Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 1, 84 – 91

# Нижняя оценка функции роста $p$-групп Гупты-Сидки

Юрий Г. Леонов

(*Представлена И. В. Протасовым*)

**Аннотация.** В работе впервые оценивается снизу рост известных бесконечных 2-порожденных p-групп.

**2000 MSC.** 20F50, 20F69.

**Ключевые слова и фразы.** Бесконечная периодическая группа, рост группы, группа автоморфизмов дерева, длина элемента группы, проекция элемента.

В 1968 году Дж. Милнор [6] поставил вопрос о существовании групп, у которых функция роста растет быстрее любой степенной функции и медленнее показательной. Такие группы называются группами промежуточного роста.

Напомним, что функция роста конечно-порожденной группы $G$ с системой порождающих $S$ определяется соотношением

$$\gamma(n) = \#\{g \in G\,;\, l(g) \leq n\},$$

где $l(g)$ — длина элемента $g$ относительно $S$.

Будем говорить, что функция $f_1(n)$ растет не быстрее, чем $f_2(n)$: $f_1(n) \preceq f_2(n)$, если найдется $c > 0$, такое, что $f_1(n) \leq f_2(cn)$, для любых $n \in \mathbb{N}$. Если $f_1(n) \preceq f_2(n)$ и $f_2(n) \preceq f_1(n)$, то функции эквивалентны: $f_1(n) \sim f_2(n)$. Функции роста одной и той же конечно-порожденной группы при различных конечных системах порождающих эквивалентны.

В работе [2] Р. И. Григорчук показал, что группа из [1] $Gr$ имеет промежуточный рост, тем самым ответив на вопрос Милнора.

*Статья поступила в редакцию* 15.05.2004

Продолжая исследовать шкалу роста конечно-порожденных групп, в работе [3] Р. И. Григорчук установил, что если группа аппроксимируется конечными $p$-группами и допускает оценку роста

$$\gamma_G(n) \prec e^{\sqrt{n}}$$

(то есть $\gamma_G(n) \preceq e^{\sqrt{n}}$ и не выполняется $\gamma_G(n) \succeq e^{\sqrt{n}}$), то $G$ почти нильпотентна. Таким образом, финитно-аппроксимируемая группа бернсайдового типа должна расти не медленнее, чем $e^{\sqrt{n}}$.

В данной работе мы рассмотрим рост известных бесконечных 2-порожденных $p$-групп, определяемых для любого простого $p$. Группа $G_p = \langle \alpha, \beta \rangle$ была введена Гуптой и Сидки в работе [5].

Рост групп $G_p$ до сих пор не исследовался. Цель данной работы — указать простую оценку снизу для всех $G_p$, $p \geq 5$.

**Теорема 1.** *Для любого простого* $p \geq 5$ *и* $\varepsilon > 0$ *верно*

$$\gamma_{G_p}(n) \succeq e^{n^{\nu_p - \varepsilon}}, \text{ где } \nu_p = \log_{2p} p.$$

Элементы группы действуют на регулярном корневом бесконечном дереве $T_p$ (от каждой вершины вниз исходит ровно $p$ ребер), $p$ — простое.

Элемент $\alpha$ переставляет поддеревья первого уровня, перемещая их вершины согласно циклу $(0, 1, \ldots, p-1)$. Элемент $\beta$ можно определить рекурсивно как $\beta = (\beta; \alpha; \alpha^{-1}; 1; \ldots; 1)$, где $(g_0; \ldots; g_{p-1})$ означает действие элементом $g_i$ на $i$-ое поддерево.

Обозначим, $\beta(i) = \beta^{\alpha^i}$ - элемент, проекция которого на $i$-ое поддерево равна $\beta$, $i = 0, \ldots, p-1$. Для натуральных $s_1 < s_2$ будем часто обозначать множество чисел $\{s_1, s_1+1, \ldots, s_2\}$ через $\overline{s_1, s_2}$. Рассмотрим стабилизатор $H_p = St_{G_p}(1) \leq G_p$ — подгруппу группы $G_p$, состоящую из элементов, не переставляющих поддеревья первого уровня. Ясно, что $\beta(i)$, $i = 0, \ldots, p-1$ порождают $H_p$ и любой элемент $g \in G_p$ представим в виде $\beta(i_1)^{\varepsilon_1} \ldots \beta(i_n)^{\varepsilon_n} \alpha^c$. Будем считать длиной элемента $g$ число

$$l(g) = \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|_p, \text{ где } |\varepsilon_i|_p = \begin{cases} \varepsilon_i & , \ 0 \leq \varepsilon_i \leq \frac{p-1}{2} \\ p - \varepsilon_i & , \ \frac{p-1}{2} < \varepsilon_i < p \end{cases}$$

