы для $f \in C(\mathbb{T})$ выполнялось неравенство

$$\Big\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|f(\cdot)-S_n(f;\cdot)|\Big\|_\infty \asymp \tilde{\tilde{\omega}}\Big(f,\frac{1}{n}\Big)?$$

Есть другой метод доказательства двусторонних оценок приближения и вычисления K-функционалов. Его достоинством является то, что он применим и к нелинейным операторам. По поводу второго условия в следующей лемме см. 5.8.

4.16. (Лемма).

Из неравенств

$$E_n^T(f)=\|f-T_n^*\|\le\gamma_1(r)\,\omega_r\big(f;\frac{\pi}{n}\big),\quad \omega_r\big(T_n;\frac{\pi}{n}\big)\le\gamma_2(r)\,\|\Delta^r_{\frac{\pi}{n}}\,T_n\|$$

следует, что

$$\gamma_3(r)\,\omega_r\big(f;\frac{\pi}{n}\big)\le\|f-T_n^*-\Delta^r_{\frac{\pi}{n}}T_n^*\|\le\gamma_4(r)\,\omega_r\big(f,\frac{\pi}{n}\big).$$

См., напр., в [3, окончание гл. 5].

В случае функций на отрезке вещественной оси имеются подобные результаты о приближении сплайнами степени $r-1$ на равномерной сетке.

5. Точные и асимптотически точные результаты о константах Лебега и приближении классов функций

Для определения нормы мультипликатора, т.е. свертки функции с мерой, в пространстве C нужно уметь определять полную вариацию меры. А чтобы найти меру по ее преобразованию Фурье можно применить формулу Винера для определения дискретной части (атомов) (см., напр., [8, 1.4]) и известную формулу обращения для непрерывной меры (см., напр., [32]). Если мультипликатор компактный, то мера абсолютно непрерывна (см. в п.1) и нужно уметь вычислять L-норму тригонометрического ряда в периодическом случае $C(\mathbb{T})$ и L-норму преобразования Фурье для функций на всем пространстве. Есть примеры точного вычисления (см. 2.7), но их мало. Важно уже, если удается найти асимптотику (или даже только точный рост) последовательности норм мультипликаторов (см., напр., ниже 5.1–5.2).

Здесь, кроме 5.1, применяется такой метод. Переход от рядов к преобразованиям Фурье (см. следствие из 1.12 и 5.3 ниже), а затем в случае условий типа выпуклости применяется асимптотика преобразования Фурье (см. 2.5).

Пример 1 (Лебег, Фейер).

$$\sup_{f:\|f\|_\infty\le 1}\|S_n(f)\|_\infty=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right|dt=\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1).$$

Пример 2 (Ландау).

$$\sup_{f:\|f\|_{H_\infty}\le 1}\ \max_{z:|z|\le 1}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k\right|=\frac{1}{\pi}\ln n+O(1).$$

Для доказательства (см. 1.9, $S=\mathbb{Z}_+$) можно рассмотреть такое продолжение: $\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=0$ при $|k|>n$, $\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=1+\frac{k}{n}$ при $k\in[-n,0]$ и $\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=1$ при $k\in[0,n]$ и затем применить следствие из 1.12 ($p=1$) и 2.5а.

Отметим, что Э. Ландау нашел точное значение искомой величины, а затем вывел асимптотику.

Дж. Э. Литтльвуд (1948) высказал гипотезу, что для любого множества натуральных чисел $1\le n_1\le n_2<\ldots<n_N$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{N}e^{in_kx}\right|dx\ge c\log N.$$

Справедливость этой гипотезы доказали в 1981 г. С. В. Конягин [87] и независимо Mc Gehee O. C., Pigno L., Smith B. [63]. В статье [63] доказано неравенство более общее:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{N}c_ke^{in_kx}\right|dx\ge c\sum_{k=1}^{N}\frac{|c_k|}{k}$$

(при $n_k=k$ — это классическое неравенство Харди [14]). Следующее неравенство [64] является более сильным.

