Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 3, 408 – 437

О целых функциях экспоненциального типа без нулей в открытой нижней полуплоскости

Виктор П. Заставный

(*Представлена Л. А. Пастуром*)

Аннотация. Получены достаточные условия, чтобы целая функция экспоненциального типа не имела нулей в открытой нижней полуплоскости. На вещественной оси получено точное неравенство, содержащее вещественную и мнимую части таких функций и их производные первого порядка.

2000 MSC. 30C15, 30D15, 42A82, 60E10.

Ключевые слова и фразы. Целая функция, теорема Эрмита—Билера, положительно определённая функция, преобразование Фурье.

1. Введение. Формулировка основных результатов

В данной работе изучаются целые функции, которые не имеют нулей в открытой нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Результатом исследований таких функций для алгебраических многочленов является известная теорема Эрмита—Билера. Перенесение этой теоремы на произвольные целые функции было сделано в работах М. Г. Крейна, Б. Я. Левина и Н. Н. Меймана (более подробно см., например, [1–4]).

Целая функция f называется целой функцией экспоненциального типа (в [1] такие функции называются функциями конечной степени), если существуют числа $A > 0$, $B > 0$ такие, что неравенство $|f(z)| \le Ae^{B|z|}$ выполняется для всех $z \in \mathbb{C}$. Точная нижняя грань таких чисел B обозначается через $\sigma(f) \ge 0$ и называется типом функции f. Обозначим через E_σ, $\sigma \ge 0$, класс целых функций f экспоненциального типа $\sigma(f) \le \sigma$.

Целью данной работы является доказательство следующих теорем 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4.

Статья поступила в редакцию 23.03.2006

Теорема 1.1. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$, *где* P, Q — *вещественные*[1] *функции класса* E_σ, $\sigma > 0$, *и на вещественной оси* $\omega(x) = o(x)$, $x \to \pm\infty$; 2) *при некотором* $\tau \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство*

$$E(x) := P(x)\cos(\sigma x + \tau) + Q(x)\sin(\sigma x + \tau) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Пусть $d(x) := P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x)$. *Тогда:*

1) *При всех* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство*

$$4\sigma d(x) \geq \big\{(\sigma P(x) + Q'(x))\sin(\sigma x + \tau) \\ + (P'(x) - \sigma Q(x))\cos(\sigma x + \tau)\big\}^2. \tag{1.2}$$

2) *Следующие условия эквивалентны:*

i) *неравенство* (1.2) *обращается в тождество;*

ii) *при некоторых* $c \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *выполняется тождество* $E(x) \equiv c\sin^2(\sigma x + \tau + \beta)$;

iii) *при некотором* $\beta \in \mathbb{R}$ *и для всех* $k \in \mathbb{Z}$ *выполняются равенства* $E\big(\frac{k\pi - \beta - \tau}{\sigma}\big) = 0$;

iv) *при некоторых* $c \geq 0$ *и* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *выполняются тождества*

$$\begin{aligned} P(x) &\equiv c\sin\beta\sin(\sigma x + \tau + \beta) + \gamma\sin(\sigma x + \tau), \\ Q(x) &\equiv c\cos\beta\sin(\sigma x + \tau + \beta) - \gamma\cos(\sigma x + \tau). \end{aligned} \tag{1.3}$$

В этом случае $d(x) \equiv \gamma^2\sigma$.

3) *Если при любых* $\alpha \in \mathbb{R}$ *и* $c \geq 0$ $E(x) \not\equiv c\sin^2(\sigma x + \tau + \alpha)$, *то неравенство* (1.2) *обращается в равенство при некотором* $x = x_0 \in \mathbb{R} \iff E(x_0) = 0$.

Для целой функции $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — вещественные целые функции, положим $\overline{\omega}(z) := P(z) - iQ(z)$. Это целая функция, которая получается из $\omega(z)$ заменой в её разложении по степеням $\{z^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, всех коэффициентов на сопряжённые. Очевидно, $\overline{\omega}(z) = \overline{\omega(\overline{z})}$.

Определение 1.1. *Целая функция* $\omega(z)$ *называется функцией класса* HB, *если она не имеет нулей в замкнутой нижней полуплоскости* $\operatorname{Im} z \leq 0$ *и* $\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right| < 1$ *при* $\operatorname{Im} z > 0$.