Рассмотрим вложение (мономорфизм)

$$\psi : H_p \to G_p \times \cdots \times G_p \, (p \text{ раз}),$$

заданное на порождающих $\beta(i)$ следующим образом:

$$\psi(\beta(i)) = (\beta(i)_0, \ldots, \beta(i)_{p-1}), \ \beta(i)_i = \beta, \ \beta(i)_{\overline{i+1}} = \alpha, \ \beta(i)_{\overline{i+2}} = \alpha^{-1}$$

и $\beta(i)_j = 1$, при ином индексе $j$. Здесь запись вида $\overline{s}$ означает, что $\overline{s} \equiv s(mod\, p)$ и $\overline{s} \in \overline{0, p-1}$.

Распространим $\psi$ на всю группу $G_p$, положив $\psi(g) = \psi(g\alpha^{-c})$ при $g = \beta(i_1)^{\varepsilon_1} \dots \beta(i_n)^{\varepsilon_n}\alpha^c$. Возникает последовательность $\psi(g) = (g_0, \dots, g_{p-1})$, в которой элементы $g_i$ являются проекциями первого уровня на $i$-ое поддерево и обозначаются $\varphi_i(g)$. Можно считать $\psi^n(g)$ упорядоченной последовательностью из $p^n$ элементов, определенной индукцией по правилу $\psi^n(g) = (\psi^{n-1}(g_0), \dots, \psi^{n-1}(g_{p-1}))$. Назовем $i$-ый элемент такой последовательности *проекцией $n$ уровня на $i$-ое поддерево* и обозначим $g_{n,i}$ или $\varphi_{n,i}(g)$.

Для доказательства оценки сверху роста ветвящихся групп до недавнего времени применялся метод, который показывал, что длины проекций любого элемента группы "достаточно малые". Аналогично, для оценки роста снизу таких групп, можно показать, что длины проекций элементов "достаточно большие". Впервые эта идея была применена автором при доказательстве того факта, что первая группа Григорчука, которая является группой конечной ширины, растет быстрее $e^{\sqrt{n}}$ [4].

Похожую идею применим и в этой работе.

**Лемма 1 (О больших проекциях).** *Для группы $G_p, p \geq 5$ и любого натурального $m$ справедливо неравенство*

$$l(g) \leq \left[2^m + \frac{p-3}{2}\right] \cdot \sum_{j=1}^{p^m} l(g_{m,j}) + \mathrm{const}(m).$$

*Доказательство.* Пусть $g \in G_p, p \geq 5$. Рассмотрим случай $m = 1$ и допустим элемент

$$\varphi_0(g) = g_0 = \bar{g} = \beta(i_1)^{x_1} \dots \beta(i_n)^{x_n}\alpha^c$$

представлен в своем наименьшем несократимом виде. Тогда,

$$l(\bar{g}) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|_p.$$

Рассмотрим элемент

$$\tilde{g}_0 = \beta(p-1)^{-i_1} \prod_{j=1}^{n-1} \big(\beta^{x_j}\beta(p-1)^{r_j}\big)\beta^{x_n}\alpha^{i_n+c}, \qquad (1)$$

где $r_j = i_j - i_{j+1}$. Непосредственно проверяется, что

$$\varphi_0(\tilde{g}_0) = \alpha^{-i_1}\beta^{x_1}\alpha^{i_1}\alpha^{-i_2}\beta^{x_2}\alpha^{i_2} \dots \alpha^{-i_n}\beta^{x_n}\alpha^{i_n}\alpha^c = \bar{g}.$$

При этом, для $l \neq 0$ выполняется $\varphi_l(\tilde{g}_0) \in \langle\alpha\rangle$ (циклическая группа порядка $p$). Таким образом, $\varphi_0(\tilde{g}_0) = \varphi_0(g)$ и остальные проекции элемента $\tilde{g}_0$ ограничены по длине константой.

