Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 1, 65 – 73

О представлениях прямого произведения конечных групп над полными дискретно нормированными кольцами

Петр М. Гудивок

Аннотация. Пусть $G = H \times B$ — прямое произведение конечных групп H и B (H — силовская p-подгруппа группы G), K — полное дискретно нормированное кольцо с полем вычетов характеристики p, KG — групповое кольцо группы G над кольцом K. Под KG-модулями будем понимать KG-модули, являющиеся свободными K-модулями конечного ранга. Выясняется, когда произвольный неразложимый KG-модуль представляется в виде внешнего тензорного произведения неразложимого KH-модуля и неприводимого KB-модуля. Отметим, что случай, когда K — поле характеристики p, был рассмотрен в [2], [3], [8].

2000 MSC. 16G20, 20C20.

Ключевые слова и фразы. Прямое произведение конечных групп, представление конечной группы над кольцом, полное дискретно нормированное кольцо K, неразложимый модуль над групповым кольцом KG, внешнее тензорное произведение KG_1- и KG_2-модулей.

Пусть K — область главных идеалов с единицей, F — поле частных кольца K, $G = G_1 \times G_2$ — прямое произведение конечных групп G_1 и G_2, KG – групповое кольцо группы G над кольцом K. Под KG-модулями в дальнейшем будем понимать KG-модули, являющиеся свободными K-модулями конечного ранга. Интересной является задача о связи между KG- и KG_i-модулями ($i = 1, 2$). Пусть M_i — KG_i-модуль ($i = 1, 2$). Обозначим через $M_1 \# M_2$ внешнее тензорное произведение модулей M_1 и M_2. Хорошо известно [7], что если F – алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок группы $G = G_1 \times G_2$, то произвольный неприводимый FG-модуль однозначно с точностью до изоморфизма представляется в виде внешнего тензорного произведения неприводимых FG_i-модулей ($i = 1, 2$). Джонс [10] получил следующий результат.

Статья поступила в редакцию 1.04.2004

Лемма 1. *Пусть K — поле характеристики $p > 0$ либо дискретно нормированное кольцо, F — поле частных кольца K, P — максимальный идеал кольца K, K/P — поле характеристики p, $G = G_1 \times G_2$ и $(p, |G_2|) = 1$ ($|G_2|$ – порядок группы G_2). Если F является полем разложения группы G_2, то произвольный неразложимый KG-модуль является внешним тензорным произведением неразложимого KG_1-модуля и неприводимого KG_2-модуля.*

Н. Блоу [8] и мной [2], [3] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$ и $G = H \times G_2$, где H — силовская p-подгруппа конечной группы G. Произвольный неразложимый FG-модуль тогда и только тогда представляется однозначно с точностью до изоморфизма в виде внешнего тензорного произведения неразложимого FH-модуля и неприводимого FG_2-модуля, когда F является полем разложения группы G_2 либо группа H циклична.*

Теорема 2 ([3]). *Пусть $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых рациональных p- адических чисел и $G = H \times G_2$, где H — силовская p-подгруппа конечной группы G. Произвольный неразложимый $\mathbb{Z}_pG$-модуль тогда и только тогда однозначно с точностью до изоморфизма представляется в виде внешнего тензорного произведения неразложимого $\mathbb{Z}_pH$-модуля и неприводимого $\mathbb{Z}_pG_2$-модуля, когда поле рациональных p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ является полем разложения группы G_2 либо H — циклическая группа порядка p^r $(r \leq 2)$.*

Основные результаты этой работы опубликованы без доказательства в [4].