[1] Мы называем функцию вещественной, если на вещественной оси она принимает вещественные значения

Определение 1.2. *Целая функция $\omega(z)$ называется функцией класса $\overline{HB}$, если она не имеет нулей в открытой нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ и $\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right| \le 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$.*

Знак равенства в определении 1.2 возможен только в том случае, когда $\omega(z)$ с точностью до постоянного множителя является вещественной функцией. Такие функции называются тривиальными функциями класса $\overline{HB}$. Очевидно, $\omega \in HB \iff$ *функция $\omega \in \overline{HB}$, не имеет вещественных нулей и не является тривиальной.*

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и функция ω не является вещественной с точностью до постоянного множителя. Тогда:*

1) *Функция $\omega \in \overline{HB}$. Если у функции ω есть вещественные нули, то они простые.*

2) *$d(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R} \iff \omega(x_0) = 0$. Если число $x_0 \in \mathbb{R}$ является нулём функции ω, то для функции d число x_0 является нулём кратности 2.*

3) *При всех $n \in \mathbb{N}$ производная $\omega^{(n)} \in HB$.*

В следствии 4.1 приведены примеры, когда выполняются условия теорем 1.1 и 1.2. Отметим, что теоремы 1.1 и 1.2 перестают быть верными, если условие $\omega(x) = o(x)$, $x \to \pm\infty$ заменить на условие $\omega(x) = O(x)$, $x \to \pm\infty$ (см. замечание 3.2).

Для заданной функции μ, которая имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, \sigma]$, $\sigma > 0$, будем рассматривать следующие целые функции

$$F(z) := \int_0^\sigma e^{izt}\, d\mu(t); \qquad G(z) := \int_0^\sigma \cos zt\, d\mu(t);$$
$$H(z) := \int_0^\sigma \sin zt\, d\mu(t). \tag{1.4}$$

$$\Delta(z) := G(z)H'(z) - G'(z)H(z);$$
$$h_\alpha(z) := G(z)\cos\alpha - H(z)\sin\alpha. \tag{1.5}$$

$$C(z) := -\int_0^\sigma \cos zt\, d\mu(\sigma - t); \qquad S(z) := -\int_0^\sigma \sin zt\, d\mu(\sigma - t). \tag{1.6}$$

Функцию μ, очевидно, всегда можно считать непрерывной слева в каждой точке интервала $(0, \sigma)$. Если $F(z) \not\equiv ce^{i\alpha z}$, то функция F имеет бесконечно много нулей (см., например, [5]). Функции вида (1.4) встречаются в различных задачах анализа, например, в спектральной теории, в теории дифференциально-разностных уравнений, в теории положительно определённых функций, в анализе Фурье и т.д. (см., например, [5–9]). Распределение нулей таких функций изучалось в работах Харди [10], Пойа [11], Титчмарша [12], Картрайт [13,14], Седлецкого [15,16] и др. В работе Пойа [11] исследован случай, когда функция μ абсолютно непрерывна и $d\mu(t) = g(t)dt$, где функция g интегрируема, положительна и не убывает на интервале $(0,\sigma)$. Им доказано, что в этом случае все нули функции F лежат в замкнутой верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, а если g не является кусочно постоянной с равностоящими узлами, то у функции F нет вещественных нулей. Эти результаты Пойа были уточнены и дополнены в работах автора [17,18].

Теорема 1.3. *Пусть μ — вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0,\sigma]$, $C(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $F(z) \not\equiv 0$. Тогда функция $F \in \overline{HB}$ и не является тривиальной. Все вещественные нули функции F (если они есть) простые.*

Теорема 1.4. *Пусть μ — вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0,\sigma]$, $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$ и $F(z) \not\equiv 0$. Тогда все отличные от нуля вещественные нули функции F (если они есть) простые, а, если число $x = 0$ является нулём функции F, то его кратность не более, чем 2. Кроме того, имеет место неравенство $\mu(\sigma - 0) \geq \mu(0)$ и:*

1) *Если $F(0) \in (-\infty, 0] \cup [\mu(\sigma-0)-\mu(0), +\infty)$, то функция $F \in \overline{HB}$ и не является тривиальной.*

2) *Если $F(0) \in (0, \mu(\sigma - 0) - \mu(0))$, то у функции F в открытой нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ имеется ровно один нуль и он чисто мнимый.*

В § 5 приведены примеры, когда выполняются условия теорем 1.3 и 1.4. Случай Пойа содержится в утверждении 1 теоремы 1.4 (см. пример 5.1 в § 5). Отметим, что в теореме 1.4 реализуются оба случая (если изменить величину $\mu(\sigma)$, то значения $S(x)$ и $\mu(\sigma - 0)$ не меняются, а значение $F(0) = \mu(\sigma) - \mu(0)$ можно сделать любым). Отметим также, что $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0 \iff \mu(t) - \mu(0) \equiv f(\sigma - t)$ при $0 \leq t < \sigma$, где f — чётная, положительно определённая и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, равная нулю при $|t| \geq \sigma$ (лемма 2.2). Связь между функциями класса $\overline{HB}$ вида (1.4) и положительно определёнными функциями содержится в предложении 5.1 (см. § 5).