Обозначим элемент указанный в (1) как $\tilde{g}_0 = R_1(\bar{g})$. Далее, рассмотрим элемент $g^{\{1\}} = \tilde{g}_0^{-1}g$ и его проекцию $\varphi_1(g^{\{1\}}) = g_1$ (заметим, что $\varphi_0(g^{\{1\}}) = 1_{G_p}$). Аналогично подбираем $\tilde{g}_1 = R_1(g_1)^{\alpha}$ и продолжаем нашу процедуру, выбирая $g^{\{2\}} = \tilde{g}_1^{-1}g^{\{1\}}$. На $k$ шаге выбираем $\tilde{g}_k = R_1(g_k)^{\alpha^k}$ и $g^{\{k+1\}} = \tilde{g}_k^{-1}g^{\{k\}}$. Отсюда видно, что элемент $g^{\{p-1\}}$ имеет проекции из группы $\langle\alpha\rangle$. Легко видеть, что в таком случае $g^{\{p-1\}}$ имеет все проекции равные 1 и таким образом $g^{\{p-1\}} = \alpha^c$.

Итак, $g = \tilde{g}_0\tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_{p-1}\alpha^c$. Оценим длину $\tilde{g}_0$. Имеем,

$$l(\tilde{g}_0) \leq |i_1|_p + \sum_{j=1}^{n} |x_j|_p + \sum_{j=1}^{n-1} |r_j|_p.$$

Так как $|r_j|_p \leq \frac{p-1}{2}$, то

$$l(\tilde{g}_0) \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|_p + \frac{p-1}{2} \sum_{j=1}^{n} |x_j|_p.$$

Отсюда, $l(\tilde{g}_0) \leq (1 + \frac{p-1}{2})l(\bar{g})$ и $l(\tilde{g}_j) \leq (1 + \frac{p-1}{2})l(g_j)$.

Полученные оценки дают неравенство

$$l(g) \leq \left(1 + \frac{p-1}{2}\right) \sum_{j=1}^{p} l(g_j).$$

Случай $m = 1$ доказан.

Пусть теперь $m$ — произвольное натуральное число. Не ограничивая общности, считаем, что $g \in St_{G_p}(m+1)$ — стабилизатор уровня $m+1$ (стабилизатор — подгруппа элементов, не переставляющих поддеревья с корневыми вершинами уровня $m+1$, является подгруппой конечного индекса). Рассмотрим

$$\bar{g} = g_{m,0} = \beta(i_1)^{x_1} \dots \beta(i_n)^{x_n}.$$

Возьмем элементы

$$a_1(2) = \beta(p-1)^{-1},\ a_2(2) = \beta(p-1),$$

$$a_1(3) = \beta(p-1) \cdot \beta^{-1} \cdot \beta(p-1)^{-1},\ a_2(3) = \beta(p-1) \cdot \beta \cdot \beta(p-1)^{-1}.$$

Далее, $a_i(m)$, $m > 3$ определим индуктивно на основании предыдущего слова $a_i(m-1)$, заменяя в нем любую букву $\beta(p-1)^{\alpha}$ на слово $\beta(p-1)\beta^{\alpha}\beta(p-1)^{-1}$ и не изменяя букв $\beta^{\alpha}$, $\alpha \in \{1, -1\}$.

Рассмотрим теперь слово

$$\tilde{g}_m = h_m^{(i_1)} \prod_{j=1}^{n-1} \left[a_1(m)\beta^{x_j} a_2(m)\beta^{r_j}\right] a_1(m)\beta^{x_n}\alpha^{i_n}, \tag{2}$$

где $h_m^{(i_1)}$ — некоторые элементы, зависящие только от $m$ и $i_1$, которые мы выбираем любыми с индуктивным свойством $\varphi_0(h_m^{(i_1)}) = h_{m-1}^{(i_1)}$, считая $h_1^{(i_1)} = \beta(p-1)^{-i_1}\alpha$ (см. формулу (1)).

Покажем, что $\varphi_{m,0}(\tilde{g}_m) = \varphi_{m,0}(g)$.