Лемма 2 ([11]). *Пусть K — полное дискретно нормированное кольцо и G — конечная группа. KG-модуль M неразложим тогда и только тогда, когда $E(M) = Hom_{KG}(M, M)$ — локальное кольцо.*

Лемма 3. *Пусть K — полное дискретно нормированное кольцо с полем вычетов характеристики $p > 0$, $G = G_1 \times G_2$, $(|G_2|, p) = 1$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Каждый неразложимый KG-модуль является внешним тензорным произведением неразложимого KG_1-модуля и неприводимого KG_2-модуля;*

2) *Внешнее тензорное произведение неразложимого KG_1-модуля и неприводимого KG_2-модуля является неразложимым KG-модулем.*

Доказательство. Докажем сначала, что из 2) следует 1). Пусть M — неразложимый KG-модуль. Тогда, как известно [9], существует такой неразложимый KG_1-модуль M_1, что

$$M_1^G = KG \otimes_{KG_1} M_1 \cong M \oplus W, \tag{1}$$

где W — некоторый KG-модуль. С другой стороны, очевидно,

$$M_1^G \cong M_1 \# KG_2 \cong M_1 \# V_1 \oplus \cdots \oplus M_1 \# V_r, \tag{2}$$

где $KG_2 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ (V_j – неприводимый KG_2-модуль, $j = 1, \ldots, r$). Так как $M_1 \# V_j$ — неразложимый KG-модуль, то из формул (1) и (2), учитывая справедливость теоремы Крулля-Шмидта для KG-модулей [1], находим, что для некоторого i $(1 \leq i \leq r)$ $M \cong M_1 \# V_i$. Итак, из 2) следует 1).

Пусть далее имеет место 1). Обозначим через M_i произвольный неразложимый KG_i-модуль $(i = 1, 2)$. Допустим, что KG-модуль $M = M_1 \# M_2$ разложим:

$$M = M_1 \# M_2 \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_s, \tag{3}$$

где N_i — неразложимый KG-модуль $(i = 1, \ldots, s)$. В силу 1) $N_i \cong W_i \# T_i$, где W_i — неразложимый KG_1-модуль, а T_i — неприводимый KG_2-модуль $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда из (3) получаем:

$$M = M_1 \# M_2 \cong W_1 \# T_1 \oplus \cdots \oplus W_s \# T_s. \tag{4}$$

Отсюда следует, что

$$M_{G_1} \cong M_1^{(m_1)} \cong W_1^{(n_1)} \oplus \cdots \oplus W_s^{(n_s)}, \tag{5}$$

$$M_{G_2} \cong M_2^{(m_2)} \cong T_1^{(n_1)} \oplus \cdots \oplus T_s^{(n_s)} \tag{6}$$

где M_{G_i} — модуль M, рассматриваемый как KG_i-модуль $(i = 1, 2)$, а $W^{(n)}$ — прямая сумма n экземпляров модуля W. Ввиду справедливости теоремы Крулля-Шмидта для KG-модулей, из (5) и (6) вытекает, что $W_j \cong M_1$, $T_j \cong M_2$ $(j = 1, \ldots, s)$. Следовательно, формула (4) будет иметь вид:

$$M = M_1 \# M_2 \cong (M_1 \# M_2)^{(s)}.$$

Таким образом, $s = 1$, то есть $M = M_1 \# M_2$ — неразложимый KG-модуль. Значит, из 1) следует 2). Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть K — полное дискретно нормированное кольцо с полем вычетов характеристики $p > 0$, $G = G_1 \times G_2$, $(p, |G_2|) = 1$, M_j — неразложимый KG_j-модуль $(j = 1, 2)$. Тогда*

$$\overline{E(M_1 \# M_2)} \cong \overline{E(M_1)} \otimes \overline{E(M_2)}\,, \tag{7}$$

где $E(M) = Hom_{KG}(M, M)$ и $\overline{E(M)} = E(M)/RadE(M)$ (M — KG-модуль, $RadE(M)$ — радикал Джекобсона кольца $E(M)$).

Доказательство леммы следует из [3] и [8].