5.1 Для любой последовательности $\{n_k\}_1^\infty, n_{k+1}>n_k$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}c_ke^{in_kx}\right|dx\ge c\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{2^{s-1}\le\nu<2^s}\frac{|c_\nu|^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В случае $n_k=k$ несколько более общее неравенство получено ранее в [65].

Нормы полиномиальных средних Λ_n^0 (см. в начале п.3) рядов Фурье называют константами Лебега. Важно знать их рост, если они не ограничены по n. Там же в п.3 см. определение $S_n^\delta(f)$.

5.2. a) $\|S_n^0\|_{C\to C} = (2\pi)^{-m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} \left| \sum\limits_{|k|\le n} e^{i(k,x)} \right| dx \asymp n^{\frac{m-1}{2}} \quad (m \ge 2).$

b) $\|S_n^\delta\|_{C\to C} = (2\pi)^{-m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} \left| \sum\limits_{k} \left(1-\frac{|k|^2}{n^2}\right)_+^\delta e^{i(k,x)} \right| dx \asymp n^{\frac{m-1}{2}-\delta}$ $(0 < \delta < \dfrac{m-1}{2})$.

c) $\|S_n^{\frac{m-1}{2}}\|_{C\to C} = \gamma(m) \ln n + O(1) \quad (n \to \infty)$.

a) — В. А. Ильин, b) — К. И. Бабенко, c) — Е. Стейн (см., напр., [66]). Обобщение асимптотического результата c) с уточнением константы $\gamma(m)$ см. в [67]. Не известно, есть ли асимптотика в a).

Приведем теперь общую теорему Э. С. Белинского [68], из которой следует 5.2a) и b)).

5.3. Пусть $u, v, \dots, w \in \mathbb{R}^m$ (всего q векторов) и

$$\Delta_u f(x) = f(x) - f(x+u), \quad \Delta^q_{u,v,\dots,w} f(x) = (\Delta_u \circ \Delta_v \circ \dots \circ \Delta_w)\, f(x).$$

Если φ — ограниченная измеримая финитная функция на $\mathbb{R}^m$, $p \in [1,2)$, $\delta \in (0,1]$ и $n \ge 1$, то

$$\left(\int\limits_{\delta\,\mathbb{T}^m} \left| \sum_k \varphi\Big(\frac{k}{n}\Big) e^{i(k,x)} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= (2\pi)^{\frac{m}{2}} \cdot n^{m(1-\frac{1}{p})} \left(\int\limits_{\delta n \mathbb{T}^m} |\hat{\varphi}(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \theta \Bigg\{ n^{m(1-\frac{1}{p})} \left(\int\limits_{\delta n \mathbb{T}^m} \Big(\frac{|y|}{n} |\hat{\varphi}(y)| \Big)^p dy \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \delta^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \cdot \max_{u,v,\dots,w \in \frac{1}{2\pi n}\mathbb{T}^m} \left(\sum_k \left| \Delta^q_{u,v,\dots,w} \varphi\Big(\frac{k}{n}\Big) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg\},$$

где $|\theta| \le \gamma(m,p,q)$.

Много результатов о точном порядке роста или асимптотике разных констант Лебега получено Э. С. Белинским, В. А. Юдиным, А. Н. Подкорытовым, О. И. Кузнецовой, И. Р. Лифляндом, М. А. Скопиной и др. (см. [11]).

С этим вопросом тесно связан вопрос о скорости сходимости средних Λ_n^0 на том или ином классе функций.

Первый асимптотически точный результат получен А. Н. Колмогоровым ($m = 1$):

$$\sup_{f:\|f^{(r)}\|_\infty\le 1} \|f - S_n(f)\|_C = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\ln n}{n^r} + O\Big(\frac{1}{n^r}\Big).$$

Разными обобщениями (на дробные r, например) и уточнениями (независимость константы в остаточном члене от r) этой формулы занимались, в частности, С. М. Никольский, С. А. Теляковский, С. Б. Стечкин. Подобное соотношение для функций из $H_\infty(D)$ получил С. Б. Стечкин (вместо $\frac{4}{\pi^2}$ стоит $\frac{1}{\pi}$). В. О. Леонтьев [69] выделил в формуле Колмогорова несколько членов до остаточного более высокого порядка.