Заметим, что для получения такой проекции достаточно $m$ раз последовательно применить проекцию $\varphi_0$ к соответствующему элементу. Так как $\varphi_0(\beta(p-1)\beta^\alpha\beta(p-1)^{-1}) = \beta(p-1)^\alpha$, то $\varphi_0(a_i(m)) = a_i(m-1)$, $i = 1, 2$, $m \geq 3$. Отсюда видно, что применив проекцию $\varphi_0$ к элементу $\tilde{g}$ $m-2$ раза мы приходим к формуле (2) для случая $m = 2$. Осталось рассмотреть этот случай. Имеем,

$$\varphi_0(\tilde{g}_2) = h_1^{(i_1)} \prod_{j=1}^{n-1} \left[\alpha^{-1}\beta^{x_j}\alpha\beta^{r_j}\right]\alpha^{-1}\beta^{x_n}.$$

Мы пришли к формуле (1) и тем самым показали, что выполняется равенство $\varphi_{2,0}(\tilde{g}_2) = \varphi_0(\varphi_0(\tilde{g}_2)) = \bar{g}$. Таким образом, $\varphi_{m,0}(\tilde{g}_m) = \bar{g}$.

Для окончания доказательства нам необходимо показать аналог формулы (2) для любой вершины уровня $m$. Пусть $0 \leq u \leq p^m - 1$ и $(i_1, \ldots, i_m) = u|_p$ $p$-ичное представление числа $u$ (возможно с первыми несколькими нулями). Покажем, что для $u$ найдется элемент $b_x \in G_p$, такой, что

$$\varphi_{m,u}(b_x) = \alpha^x,\ \varphi_{m,v}(b_x) \in \langle\alpha\rangle,\ \text{ при } v \neq u,$$

кроме случая, когда $v|_p = (i_1, \ldots, i_{m-1}, i_m - 1)$. В последнем случае будет выполняться $\varphi_{m,v}(b_x) = \beta^x$, $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

Действительно, при $m = 1$ выбираем элемент $\beta(i_1 - 1)^x$. В предположении верности индукции для вершин уровней $< m$ покажем верность для уровня $m$. Обозначим элемент $b_x$, удовлетворяющий предположению для вершины $u$ уровня $k$ с $u|_p = (i_1, \ldots, i_k)$ как $b_x(i_1, \ldots, i_k)$. Непосредственно проверяется, что элемент

$$b = b_x(i_1, \ldots, i_{m-1})^{b_{i_m}(i_1, \ldots, i_{m-2}, i_{m-1}-1)}$$

может быть выбран в качестве $b_x(i_1, \ldots, i_m)$.

Действуя к элементу $t \in G_p$ последовательно сопряжениями подходящими элементами $b_x(j_1, \ldots, j_k)$, можно построить элемент $\bar{t}$ с условием $\varphi_{m',k_1}(\bar{t}) = \varphi_{m',k_2}(t)$. Это позволяет нам провести аналогию между случаями для уровней $m$ и 1, то есть строить $g_m^{\{1\}} = \tilde{g}_m^{-1} g$ и так далее, получив в итоге произведение вида $g = \tilde{g}_m \tilde{g}_{m,1} \cdots \tilde{g}_{m,p^m-1}$. При этом любой элемент $\tilde{g}_{m,s}$ будет иметь вид (2) с поправкой на слово, ограниченное по длине некоторой константой $c_m$.

По построению элементов $a_i(m)$ легко видеть, что $l(a_i(m)) \leq 2^{m-1} - 1$, $i = 1, 2$. Отсюда и из (2) следует, что

$$l(\tilde{g}_m) \leq c_m + \sum_{j=1}^{n} |x_j|_p + \sum_{j=1}^{n-1} |r_j|_p + 2 \cdot (2^{m-1} - 1) \cdot n \leq$$

$$\leq c_m + \left(1 + \frac{p-1}{2}\right) \cdot l(\bar{g}) + (2^m - 2) \cdot l(\bar{g})$$

и аналогично

$$l(\tilde{g}_{m,s}) \leq c_m + \left(1 + \frac{p-1}{2}\right) \cdot l(g_{m,s}) + (2^m - 2) \cdot l(g_{m,s}).$$

Так как длина слова $g$ по построению ограничена суммой длин всех $\tilde{g}_{m,s}$, $s \in \overline{0, p^m - 1}$, то из последнего неравенства следует утверждение леммы. □

Заметим, что при $p \geq 5$ уже случай $m = 1$ дает, как будет видно ниже, нетривиальную оценку снизу роста группы $G_p$.

**Лемма 2.** *Пусть для фиксированного $m \in \mathbb{N}$ выполняется*

$$l(g) \leq A_m \cdot \sum_{i=0}^{p^m-1} l(g_{m,i}) + \mathrm{const} \tag{3}$$

*для любых $g \in G_p$. Тогда*

$$\gamma_{G_p}(n) \succeq e^{n^{Q_{p,m}}}, \text{ где } Q_{p,m} = \log_{p \cdot A_m^{1/m}} p. \tag{4}$$

*Доказательство.* Пусть слово $g$ в несократимом виде имеет вид $g = \beta(i_1)^{\varepsilon_1} \ldots \beta(i_n)^{\varepsilon_n} \alpha^c$ и $n > 1$. Тогда любая проекция этого слова имеет меньшую длину.