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Утверждения о функциях (1.4), (1.5) и (1.6)

$$\begin{gathered} F(z) \equiv G(z) + iH(z); \\ F(z)e^{-i\sigma z} \equiv -\int_0^\sigma e^{-izt}\,d\mu(\sigma - t) \equiv C(z) - iS(z). \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} G(z) &\equiv C(z)\cos\sigma z + S(z)\sin\sigma z; \\ H(z) &\equiv C(z)\sin\sigma z - S(z)\cos\sigma z. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$G(z)\cos(\sigma z + \tau) + H(z)\sin(\sigma z + \tau) \equiv C(z)\cos\tau - S(z)\sin\tau\ . \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} h_\alpha(z) &\equiv C(z)\cos(\sigma z + \alpha) + S(z)\sin(\sigma z + \alpha); \\ h_\alpha(z)h'_\beta(z) - h'_\alpha(z)h_\beta(z) &\equiv \Delta(z)\sin(\alpha - \beta). \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\Delta(x) \equiv C'(x)S(x) - C(x)S'(x) + \sigma\left(C^2(x) + S^2(x)\right)\ . \tag{2.5}$$

Эти тождества непосредственно получаются из (1.4), (1.5) и (1.6).

Лемма 2.1. **1)** i) $G(z) \equiv 0 \iff F(z) \equiv 0$. ii) $H(z) \equiv 0 \iff F(z) \equiv c$. iii) $C(z) \equiv 0 \iff F(z) \equiv 0$. iv) $S(z) \equiv 0 \iff F(z) \equiv ce^{i\sigma z}$. v) $h_\alpha(z) \equiv 0$ *при некотором* $\alpha \iff G(z)\cos\alpha \equiv H(z)\sin\alpha \equiv 0$.

2) *Функция* F *является вещественной с точностью до постоянного множителя* $\iff F(z) \equiv c$.

3) $x^n(C(x)\cos\tau - S(x)\sin\tau) \equiv c\sin^2(\sigma x + \tau + \alpha)$ *при некоторых* $\tau, \alpha, c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z} \iff C(x)\cos\tau - S(x)\sin\tau \equiv 0 \iff C(x)\cos\tau \equiv S(x)\sin\tau \equiv 0$.

4) *Если* $F(z) \equiv ce^{(i\alpha+\beta)z}$ *при некоторых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, *то* $\beta = 0$ *и* $\alpha \in [0, \sigma]$.

5) *Если* $F(z) \equiv ce^{i\alpha z}$ *при некоторых* $c \neq 0$, $\alpha \in [0, \sigma]$ *и при всех* $x > 0$ *выполняется неравенство* $C(x)\cos\tau - S(x)\sin\tau \geq 0$, *то* $\alpha = \sigma$.

6) *Если* $F(z) \not\equiv 0$ *и* $C(x)\cos\tau - S(x)\sin\tau \geq 0$ *при* $x > 0$, *то функция* F *не является вещественной с точностью до постоянного множителя и* $h_\alpha(z) \not\equiv 0$.

7) *Если при некоторых* $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ *и для любых* $t > e$ *выполняется неравенство* $f(t) := a\sin^2(t+b) + c\cos t + d\sin t \geq 0$, *то* $c = d = 0$ *и* $a \geq 0$.

8) *Если* μ *— вещественная и* $F(0) \neq 0$, *то* $F(z) \not\equiv cR(z)(z + i\xi)$, *где* $\xi \in \mathbb{R}$, *а* $R(z)$ *— вещественная целая функция.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). i) Если $G(z) \equiv 0$, то $\int_0^\sigma t^{2p}d\mu(t) = 0$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. По теореме Мюнца система степеней $\{t^{2p}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ замкнута в $C[0,1]$. Поэтому $\int_0^\sigma f(t)d\mu(t) = 0$

для любой функции $f \in C[0,1]$. Поэтому $F(z) \equiv 0$. И наоборот, из тождества $F(z) = G(z) + iH(z) \equiv 0$, в силу чётности G и нечётности H, следует, что $G(z) \equiv H(z) \equiv 0$.

ii) Если $H(z) \equiv 0$, то $\int_0^\sigma t^{2p+1} d\mu(t) = 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\int_0^\sigma f(t)\, t\, d\mu(t) = 0$ для любой функции $f \in C[0,1]$. Поэтому $F'(z) \equiv 0$ и, значит, $F(z) \equiv c$. И наоборот, если $F(z) \equiv c$, то $2iH(z) \equiv F(z) - F(-z) \equiv 0$. Доказательство iii) и iv) вытекает из i), ii) и (2.1). Утверждение v) сразу следует из (1.5), если учесть, что G — чётная, а H — нечётная функции.