Введем теперь общее определение производной f^ψ. Если $\psi(k)\ne 0$ для $k\in\mathbb{Z}$, а $\lim\limits_{|k|\to\infty}\psi(k) = 0$, то ψ-производной функции f называют функцию с рядом Фурье

$$f^\psi \sim \sum_{k\ne 0}\frac{\hat f(k)}{\psi(k)}e_k.$$

Впервые, видимо, такую производную для степенных рядов ввел J. T. Scheik (1966).

5.4. Пусть $\psi(k) = \psi_0(|k|)e^{-i\beta\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}k}$, где $\{\psi_0(k)\}_1^\infty$ выпукла вниз и стремится к нулю при $k\to+\infty$, а $\beta\in\mathbb{R}$. Если $\sin\frac{\beta\pi}{2}\ne 0$, то будем предполагать еще, что $\sum\limits^{\infty}\frac{1}{k}\,\psi_0(k) < \infty$ (это и необходимо). Тогда (считаем $\frac{0}{0} = 0$) при $|\theta|\le c$

$$\sup_{f:f^\psi\in C(\mathbb{T})}\frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{E_n^T(f)_\infty} = \max_{f:\|f^\psi\|_\infty\le 1}\|f - S_n(f)\|_\infty =$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\psi_0(n+k)}{k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=n+2}^{\infty}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\frac{\psi_0(n+k)}{k} + \theta\psi_0(n+1).$$

[71]. Независимо последнее равенство установлено С. А. Теляковским. Здесь существенно, что нет никаких условий на ψ_0, кроме выпуклости, c — константа абсолютная и выделены две суммы, каждая из которых может быть главным членом асимптотики. Выпуклость можно заменить и более слабым условием (см. там же в [71]). Такой же результат справедлив при замене нормы в $C(\mathbb{T})$ на норму в $L(\mathbb{T})$

(см. там же). Более общий результат см. в [72]. Подобные теоремы о приближении класса функций с ограниченной ψ-производной можно получать и для разных методов суммирования рядов или интегралов Фурье. Приведем лишь теорему о приближении средними Валле-Пуссена в пространстве Харди $H_\infty(D)$ [73].

5.5. Пусть ψ локально абсолютно непрерывна на $[n+1,+\infty)$ и

$$\widetilde{\bigvee}_{n+1}^{\infty}(\psi)=\int_{n+1}^{\infty}\operatorname*{ess\,sup}_{x\geq t}|\psi'(x)|dt<\infty.$$

Тогда

$$\sup_{f:\|f^\psi\|_\infty\leq 1}\left\|f-\bigvee\nolimits_{n,p}(f)\right\|_\infty=\frac{1}{\pi}\sum_{k=p}^{n}\frac{|\psi(k+n)|}{k}+\theta\widetilde{\bigvee}_{n+1}^{\infty}(\psi),$$

где $|\theta|\leq c$ и

$$\bigvee\nolimits_{n,p}(f)=\bigvee\nolimits_{n,p}(f;z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k+\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(1-\frac{k-n}{p}\right)\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k.$$

При $p=1$ (приближение частными суммами) и выпуклых $\operatorname{Re}\psi$ и $\operatorname{Im}\psi$ результат асимптотический, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\right|=1$.

В кратном случае $C(\mathbb{T}^m)$ почти нет асимптотически точных результатов.

5.6. [67]. Для любого $r>0$ (не обязательно целого) и $\alpha>2r$

$$\sup_{f:\|\Delta^r f\|_\infty\leq 1}\left\|f-\sum_{|k|\leq n}\left(1-\frac{|k|^\alpha}{n^\alpha}\right)^{\frac{m-1}{2}}\hat{f}(k)e_k\right\|_\infty=\gamma_0(m,r,\alpha)\frac{\ln n}{n^{2r}}+O\Big(\frac{1}{n^{2r}}\Big).$$

Приведем еще аппроксимативную характеристику некоторых классов функций с точной константой.