Теорема 3. *Пусть K — полное дискретно нормированное кольцо характеристики $p > 0$, F — поле частных кольца K и $G = H \times G_2$, где H — силовская p-подгруппа конечной группы G и $|H| > 1$. Произвольный неразложимый KG-модуль тогда и только тогда представляется в виде внешнего тензорного произведения неразложимого KH-модуля и неприводимого KG_2-модуля, когда F — поле разложения группы G_2 либо H — группа порядка 2.*

Доказательство. Пусть $H = \langle a \rangle$ — группа порядка 2. Из [5] следует, что все неэквивалентные неразложимые матричные K-представления группы $H = \langle a \rangle$ исчерпываются такими представлениями:

$$\Delta : a \to 1,\ \Delta_j : a \to \begin{pmatrix} 1 & t^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (j = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

где t — простой элемент кольца K.

Пусть M — неразложимый KH-модуль. Из (8) получаем, что

$$\overline{E(M)} = E(M)/RadE(M) \cong \overline{K} = K/tK.$$

Отсюда и из лемм 1–4 вытекает доказательство достаточности теоремы.

Пусть далее $|H| > 2$ и F не является полем разложения группы G_2. Очевидно, достаточно рассмотреть случаи, когда H либо циклическая группа порядка $p^r > 2$, либо H — абелева группа типа (2, 2). Как известно (см. [7])

$$FG_2 \cong (F_1)_{n_1} \oplus \cdots \oplus (F_s)_{n_s},$$

где F_i — конечное расширение поля F $(i = 1, \ldots, s)$ и $(F_j)_{n_j}$ — кольцо всех $n_j \times n_j$-матриц над полем F_j $(1 \le j \le n_s)$. Так как F не является полем разложения группы G_2, то существует такое j, что $F_j \neq F$ $(1 \le j \le s)$. Пусть R_j – кольцо целых величин поля F_j и

P_j — максимальный идеал кольца R_j. Легко видеть, что в R_j содержится такой элемент θ, что $\theta \notin K$ и $\theta \notin P_j$. Как известно, в кольце K существует подполе K_1, изоморфное полю $\overline{K} = K/tK$. Очевидно существует такой полином $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_i \in K)$, что $\overline{f}(x) = x^n + \overline{a_1}x^{n-1} + \cdots + \overline{a_n}$ $(\overline{a_i} = a_i + tK;\ i = 1, \ldots, n)$ будет неприводимым полиномом над полем $\overline{K}$ и $\overline{f}(\overline{\theta}) = 0$, где $\overline{\theta} = \theta + tK$. Пусть N_j — неприводимый KG_2-модуль, соответствующий алгебре $(F_j)_{n_j}$, и A — сопровождающая матрица полинома $f(x)$. Легко проверяется, что отображение Γ вида:

$$a \to \Gamma(a) = \begin{pmatrix} E & tE & A \\ 0 & E & tE \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица порядка n, является K-представлением циклической группы $H = \langle a \rangle$ порядка $p^r > 2$. Покажем, что представление Γ неразложимо. Пусть $C = \|C_{ik}\|$ (C_{ik} — матрица порядка n) такая матрица порядка $3n$ над кольцом K, что $\Gamma(a)C = C\Gamma(a)$. Из этого равенства вытекает, что

$$C_{21} = C_{31} = C_{32} = 0,\ C_{33} = C_{22} = C_{11},$$
$$AC_{11} \equiv C_{11}A (\operatorname{mod} tK). \tag{9}$$

Обозначим через W KH-модуль, в котором реализуется представление Γ. Из (9) следует, что $\overline{E(W)} \cong \overline{K}(\overline{\theta})$. Отсюда и из леммы 2 получаем, что W — неразложимый KH-модуль. Тогда в силу леммы 4

$$\overline{E(W \# N_j)} \cong \overline{E(W)} \otimes_{\overline{K}} \overline{E(N_j)} \cong \overline{K}(\overline{\theta}) \otimes_{\overline{K}} \overline{R_j},$$

где $\overline{R_j} = R_j/P_j$. Очевидно, $\overline{K}(\overline{\theta}) \otimes_{\overline{K}} \overline{R_j}$ не является полем. Значит, ввиду леммы 2 $W\#N_j$ разложимый KG-модуль.