Докажем утверждение 2). Пусть функция F является вещественной с точностью до постоянного множителя. Без ограничения общности считаем, что функция F является вещественной. Пусть $\mu(t) = \mu_1(t) + i\mu_2(t)$, где $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — вещественные функции ограниченной вариации на отрезке $[0,\sigma]$. Тогда $\mathrm{Im}(F(x)) \equiv \int_0^\sigma \sin xt\, d\mu_1(t) + \int_0^\sigma \cos xt\, d\mu_2(t) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, и, значит, $\int_0^\sigma \sin xt\, d\mu_1(t) \equiv \int_0^\sigma \cos xt\, d\mu_2(t) \equiv 0$. Из утверждения 1) вытекает, что $\int_0^\sigma e^{izt}\, d\mu_1(t) \equiv c$ и $\int_0^\sigma e^{izt}\, d\mu_2(t) \equiv 0$. Поэтому $F(z) \equiv c$. Обратное утверждение очевидно.

Докажем утверждение 3). Если имеет место указанное тождество, то $c = 0$ (в противном случае в левой части стоит целая функция экспоненциального типа $\le \sigma$, а тип функции в правой части в точности равен 2σ). Поэтому $C(x)\cos\tau - S(x)\sin\tau \equiv 0$, что эквивалентно двум тождествам $C(x)\cos\tau \equiv S(x)\sin\tau \equiv 0$.

Докажем утверждение 4). Если $\beta \ne 0$, то правая часть тождества неограничена на $\mathbb{R}$, а левая ограничена. Поэтому $\beta = 0$ и $F(z) \equiv ce^{i\alpha z}$, $c \ne 0$. Если $\alpha > \sigma$, то тип функции в правой части тождества больше типа функции в левой части. Если $\alpha < 0$, то $F(iy) = \int_0^\sigma e^{-yt} d\mu(t) \equiv ce^{-\alpha y}$. Левая часть при $y \to +\infty$ ограничена, а правая — неограничена. Таким образом, $\alpha \in [0,\sigma]$.

Докажем утверждение 5). В этом случае $C(x)\cos\tau - S(x)\sin\tau \equiv c\cos((\sigma-\alpha)x + \tau) \ge 0$ при $x > 0$, где $c \ne 0$, $\alpha \in [0,\sigma]$. Если $\alpha < \sigma$, то $\exists\, x_0 > 0 : c\cos((\sigma-\alpha)x_0+\tau) \ne 0$. Тогда при $x = x_0$ и $x = x_0 + \frac{\pi}{\sigma-\alpha}$ левая часть неравенства принимает значения разных знаков. Поэтому $\alpha = \sigma$.

Докажем утверждение 6). Если функция F является вещественной с точностью до постоянного множителя, то $F(z) \equiv c$, причём $c \ne 0$, чего не может быть (см. утверждение 5 при $\alpha = 0$). Если $h_\alpha(z) \equiv 0$, то $G(z)\cos\alpha \equiv H(z)\sin\alpha \equiv 0$ и, значит, $F(z) \equiv c$, $c \ne 0$, чего не может быть.

Докажем утверждение 7). Пусть $t_k := -b + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда при всех $k > k_0$ выполняются неравенства $f(t_k) = (-1)^k(c\cos b - d\sin b) \ge 0$, и, значит, $c\cos b - d\sin b = 0$. Поэтому $f(t_k) = 0$ при всех $k > k_0$, и, значит, $f'(t_k) = (-1)^k(c\sin b + d\cos b) = 0$. Следовательно, $c = d = 0$, и, значит, $a \geq 0$.

Докажем утверждение 8). Без ограничения общности можно считать, что функция μ непрерывна слева в каждой точке интервала $(0,\sigma)$. Предположим, что $F(z) \equiv cR(z)(z+i\xi)$, где $\xi \in \mathbb{R}$, а $R(z)$ - вещественная целая функция. Так как $F(0) = ic\xi R(0) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, то можно считать, что $c = -i$ и $\xi \neq 0$. Тогда $\xi R(z) = \int_0^\sigma \cos zt\, d\mu(t)$ и $zR(z) = -\int_0^\sigma \sin zt\, d\mu(t) = z\int_0^\sigma \cos zt(\mu(t) - \mu(\sigma))\, dt = z\int_0^\sigma \cos zt\, d\mu_1(t)$, где $\mu_1(t) = \int_\sigma^t(\mu(u) - \mu(\sigma))\, du$. Поэтому при $t \in [0,\sigma]$ справедливо тождество $\mu(t) - \mu(\sigma) \equiv \xi\int_\sigma^t(\mu(u) - \mu(\sigma))\, du$, из которого вытекает, что $\mu \in C^1[0,\sigma]$ и $\mu(t) - \mu(\sigma) \equiv c_1e^{\xi t}$. Следовательно, $\mu(t) - \mu(\sigma) \equiv 0$ и, значит, $F(z) \equiv 0$, что противоречит условию. $\square$

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$, если для любых $n \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ и $\{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\sum_{k,j=1}^n c_k\bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0$. Для таких функций $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ и непрерывность в нуле эквивалентна непрерывности на $\mathbb{R}$. По теореме Бохнера—Хинчина функция f является положительно определённой и непрерывной на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\, d\nu(u)$, где ν неотрицательная, конечная, борелевская мера на $\mathbb{R}$. Если $f \in C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, то положительная определённость функции f эквивалентна неотрицательности её преобразования Фурье, т.е. $\widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iux}\, du \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ и в этом случае $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$ (см. [19, гл. I, §1, следствие 1.26]).