Другими словами, если $l(g) > (p-1)/2$, то $l(g_i) < l(g)$, для всех $i \in \overline{0, p-1}$. Отсюда следует, что найдется $k$, такое, что $l(g_{k,i}) \leq (p-1)/2$, для всех $i \in \overline{0, p^k - 1}$. Наименьшее $k$ с таким свойством назовем *глубиной* элемента $g$ и обозначим $f(g)$. Рассмотрим функцию

$$r(v) = \max_{g, f(g) \leq v} l(g).$$

Пусть $g$ элемент глубины $v$ длины $r(v)$. Из (3) следует, что

$$r(v) = l(g) \leq A_m p^m r(v-m) + C_m.$$

Отсюда по индукции следует

$$r(v) \leq L_m (p^m A_m)^{[\frac{v}{m}]} \leq L_m (p \cdot A_m^{1/m})^v,$$

где $L_m$ — некоторая константа, зависящая от $m$, $[\frac{v}{m}]$ — целая часть частного. Рассмотрим множество $F(v)$ элементов глубины $\leq v$.

Из доказательства леммы 1 видно, что для любого $i \in \overline{0, p^v - 1}$ найдется элемент $g \in G_p$ глубины $v + c$, такой, что любое слово $g_{v,s} \in \langle \alpha \rangle$, при $s \neq i$, а $g_{v,i}$ — нетривиальное слово, $c$ — некоторая константа. Из таких слов можно получить (всевозможными их произведениями), по крайней мере, $2^{p^v}$ элементов глубины $\leq v + c$. Отсюда, мощность

$$|F(v)| \geq 2^{p^v \cdot c_1}, \quad c_1 > 0.$$

Число элементов длины $\leq r(v)$ не меньше, чем $|F(v)|$. Поэтому, с точностью до эквивалентности

$$\gamma_{G_p}((p \cdot A_m^{1/m})^v) \succeq \gamma_{G_p}(r(v)) \geq |F(v)| \geq 2^{p^v \cdot c_1}.$$

Или

$$\gamma_{G_p}(n) \succeq e^{n^{Q_{p,m}}}, \text{ где } Q_{p,m} \text{ — число из условия леммы.}$$

$\square$

Заметим, что неравенство (4) будет нетривиальным, если $A_m < p^m$. Объединяя леммы 1 и 2, имеем

**Следствие 1.** *В группе $G_p$, $p \geq 5$ для любого $m \in \mathbb{N}$ верна оценка*

$$\gamma_{G_p}(n) \succeq e^{n^{\log_{p \cdot T_{p,m}} p}}, \text{ где } T_{p,m} = \left[\frac{p-3}{2} + 2^m\right]^{1/m}.$$

Утверждение нашей теоремы теперь вытекает из того, что число $m$ можно выбирать сколь угодно большим. Теорема доказана.

В заключение отметим, что при $p \to \infty$ оценка снизу стремится к экспоненте.

## Литература

[1] Р. И. Григорчук, *К проблеме Бернсайда о периодических группах* // Функц. анализ и его прилож. **14** (1980), вып. 1, 53–54.

[2] Р. И. Григорчук, *Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних* // Изв. АН СССР. Сер. Матем. (1984), No 5, 939–985.

[3] Р. И. Григорчук, *О ряде Гильберта-Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами* // Матем. Сб. **180** (1989), No 2, 207–225.

[4] Ю. Г. Леонов, *Об оценке снизу роста* 3*-порожденной* 2*-группы* // Матем. Сборник. **192** (2001), вып. 11, 77–92.

[5] N. Gupta, S. Sidki, *Some infinite $p$-groups* // Алгебра и логика. **22** (1983), No 5, 584–589.

[6] J. Milnor, *Problem 5603* // Amer. Math. Monthly. **75** (1968), No 6, 685–686.

### Сведения об авторах

**Юрий Григорьевич Леонов**

Одесская национальная академия связи
им. А. С. Попова
ул. Кузнечная 1,
65029 Одесса,
Украина
*E-Mail:* leonov_yu@yahoo.com