Пусть далее H — группа типа (2, 2):

$$a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ ab = ba.$$

Очевидно, отображение Γ' вида:

$$a \to \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix},\ b \to \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

является неразложимым K-представлением группы H. Пусть W' — KH-модуль, в котором реализуется представление Γ'. Тогда

$$\overline{E(W' \# N_j)} \cong \overline{K}(\overline{\theta}) \otimes_{\overline{K}} \overline{R_j}.$$

Следовательно, $W'\#N_j$ разложимый KG-модуль. Необходимость доказана. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть K — полное дискретно нормированное кольцо характеристики нуль с полем вычетов характеристики p, F — поле частных кольца K и $G = H \times G_2$, где H — силовская p-подгруппа конечной группы G и $|H| = p^d$ $(d > 1)$. Произвольный неразложимый KG-модуль тогда и только тогда представляется в виде внешнего тензорного произведения неразложимого KH-модуля и неприводимого KG_2-модуля, когда F — поле разложения группы G_2 либо H — циклическая группа порядка p^2 и p — простой элемент кольца K.*

Доказательство. Доказательство достаточности теоремы вытекает из леммы 1 и теоремы 2.

Докажем далее необходимость. Пусть F не является полем разложения группы G_2. Тогда

$$FG_2 \cong (S_1)_{n_1} \oplus \cdots \oplus (S_r)_{n_r},$$

где S_j — конечное расширение поля F $(j = 1, \ldots, r)$. Так как F не является полем разложения группы G_2, то существует такое j, что $S_j \neq F$ $(1 \leq j \leq r)$. Пусть L_j — кольцо целых величин поля S_j и P_j – максимальный идеал кольца L_j. Тогда в L_j найдется такой элемент θ, что $\theta \notin K$ и $\theta \notin P_j$. Очевидно, существует такой полином $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_i \in K)$, что $\overline{f}(x) = x^n + \overline{a_1}x^{n-1} + \cdots + \overline{a_n}$ $(\overline{a_i} = a_i + tK$; $i = 1, \ldots, n)$ будет неприводимым полиномом над полем $\overline{K} = K/tK$ и $\overline{f}(\overline{\theta}) = 0$, где $\overline{\theta} = \theta + tK$ (t — простой элемент кольца K). Пусть A — сопровождающая матрица полинома $f(x)$ и N_j — неприводимый KG_2-модуль, соответствующий алгебре $(S_j)_{n_j}$. Рассмотрим сначала случай, когда H — абелева группа типа (p, p):

$$a^p = 1,\ b^p = 1,\ ab = ba.$$

Пусть

$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & 0 & \langle A \rangle \\ 0 & E_{sn} & E_{sn} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix},\ \Gamma(b) = \begin{pmatrix} E_{sn} & 0 & E_{sn} & 0 \\ 0 & \widetilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & \langle E_n \rangle \\ 0 & 0 & \widetilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где ε — первообразный корень степени p из 1, E_n — единичная матрица порядка n, $\widetilde{\varepsilon}$ — матрица оператора умножения на ε в K-базисе $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{s-1}$ кольца $K[\varepsilon]$, $\widetilde{\varepsilon}^{(n)} = \widetilde{\varepsilon} \dot{\times} E_n$ — кронекерово произведение матриц $\widetilde{\varepsilon}$ и E_n, $\langle \Delta \rangle = \|\langle \delta_{ik} \rangle\|$ $(1 \leq i, k \leq n)$, $\Delta = \|\delta_{ik}\|$, $\langle \delta_{ik} \rangle$ – $s \times 1$-матрица над K, столбец которой состоит из координат элемента $\delta_{ik} \in K[\varepsilon]$ в K-базисе $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{s-1}$ кольца $K[\varepsilon]$. Нетрудно проверить, что отображение $\Gamma : a \to \Gamma(a),\ b \to \Gamma(b)$ является K-представлением группы H. Пусть C такая матрица над кольцом K, что