Лемма 2.2. *Пусть μ — вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0,\sigma]$ и непрерывна слева в каждой точке интервала $(0,\sigma)$. Тогда:*

1) *$S(x) \geq 0$ при всех $x > 0 \iff \mu(t) - \mu(0) \equiv f(\sigma - t)$ при $0 \leq t < \sigma$, где f — чётная, положительно определённая и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, $f(t) = 0$, $|t| \geq \sigma$. В этом случае $f(0) = \mu(\sigma - 0) - \mu(0) \geq 0$ и $\mu(\sigma - 0) - \mu(0) = 0 \iff S(x) \equiv 0 \iff F(z) \equiv ce^{i\sigma z}, c \in \mathbb{R}$.*

2) *Если $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$ и $F(0) \leq 0$, то $H'(0) \leq 0$. В этом случае $F'(0) = 0 \iff H'(0) = 0 \iff F(0) = 0$ и $\int_0^\sigma f(t)dt = 0$, где f — соответствующая функция из утверждения 1).*

3) *Если $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$ и $F(0) \geq \mu(\sigma - 0) - \mu(0)$, то $H'(0) \geq 0$. В этом случае $F'(0) = 0 \iff H'(0) = 0 \iff F(z) \equiv 0$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Из (1.6) и формулы интегрирования по частям получаем, что $S(x) = xK(x)$, где $K(x) := \int_0^\sigma \cos tx\,(\mu(\sigma - t) - \mu(0))\,dt$. Пусть сначала $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$. Функция $2K(x)$ является преобразованием Фурье финитной, интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции $\mu((\sigma - |t|)_+) - \mu(0)$, которая ограничена в окрестности нуля. Так как $K(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $K \in L(\mathbb{R})$ (см., например, [9, 20]) и, значит, при почти всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место формула обращения (см., например, [9, 19, 20])

$$\mu((\sigma - |t|)_+) - \mu(0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} K(x)\,dx =: f(t)\ .$$

Функция f, стоящая в правой части последнего равенства, является чётной, непрерывной и положительно определённой на $\mathbb{R}$. Левая часть последнего равенства равна 0 при $|t| \geq \sigma$. Поэтому из непрерывности f следует, что $f(t) = 0$ при всех $|t| \geq \sigma$. Так как функция μ непрерывна слева в каждой точке интервала $(0, \sigma)$, то из последнего равенства также вытекает непрерывность функции μ в каждой точке этого интервала и $\mu(0 + 0) - \mu(0) = f(\sigma) = 0$. Поэтому $\mu \in C[0, \sigma)$ и $\mu(t) - \mu(0) \equiv f(\sigma - t)$ при $0 \leq t < \sigma$. Обратное утверждение очевидно. Первая часть утверждения 1) доказана. Вторая часть вытекает из неравенства $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ и леммы 2.1 (утверждение 1).

Утверждение 2) сразу получается из равенств $F'(0) = iH'(0)$, $F(0) = \mu(\sigma) - \mu(0)$, $H'(0) = \int_0^\sigma t\,d\mu(t) = \sigma F(0) - \int_0^\sigma f(\sigma - t)\,dt$ и неравенства $\int_0^\sigma f(t)\,dt \geq 0$.

Утверждение 3) сразу получается из неравенств $|f(t)| \leq f(0)$ и $H'(0) = \int_0^\sigma (F(0) - f(t))\,dt \geq \int_0^\sigma (f(0) - f(t))\,dt \geq 0$. Если $H'(0) = 0$, то $F(0) = f(0) \equiv f(t)$ при $t \in [0, \sigma]$ и, значит, $f(0) = 0$, $S(x) \equiv 0$, $F(z) \equiv ce^{i\sigma z}$, где $c = F(0) = 0$. □

Лемма 2.3. *Пусть f, g — положительно определённые на $\mathbb{R}$ функции из класса $C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ и $f(x) \not\equiv 0$, $g(x) \not\equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Если функция f финитная, то:* **1)** $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx > 0$; **2)** *при всех $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$: $|\beta| \leq \alpha$ выполняется неравенство* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}(1 - \beta|x|) f(x)\,dx > 0$.