5.7. Пусть $r>0$

а) Можно указать финитную функцию φ_r с носителем на $[0,1]$, зависящую лишь от r и m, такую, что $\|(-\Delta)^{\frac{r}{2}}f\|_\infty\leq 1$ тогда и только тогда, когда при любом $n\in\mathbb{N}$

$$\left\|f-\sum_k\varphi_r\left(\frac{|k|}{n}\right)\hat{f}(k)e_k\right\|_\infty\leq\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+p)}{p!}\cdot\frac{1}{n^r},$$

где p — наименьшее целое число с условием: $p\geq\max\left\{\frac{m-1}{2},\frac{r+1}{2}\right\}$.

b) Можно указать $\varphi_r \in C[-1,1]$ и константу $\gamma(r)$ такие, что

$$\|f^{(r)}\|_\infty \le 1 \iff \left\| f - \sum_{-n}^{n} \varphi_r\Big(\frac{k}{n}\Big)\, \hat f(k) e_k \right\|_\infty \le \frac{\gamma(r)}{n^r} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) доказано автором, а b) — В. П. Заставным [74].

Эти утверждения в существенном эквивалентны тому, что степенную функцию, заданную вне единичного шара в случае а) и на полуоси $[1,+\infty)$ — в b), можно продолжить до положительно определенной на всем пространстве.

Переходим теперь к неравенствам для производных тригонометрических полиномов T_n.

Пример (следует из 3.5а, 2.1а ($\varepsilon = 1$) и 2.7в).

Для любого $\delta \in \mathbb{C}$ (норма в $C(\mathbb{T})$ или $L_p(\mathbb{T})$ при $p \in [1,+\infty)$)

$$\|\tilde T_n' + \delta T_n\| \le \left(\frac{n}{2} + \left| \frac{n}{2} + \delta \right| \right) \cdot \|T_n\|$$

(при $\delta = 0$ и $p = \infty$ — это неравенство G. Szegö). Неравенство является точным, во всяком случае, при любом $\delta \in \mathbb{R}$. При $\delta \ge -\frac{n}{2}$ имеем равенство при $T_n = e_n$, а при $\delta < -\frac{n}{2}$ — при $T_n = e_0 \equiv 1$.

Хорошо известны следующие два точных неравенства для тригонометрических полиномов при натуральном r

$$\|\Delta_h^r T_n\| \le \Big(2 \sin \frac{nh}{2}\Big)^r \|T_n\| \quad \Big(h \in \big(0, \frac{2\pi}{n}\big)\Big),$$

$$\left(\frac{n}{2\sin\frac{n\delta}{2}}\right)^r \cdot \|\Delta_\delta^r T_n\| \le \left(\frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}}\right)^r \|\Delta_h^r T_n\| \quad \Big(0 < \delta < h \le \frac{\pi}{n}\Big)$$

(норма в C или $L_p(\mathbb{T})$ при $p \ge 1$).

Первое из них принадлежит С. Н. Бернштейну, а второе — Р. Боасу (см., напр., [2, 4.8.6 и 4.12]). Главный случай здесь — $r = 1$ (далее — индукция).

П. И. Лизоркин (1965) доказал неравенство $\|T_n^{(r)}\| \le n^r \|T_n\|$ для любого нецелого $r \ge 1$.

5.8. Для любого $r > 0$ и любого полинома T_n при $0 < \delta < h \le \frac{\pi}{n}$

$$\|T_n^{(r)}\| \le \left(\frac{n}{2\sin\frac{n\delta}{2}}\right)^r \|\Delta_\delta^r T_n\| \le \left(\frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}}\right)^r \|\Delta_h^r T_n\| \le n^r \|T_n\|.$$

Все эти неравенства превращаются в равенства при $T_n(x) = e^{inx}$, например, так как при $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Delta_h^r(e^{i\lambda x}) = e^{i\lambda x}\,(1 - e^{i\lambda h})^r.$$

Доказательство 5.8 основано на 2.7в).

Тем же методом или прямо из 5.8 можно получить аналогичные неравенства для целых функций экспоненциального типа не выше σ.

Приведем еще одно точное неравенство для периодических функций из $W^2(\mathbb{T})$.