$$\Gamma(a)C = C\Gamma(a),\ \Gamma(b)C = C\Gamma(b). \tag{11}$$

Из (10) и (11) на основании [6] получаем, что матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \widetilde{\Theta_1} & & & * \\ 0 & \widetilde{\Theta_2} & & \\ 0 & 0 & \widetilde{\Theta_3} & \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_4 \end{pmatrix},$$

где $\Theta_i = \|\lambda_{hk}^{(i)}\|$, $\widetilde{\Theta_i} = \|\widetilde{\lambda_{hk}^{(i)}}\|$, $\lambda_{hk}^{(i)} \in K[\varepsilon]$ $(i = 1, 2, 3)$, $\lambda = \alpha_o + \alpha_1\varepsilon + \cdots + \alpha_{s-1}\varepsilon^{s-1}$ $(\alpha_m \in K; m = 0, 1, \ldots, s-1)$, $\widetilde{\lambda} = \alpha_0 E_s + \alpha_1\widetilde{\varepsilon} + \cdots + \alpha_{s-1}\widetilde{\varepsilon}^{s-1}$. Используя [6] и (11), нетрудно показать, что

$$\Theta_i \equiv \Theta_1(\mathrm{mod} P')\ (i = 2, 3, 4), A\Theta_1 \equiv \Theta_1 A(\mathrm{mod} P'), \tag{12}$$

где P' — максимальный идеал кольца целых величин поля $F(\varepsilon)$.

Пусть M_1 — KH-модуль, в котором реализуется представление Γ. Из (12) получаем, что $\overline{E(M_1)} \cong \overline{K}(\overline{\theta})$, где $\overline{K} = K/tK$. Тогда в силу леммы 2 M_1 — неразложимый KH-модуль. Отсюда и из леммы 4 получаем, что

$$\overline{E(M_1 \# N_j)} \cong \overline{K}(\overline{\theta}) \otimes \overline{L_j}, \tag{13}$$

где $\overline{L_j} = L_j/P_j$. Следовательно, в силу леммы 2 $M_1 \# N_j$ – разложимый KG-модуль.

Итак, необходимость доказана, если H – нециклическая p-группа.

Пусть $H = \langle a\rangle$ — циклическая группа порядка p^3. Рассмотрим следующее K-представление Γ' группы $H = \langle a\rangle$:

$$\Gamma'(a) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon_3}^{(n)} & 0 & \langle E_n\rangle & \langle A\rangle \\ 0 & \widetilde{\varepsilon_2}^{(n)} & \langle E_n\rangle & \langle E_n\rangle \\ 0 & 0 & \widetilde{\varepsilon_1}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где ε_h — первообразный корень степени p^h из 1 $(h = 1, 2, 3)$, $\langle\Delta\rangle = \|\langle\delta_{ik}\rangle\|$, $\Delta = \|\delta_{ik}\|$ $(1 \le i, k \le n)$ и $\langle\delta_{ik}\rangle$ — матрица, у которой все столбцы, кроме последнего, нулевые, а последний состоит из координат элемента $\delta_{ik} \in K[\varepsilon_m]$ $(2 \le m \le 3)$ в K-базисе $1, \varepsilon_m, \ldots, \varepsilon_m^{r_m}$ кольца $K[\varepsilon_m]$. Такими же рассуждениями, как и в случае (10), на основании [6] из (14) получаем, что $E(M_1') \cong \overline{K}(\overline{\theta})$, где M_1' — KH-модуль, в котором реализуется представление Γ' группы $H = \langle a\rangle$. Отсюда и из

(13) следует доказательство необходимости, если H — циклическая p-группа порядка p^d $(d > 2)$.