Доказательство. Так как $\widehat{f}(t) \geq 0$ и $\widehat{g}(t) \geq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, то $\widehat{f}, \widehat{g} \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Из формулы умножения вытекает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(-t) \widehat{f}(t)\,dt \geq 0\ .$$

Если интеграл равен 0, то $\widehat{g}(-t)\widehat{f}(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Так как $g(x) \not\equiv 0$, то $\widehat{g}(-t) \neq 0$ на некотором интервале (a,b), $a < b$. Поэтому $\widehat{f}(t) = 0$ на (a,b), а так как $\widehat{f}$ — целая, то $\widehat{f}(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Поэтому $f(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, что противоречит условию. Первое неравенство доказано. Второе неравенство вытекает из первого, если взять $g(x) := e^{-\alpha|x|}(1-\beta|x|)$. Тогда при указанных значениях параметров $g \in C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ и $\widehat{g}(t) = \frac{2((\alpha-\beta)\alpha^2+(\alpha+\beta)t^2)}{(\alpha^2+t^2)^2} \geq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. □

Лемма 2.4. *Пусть ν — функция ограниченной вариации на отрезке $[0,\sigma]$. Тогда справедливо равенство $\lim_{t\to+\infty} \int_0^\sigma e^{-tu} d\nu(u) = \nu(+0) - \nu(0)$.*

Доказательство. Пусть сначала функция ν непрерывна справа в точке $t = 0$. Тогда при любых $\varepsilon \in (0,\sigma)$ и $t > 0$ выполняется неравенство $\left|\int_0^\sigma e^{-tu} d\nu(u)\right| \leq V_0^\varepsilon + e^{-\varepsilon t} V_0^\sigma$. Здесь V_0^t — вариация функции ν на отрезке $[0,t]$. Переходя к пределу, получаем, что $\limsup_{t\to+\infty} \left|\int_0^\sigma e^{-tu} d\nu(u)\right| \leq V_0^\varepsilon$. Так как ν непрерывна справа в точке $t = 0$, то $\lim_{\varepsilon\to+0} V_0^\varepsilon = 0$. В этом случае лемма доказана. В общем случае полагаем $\nu_1(0) := \nu(+0)$ и $\nu_1(t) := \nu(t)$ при $0 < t \leq \sigma$. Очевидно ν_1 — функция ограниченной вариации на отрезке $[0,\sigma]$ и непрерывна справа в точке $t = 0$. Тогда $\int_0^\sigma e^{-tu} d\nu(u) = \int_0^\sigma e^{-tu} d\nu_1(u) + \nu(+0) - \nu(0) \to \nu(+0) - \nu(0)$ при $t \to +\infty$. □

2.2. Утверждения о функциях класса $\overline{HB}$

Следующие свойства доказаны в [1, Глава VII]:

1) *Если $\omega(z) \in \overline{HB}$, то общие нули (если они есть) функций $\omega(z)$ и $\overline{\omega}(z)$ вещественны.*

2) *Тривиальные функции класса $\overline{HB}$ не имеют нулей в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

3) *Пусть функция $\omega(z)$ не является тривиальной. Тогда $\omega(z) \in \overline{HB} \iff \omega(z) = R(z)\omega_1(z)$, где $R(z)$ — вещественная целая функция, которая не имеет нулей в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, а $\omega_1(z) \in HB$.*

4) *Если последовательность функций $\omega_n(z) \in \overline{HB}$ сходится равномерно на каждом компакте из $\mathbb{C}$ к функции $\omega(z) \not\equiv 0$, то $\omega(z) \in \overline{HB}$.*

Для функции $\omega(z) = P(z)+iQ(z)$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — вещественные целые функции, положим $d(z) := P(z)Q'(z) - P'(z)Q(z)$ и $H_\alpha(z) := P(z)\cos\alpha - Q(z)\sin\alpha$. Если функция $\omega(z)$ является вещественной с точностью до постоянного множителя, то, очевидно, $d(x) \equiv 0$.

Теорема A (Б. Я. Левин [1, Глава VII, Теорема 4] и Н. Н. Мейман [4, Глава IV, Теорема 15′]). $\omega(z) \in HB \iff$ **1)** *функции* $P(z)$ *и* $Q(z)$ *не имеют общих нулей и для любых* $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $|\mu| + |\nu| \neq 0$, *функция* $\mu P(z) + \nu Q(z)$ *не имеет нулей в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; **2)** *при некотором* $x_0 \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство* $d(x_0) > 0$. *Кроме того, при выполнении условий* 1) *и* 2) *неравенство* $d(x) > 0$ *выполняется при любых* $x \in \mathbb{R}$.

Теорема B (Б. Я. Левин [1, Глава VII, Теорема 4′]). *Пусть функция* $\omega(z)$ *не является тривиальной. Тогда* $\omega(z) \in \overline{HB} \iff$ **1)** *для любых* $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $|\mu| + |\nu| \neq 0$, *функция* $\mu P(z) + \nu Q(z)$ *не имеет нулей в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; **2)** *при некотором* $x_0 \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство* $d(x_0) > 0$. *Кроме того, при выполнении условий* 1) *и* 2) *неравенство* $d(x) \geq 0$ *выполняется при любых* $x \in \mathbb{R}$.

Из теорем A и B сразу получается следующее предложение.