5.9. $\|f'\|_\infty \le \sqrt{1-\varepsilon_0^2}\,(\varepsilon_0\,\|f\|_\infty + \frac{1}{\varepsilon_0}\,\|f''\|_\infty)$, где $\varepsilon_0 > 0$ определяется уравнением: $\varepsilon_0^2 \mathrm{ch}\,\frac{\pi\varepsilon_0}{2} = 1$.

Для доказательства найдем сначала наименьшую константу при любом $\varepsilon > 0$ в неравенстве

$$\|f'\| \le \gamma_0(\varepsilon)\,\|\varepsilon^2 f - f''\|.$$

$\gamma_0(\varepsilon)$ — это норма мультипликатора $\left\{\frac{k}{\varepsilon^2+k^2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Рассмотрим на $[-\pi,\pi]$ функцию

$$g_\varepsilon(t) = \frac{e^{\varepsilon|t|} - e^{2\pi\varepsilon}\ \cdot e^{-\varepsilon|t|}}{2(e^{2\pi\varepsilon}-1)}\,\mathrm{sign}\,t.$$

Ее коэффициенты Фурье $\hat{g}_\varepsilon(k) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{ik}{\varepsilon^2+k^2}(k\in\mathbb{Z})$. Поэтому $f' = (\varepsilon^2 f - f'') * g_\varepsilon$ и значит,

$$\|f'\|_\infty \le \|\varepsilon^2 f - f''\|_\infty \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g_\varepsilon(t)|\,dt = th\frac{\pi\varepsilon}{2}\,\|\varepsilon^2 f - f''\|,$$

а равенство имеет место для функции

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{sign}\,x}{\varepsilon^2}\left[1 - \frac{e^{\varepsilon|x|} + e^{\varepsilon(\pi-|x|)}}{1+e^{\pi\varepsilon}}\right] \quad (x\in[-\pi,\pi]).$$

Заметим, что точное неравенство для класса $W^2(\mathbb{R})$ на прямой выглядит иначе: $\|f'\|_\infty \le \|f-f''\|_\infty$. Осталось применить неравенство треугольника для норм и найти $\varepsilon=\varepsilon_0$, при котором в этом неравенстве треугольника имеет место равенство для f_{ε_0}.

Приведем еще один вопрос.

Э. Ландау (1929) доказал, что для всех функций из $H_\infty(D)$ имеет место точное неравенство ($|z|=1$, $n\in\mathbb{Z}_+$)

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|S_k(f,z)| \le \|f\|_{H_\infty(D)}$$

(S_k — частная сумма ряда Тейлора в нуле). Как выглядит подобное точное неравенство для более широкого класса функции $L_\infty(\mathbb{T})$?

В заключение выражаю благодарность рецензенту за ценные замечания.

Литература

[1] И. Берг, И. Лёфстрем, *Интерполяционные пространства. Введение.* М.: Мир, 1980, 264 с.

[2] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М.: Физматгиз, 1960, 624 с.

[3] В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М.: Наука, 1977, 512 с.

[4] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation.* Springer-Verlag. Berlin-...-New York, 1993.

[5] З. Чесельский, *Базисы и K-функционалы для пространств Соболева над компактными многообразиями C^∞* // Труды МИАН, (1983) **164**, 197–202.

[6] Р. М. Тригуб, *Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье* // Изв. АН СССР, с.м., **32** (1968), No 1, 24–49.

[7] Р. М. Тригуб, *Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе* // Изв. АН СССР, с.м., **44** (1980), No 6, 1378–1409.

[8] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* М.: Мир, 1974, 332 с.

[9] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении.* М.: Мир, 1985. Два тома.

[10] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М.: Мир, 1973, 334 с.

[11] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions,* Kluwer Academic Publishers, 2004, p. 585.

[12] Р. М. Тригуб, *Мультипликаторы рядов Фурье* // Укр. матем. ж., (1991), No 12, 1686–1693.

[13] С. А. Теляковский, *Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их применение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье* // Изв. АН СССР, с.м., **28** (1964), No 6, 1209–1236.

[14] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* Два тома. М.: Мир. 1965.