Пусть далее $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^2 и p не является простым элементом кольца K, т. е. $p = \lambda t^e$ $(\lambda \in K^*$, $e > 1$, t — простой элемент кольца K, K^* — мультипликативная группа кольца $K)$. Если группа $H = \langle a \rangle$ обладает по крайней мере четырьмя неэквивалентными неприводимыми F-представлениями, тогда доказательство необходимости аналогично случаю, когда H — циклическая группа порядка p^3. Поэтому в дальнейшем будем считать, что группа $H = \langle a \rangle$ обладает точно тремя неэквивалентными неприводимыми F-представлениями. Пусть $p \neq 2$. Рассмотрим следующее K-представление Γ_1 группы $H = \langle a \rangle$:

$$\Gamma_1(a) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon_2}^{(n)} & \langle t_1 E_n \rangle & \langle A \rangle \\ 0 & \widetilde{\varepsilon_1}^{(n)} & \langle t E_n \rangle \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $t_1 = 1 - \varepsilon_2$ (см. обозначения (14)). Аналогично, как и в случае (14), доказывается, что

$$E(V) \cong \overline{K}(\overline{\theta}), \tag{16}$$

где V — KH-модуль, в котором реализуется представление Γ_1. Следовательно, V — неразложимый KH-модуль. Если $p = 2$, то взяв вместо t_1 в (15) t, получим также утверждение (16). Из (13) и (16) следует доказательство необходимости в случае, когда $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^2. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть K — полное дискретно нормированное кольцо характеристики нуль с полем вычетов характеристики p, p — простой элемент кольца K, F — поле частных кольца K и $G = H \times G_2$, где H — силовская p-подгруппа конечной группы G. Произвольный неразложимый KG-модуль тогда и только тогда представляется в виде внешнего тензорного произведения неразложимого KH-модуля и неприводимого KG_2-модуля, когда F — поле разложения группы G_2 либо H — циклическая группа порядка p^r $(r \leq 2)$.*

Доказательство следствия вытекает из теорем 2 и 4.

Литература

[1] З. И. Боревич, Д. К. Фаддеев, *Теория гомологий в группах.*II // Вестник Ленингр. ун-та. (1959), No 7, 72–87.

[2] П. М. Гудивок, *О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп* // Докл. АН СССР. **214** (1974), No 5, 993–996.

[3] П. М. Гудивок, *О модулярных и целочисленных P-адических представлениях прямого произведения групп* // Укр. мат. журн. **214** (1977), No 5, 580–588.

[4] П. М. Гудивок, *О представлениях прямого произведения групп над полными дискретно нормированными кольцами* // Докл. АН СССР. **237** (1977), No 1, 25–27.

[5] П. М. Гудивок, *Про обмеженість степенів нерозкладних модулярних зображень скінченних груп над кільцями головних ідеалів* // Доп. АН УРСР. Сер. А. (1971), No 8, 683–685.

[6] П. М. Гудивок, *Представления конечных групп над числовыми кольцами* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **31** (1967), No 4, 799–834.

[7] Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* Москва: Наука, 1969, 668 с.

[8] H. I. Blau, *Indecomposable modules for direct products of finite groups* // Pacific J. of Math. **54** (1974), No 1, 39–44.

[9] D. G. Higman, *Indecomposable representations at characteristic p* // Duke Math. J. **21** (1954), 377–381.

[10] A. Jones, *Integral representations of the direct product of groups* // Canad. J. Math. **15** (1963), 625–630.

[11] I. Reiner *Relations between integral and modular representations* // Mich. Math. J. **13** (1966), 357–372.

Сведения об авторах

Петр Михайлович Гудивок

Ужгородский национальный университет,
математический факультет,
ул. Университетская, 14,
88016 Ужгород,
Украина
E-Mail: `algebra@tn.uz.ua`