Предложение 2.1. *Пусть функция* $\omega(z) \in \overline{HB}$ *и не является тривиальной. Тогда:*

1) $d(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2) $d(x_0) = 0$ *при некотором* $x_0 \in \mathbb{R} \iff \omega(x_0) = 0 \iff P(x_0) = Q(x_0) = 0$. *Если число* $x_0 \in \mathbb{R}$ *является нулём кратности* p *для функции* ω, *то для функции* d *число* x_0 *является нулём кратности* $2p$.

3) *Для всех* $\alpha \in \mathbb{R}$ *функция* H_α *является вещественной и не имеет нулей в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Если число* $x_0 \in \mathbb{R}$ *является нулём функции* H_α *кратности* q, *то* $q \leq p + 1$, *где* p — *кратность нуля* x_0 *для функции* ω ($p = 0$, *если* $\omega(x_0) \neq 0$). *Если у функции* ω *нет вещественных нулей, то все нули функции* H_α (*если они есть*) *простые.*

Доказательство. По свойству 3 $\omega(z) = R(z)\omega_1(z)$, где $R(z)$ — вещественная целая функция, которая не имеет нулей в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, а $\omega_1(z) \in HB$. Тогда $\omega(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R} \iff R(x_0) = 0$ и в этом случае кратности нуля x_0 для $\omega(z)$ и $R(z)$ совпадают. Если $\omega_1(z) = P_1(z) + iQ_1(z)$, где $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ — вещественные целые функции, то по теореме A $d_1(x) := P_1(x)Q_1'(x) - P_1'(x)Q_1(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, $P(z) = R(z)P_1(z)$ и $Q(z) = R(z)Q_1(z)$. Тогда $d(x) = R^2(x)d_1(x)$. Поэтому $d(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R} \iff R(x_0) = 0$ и в этом случае кратность нуля x_0 для функции d в два раза больше кратности нуля x_0 для функции R. Утверждения 1) и 2) доказаны.

Для доказательства утверждения 3) следует заметить, что по теореме A при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $H_{1,\alpha}(z) := P_1(z)\cos\alpha - Q_1(z)\sin\alpha$

не имеет нулей в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, а все её вещественные нули (если они есть) простые. Это следует из равенства $H_{1,\alpha}(x)H'_{1,\beta}(x)-H'_{1,\alpha}(x)H_{1,\beta}(x)\equiv d_1(x)\sin(\alpha-\beta)$. Осталось учесть, что $H_\alpha(x)=R(x)H_{1,\alpha}(x)$. $\square$

Индикатор роста целой функции экспоненциального типа определяется по формуле $h_f(\varphi):=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}$, $\varphi\in\mathbb{R}$.

Определение 2.1. *Функция $\omega(z)$ называется функцией класса P, если она является целой функцией экспоненциального типа, не имеет нулей в открытой нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$ и $2d_\omega:=h_\omega\left(-\frac{\pi}{2}\right)-h_\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)\geq 0$ (величина d_ω называется дефектом функции ω).*

Теорема C (Б. Я. Левин [1, Глава VII, Лемма 1]). *$\omega(z)\in P\iff\omega(z)\in\overline{HB}$ и $\omega(z)$ является целой функцией экспоненциального типа.*

Так как $\overline{\omega}(z)\equiv\overline{\omega(\overline{z})}$, то очевидно, что произведение двух функций из класса HB также является функцией класса HB, т.е. $HB\cdot HB\subset HB$. Аналогично $\overline{HB}\cdot\overline{HB}\subset\overline{HB}$. Из теоремы C вытекает, что и $P\cdot P\subset P$. Классы функций HB и P были введены и изучены соответственно М. Г. Крейном и Б. Я. Левиным. Приведенное определение 1.1 принадлежит Н. Н. Мейману.

Пусть $\mu(t)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, $a<b$, которая непрерывна слева в каждой точке интервала (a,b) и $\omega(z):=\int_a^b e^{izt}d\mu(t)$. Следующие результаты о функциях такого вида содержатся в монографии [5, Глава I] и позволяют легко определять их дефект. Пусть $[a_1,b_1]$ — наименьший отрезок, содержащийся в $[a,b]$ и обладающий свойством: функция $\mu(t)$ постоянна на $[a,a_1]$ и на $(b_1,b]$. Если такого промежутка $[a,a_1]$ или $(b_1,b]$ не существует, то соответственно считаем $a_1=a$ или $b_1=b$. Если $a_1=b_1$, то $\omega(z)\equiv ce^{ia_1z}$. Если $a_1<b_1$, то $\omega(z)=\int_{a_1}^{b_1}e^{izt}d\mu_1(t)$, где функция $\mu_1(t)$ совпадает с $\mu(t)$ при $a_1\leq t<b_1$ и $\mu_1(b_1):=\mu(b)$. В этом случае (см. [5, Глава I, §4.3]) функция $\omega(z)$ имеет бесконечно много нулей и $h_\omega\left(-\frac{\pi}{2}\right)=b_1$, $h_\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)=-a_1$ и, значит, $2d_\omega=b_1+a_1$. Кроме того, верхний предел в определении индикатора роста при почти всех $\varphi\in\mathbb{R}$ равен просто пределу.