[15] Э. С. Белинский, Р. М. Тригуб, *Некоторые числовые неравенства и их применение в теории суммируемости рядов Фурье.* Сб."Констр. теория функций". Киев: Наукова думка, 1981, 70–81.

[16] Р. М. Тригуб, *Суммируемость и абсолютная сходимость рядов Фурье в целом.* Сб. "Метрич. вопросы теории функций и отображений". Киев: Наукова думка, 1971, 173–266.

[17] E. R. Liflyand, *Lebesque Constants of multiple Fourier series.* Preprint. 2000. National Tsing-Hua Univ., Taiwan.

[18] J.-P. Kahane, *Best approximation in $L(\mathbb{T})$*. Bull. Amer. Math. Soc., (1974) **80**, 788–804.

[19] С. Б. Стечкин, С. А. Теляковский, *О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L.* Труды МИАН, 88, Москва, Наука, 1967, 20–29.

[20] Р. М. Тригуб, *О мультипликаторах Фурье и наилучшем приближении в интегральной метрике.* Укр. матем. конгресс – 2001. Праці. Секція 10. Київ–2002, 239–252.

[21] Р. М. Тригуб, *Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1)$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов* // Матем. сб., **188** (1997), No 4, 145–160.

[22] В. В. Арестов, *Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных* // Изв. АН СССР, с.м., **45** (1981), No 1, 3–22.

[23] E. Belinsky, E. Liflyand, *Approximation properties in $L_p, 0 < p < 1$* // Funct. et Approxim., **22** (1993), 189–199.

[24] Р. М. Тригуб, *Обобщение формулы Эйлера-Маклорена* // Матем. зам., **61** (1997), No 2, 312–316.

[25] Ж.-П. Кахан, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье.* М.: Мир, 1976, 204 с.

[26] П. М. Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приближения.* Киев: Наукова думка. 1975, 272 с.

[27] Р. М. Тригуб, *Некоторые вопросы анализа Фурье и теории приближений.* Препринт №95.05. Донецк: Госуниверситет. 85с. http: //xxx.lanl.gov/ps/funct-an /9612008.

[28] A. Beurling, *On the spectral synthesis of bounded functions* // Acta Math. **81** (1949), No 3–4, 225–238.

[29] Вит. В. Волчков, *Мультипликаторы степенных рядов на областях Рейнхарта и их применение* // Доповіді НАН Укр., (1997), No 4, 22–26.

[30] A. V. Tovstolis, *Fourier multipliers in Hardy spaces in tube domains over open cones and their applications* // Methods Func. Anal. Topol., **4** (1998), No 1, 68–89.

[31] E. Liflyand, *On asymptotics of Fowrier transform for functions of certain classes* // Analysis Math., **19** (1993), No 2, 151–168.

[32] Е. Лукач, *Характеристические функции.* М.: Наука, 1979, 424 с.

[33] R. Askey, *Summability of Jacobi series.* Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 1.

[34] Р. М. Тригуб, *Критерий характеристической функции и признак типа Пойя для радиальных функций нескольких переменных* // Теория вероятностей и её применения. **34** (1989), No 4, 805–810.

[35] В. П. Заставный, *Положительно определенные функции, зависящие от нормы* // Докл. АН России, **352** (1992), No 5, 901–903.

[36] В. П. Заставный, *О множестве нулей преобразования Фурье индикатора выпуклого тела и суммировании в точках Лебега.* Сб. "Теория отображений и приближений функций". Киев: Наукова думка, 1989, с. 53–59.

[37] В. П. Заставный, *О множестве нулей преобразования Фурье меры и суммировании двойных рядов Фурье методами типа Бернштейна-Рогозинского* // Укр. матем. ж., **36** (1984), No 5, 615–621.

[38] Н. А. Загородний, Р. М. Тригуб, *Об одном вопросе Салема.* Сб. "Теория функций и отображ.", Киев: Наукова думка, 1979, с. 97–101.

[39] L. Carleson, *Appendix to the paper of I.-P. Kahane and Y. Katznelson.* Stud. Pure Math. Mem. P. Turan, Budapest, 1983, p. 411–413.

[40] О. И. Кузнецова, *О частичных суммах по полиэдрам рядов Фурье ограниченных функций* // Analysis Math., **19** (1993), No 1, 267–272.

[41] Э. С. Белинский, *О суммировании рядов Фурье методом средних арифметических с пропусками* // Analysis Math., (1984) **10**, 275–282.

[42] Э. С. Белинский, Р. М. Тригуб, *Суммируемость на лебеговом множестве и одна банахова алгебра.* Сб. "Теория функций и приближ."Труды Саратовской зимней школы. 1982 г., ч. 2. Саратов, 1983, с. 29–34.

[43] E. S. Belinsky, E. R. Liflyand, R. M. Trigub, *The Banach algebra A^* and its properties* // J. Fourier Analysis and Appl., **3** (1997), No 2, 103–129.

[44] H. Shapiro, *Some Tauberian theorem with applications to approximation theory* // Bull Amer. Math. Soc., (1968), **74**, 500–504.

[45] В. А. Глухов, *О суммировании рядов Фурье-Уолша* Укр. матем. ж., (1986) No 3, 303–309.

[46] Yu. L. Nosenko, *Conditions of Regularity for Bernstein-Rogosinski-type Means of Double Fourier Series.* Appr. Theory X: Abstract and Classical Analysis 325. C. K. Chui, L. L. Schumaker and J. Stoeckler (eds), 2002, 325–332.

[47] Р. М. Тригуб, *Суммируемость рядов Фурье и некоторые вопросы теории приближений.* 1980. Деп. ВИНИТИ N 5145–80. 10 печ. листов.

[48] Ю. С. Коломойцев, *Описание класса функций с условием $w_r(f,h)_p \le Mh^{r+\frac{1}{p}-1}$ при $0<p<1$* // Вестник Днепр. ун-та, (2003), в. 8, 31–43.

[49] I. E. Gopengaus, *Pointwise Estimates of the Hermitian Interpolation* // J. Appr. Theory, **77** (1994), 31–41.

[50] Р. М. Тригуб, *Общая прямая теорема о приближении функций из класса C^r алгебраическими полиномами с эрмитовской интерполяцией* // Докл. АН России, **386** (2002), No 5, 599–601.

[51] В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Ленинград, Издательство ЛГУ. 1982, 366 с.

[52] Z. Ditzian, K. G. Ivanov, *Strong converse inequalities.* J. D'Analyse Mathem., (1993), **61**, 61–111.

[53] R. K. S. Rathore, *The problem of A.F.Timan on the precise order of decrease of the best approximation* // J. Appr. Theory, (1994), **77**, 153–166.

[54] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск, 1987, 688 с.

[55] М. Ф. Тиман, *Аппроксимация и свойства периодических функций.* Днепропетровск. Полиграфист. 2000, 320 с.

[56] А. М. Товстолис, Р. М. Тригуб, *Эквивалентность разных модулей гладкости в пространствах Харди.* Теория приближения функций. Труды Ин-та прикл. матем. и мех., . Донецк. **3** (1998), 211–225.

[57] Z. Ditzian, *A measure of smoothness related to the Laplasian* // Trans. Amer. Math. Soc., (1991), **326**, 407–422.

[58] О. И. Кузнецова, Р. М. Тригуб, *Двусторонние оценки приближений средними Рисса и Марцинкевича* // Докл. АН СССР, **251** (1980), No 1, 34–36.

[59] Р. М. Тригуб, *Формула для K-функционала пары пространств функций нескольких переменных.* Сб."Исследования по теории функций многих переменных". Ярославль, 1988, с. 122–127.

[60] Вит. В. Волчков, *Мультипликаторы в пространствах Харди и некоторые вопросы теории приближений.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Донецк. 1998.

[61] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Труды МИАН, (1986), **178**, 3–112.

[62] Э. С. Белинский, *Сильная суммируемость периодических функций и теоремы вложения* // Докл. АН России, **332** (1993), No 2, 133–134.

[63] O. C. McGehee, L. Pigno, B. Smith, *Hardy inequality and the L_1 norm of exponential sums* // Ann. Math., (1981), **113**, 613–618.

[64] Р. М. Тригуб, *Оценка снизу L_1-нормы рядов Фурье степенного типа* // Матем. зам., **73** (2003), No 6, 951–953.

[65] I. Klemes, *A note on Hardy's inequality* // Can. Math. Bull., (1993), **36**, 442–448.

[66] Б. И. Голубов, *Кратные ряды и интегралы Фурье.* Итоги науки и техники. Матем. анализ. М.: ВИНИТИ, 1982, **19**, 3–54.

[67] Э. С. Белинский, И. Р. Лифлянд, *Об асимптотическом поведении констант Лебега радиальных методов суммирования.* Сб. "Констр. теория функций и теория отображений."Киев: Наукова думка, 1981, с. 49–70.

[68] Э. С. Белинский, *Константы Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье.* Сб. "Метрические вопросы теории функций и отображений". Киев: Наукова думка, 1977, с. 19–39.

[69] В. О. Леонтьев, *Асимптотика приближения дифференцируемых функций рядом Фурье* // Докл. АН России, **326** (1992), No 1.

[70] Н. В. Невский, *Кусочно-полиномиальная аппроксимация в классах Орлича.* Теория приближения функций. Труды междунар. конф. М.: Наука, 1987, с. 316–318.

[71] Р. М. Тригуб, *Мультипликаторы рядов Фурье и приближение функций полиномами в пространствах C и L* // Докл. АН России, **306** (1989), No 2, 292–296.

[72] А. М. Швецова, *Приближение частными суммами Фурье и наилучшее приближение некоторых классов функций* // Analysis Math., (2001), **27**, 201–222.

[73] А. М. Швецова, *Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций аналитических в единичном круге* // Вiсник Харкiвського нац. унiверситету. Серiя "Матем., прикл. матем. i мех."(2000), No 475, 208–217.

[74] В. П. Заставный, *Продолжения функции с внешности интервала до положительно определенной на всей оси функции и аппроксимативная характеристика класса $W_M^{r,\beta}$* // Укр. матем. ж., **55** (2003), No 3, 983–990.

[75] Э. С. Белинский, *Приближение средними Бохнера-Рисса и сферический модуль непрерывности* // Докл. АН УССР, сер. А, 1975, No 7.

[76] W. Trebels, *On the approximation behavior of the Riesz means in $L^p(R^n)$.* Lect. Notes in Math. 556, Springer, Berlin, 1976, p. 428–438.

[77] E. Belinsky, W. Trebels, *Generalized Lioville differentiation,truncated hypersingular integrals and K-functionals* // Math. Z., **246** (2004), 339-357.

[78] Yu. Brudnyi and N. Kruglyak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces.* North-Holland, v. 1, 1991, 713 p.

[79] J. Peetre, *Exact interpolation theorems for Lipschitz continuous functions* // Ric. Mat., **18** (1969), No 2, 239–259.

[80] Г. А. Фомин, *Об одном классе тригонометрических рядов* // Матем. заметки, **23** (1978), No 2, 213–222.

[81] С. М. Никольский, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем* // Изв. АН СССР, с.м., **10** (1946), No 3, 207–256.

[82] Ю. С. Коломойцев, *О мультипликаторах и модулях гладкости в пространстве* $L_p, 0 < p < 1$ // Докл. Нац. акад. наук Украины (в печати).

[83] Ch. Fefferman, *The multiplier problem for the ball* // Ann. Math., **93** (1971), 330–336.

[84] K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram, *Some result on double Fourier series* // Duke Math. J., **14** (1947), No 3, 731–753.

[85] В. И. Иванов, В. А. Юдин, *О тригонометрической системе в* $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. заметки, **28** (1980), No 6, 859–868.

[86] Ю. А. Брудный, *Многомерный аналог теоремы Уитни* // Матем. сб., **82** (1970), No 2, 175–191.

[87] С. В. Конягин, *О проблеме Литтльвуда* // Изв. АН СССР, с.м., (1981), **45**, 243–265.

Сведения об авторах

Роальд Михайлович Тригуб

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: `postmaster@ok.donbass.com`