Предложение 2.2. *Пусть $F(z):=\int_0^\sigma e^{izt}d\mu(t)$, где $\mu(t)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[0,\sigma]$, $\sigma>0$. Тогда:*

1) *Если $F(z)\not\equiv ce^{i\alpha z}$, $\alpha\in[0,\sigma]$, то функция F имеет бесконечно много нулей.*

2) $F \in \overline{HB} \iff F$ *не имеет нулей в открытой нижней полуплоскости* $\operatorname{Im} z < 0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что функция $\mu(t)$ непрерывна слева в каждой точке интервала $(0, \sigma)$. Утверждение 1) отмечалось выше. Необходимость в 2) очевидна. Докажем достаточность в 2). Пусть функция F не имеет нулей в открытой нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Если $F(z) \equiv ce^{i\alpha z}$, то $c \neq 0$ и $\alpha \in [0, \sigma]$ (лемма 2.1, утверждение 4). В этом случае легко проверить, что $F \in \overline{HB}$ (а если $\alpha > 0$, то $F \in HB$). Если $F(z) \not\equiv ce^{i\alpha z}$, то (см. выше) $0 \leq a_1 < b_1 \leq \sigma$, $2d_\omega = b_1 + a_1 > 0$ и,значит, $F \in P$. По теореме C функция $F \in \overline{HB}$. $\square$

2.3. Интерполяционная формула

Обозначим через B_σ^m, $m \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, класс функций $f \in E_\sigma$, для которых на вещественной оси выполняется соотношение $f(x) = o(x^m)$, $x \to \pm\infty$.

Через S_σ, $\sigma > 0$, обозначим класс функций типа синуса, т.е. множество функций $F \in E_\sigma$, которые удовлетворяют условиям: **a)** $h_F(\pm\frac{\pi}{2}) = \sigma$; **b)** *все нули* λ_k *функции* F *простые и удовлетворяют условию* $\inf_{k \neq n} |\lambda_k - \lambda_n| = 2\delta > 0$; **c)** *все нули расположены в полосе паралельной вещественной оси, т.е.* $\sup_k |\operatorname{Im} \lambda_k| = H < \infty$; **d)** *существуют константы* $C_k, h \in \mathbb{R}$ *такие, что* $0 < C_1 \leq |F(x + ih)| \leq C_2 < \infty$, $x \in \mathbb{R}$.

Если $F \in S_\sigma$, то тип $\sigma(F) = \sigma > 0$ и F имеет бесконечно много нулей как в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$, так и в правой $\operatorname{Re} z \geq 0$. Нули функции $F \in S_\sigma$ всегда нумеруются в порядке возрастания их вещественных частей, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_k \leq \operatorname{Re} \lambda_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Примером такой функции является функция $F(z) := \sin(\sigma z + \alpha)$.

Теорема D ([18, Лемма 1]). *Пусть* $F \in S_\sigma$, $\sigma > 0$, *и* $\{\lambda_k\}$ *последовательность всех её нулей. Тогда для любых* $m \in \mathbb{Z}_+$, $f \in B_\sigma^m$, $\tau \in \mathbb{C}$ *и* $z \in \mathbb{C}, z \neq \lambda_k + \tau$ *справедливо равенство*

$$\frac{d^m}{du^m}\left\{\frac{f(u)}{F(u-\tau)}\right\}\Big|_{u=z} = -m! \lim_{n\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<n} \frac{f(\lambda_k + \tau)}{F'(\lambda_k)(\lambda_k + \tau - z)^{m+1}}.$$

Отметим, что для более узкого класса функций f эта формула хорошо известна (более подробно см. [18, § 1]).

3. Доказательство теорем 1.1 и 1.2

Доказательство теоремы 1.1. Если f — целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma$, $\sigma > 0$, и $f(x) = o(x)$, $x \to \pm\infty$, то при любых α и x справедлива следующая интерполяционная формула

$$\sigma f(x)\cos(\sigma x+\alpha) - f'(x)\sin(\sigma x+\alpha)$$
$$= \sigma \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin^2(\sigma x+\alpha)}{(\sigma x+\alpha-k\pi)^2}\cdot(-1)^k f\Big(\frac{k\pi-\alpha}{\sigma}\Big). \quad (3.1)$$

Это следует из теоремы D при $F(z) := \sin(\sigma z+\alpha)$, $\lambda_k = \frac{k\pi-\alpha}{\sigma}$, $m=1$, $\tau = 0$, $z = x$.

Применим формулу (3.1) к функции $f(x) := P\left(x-\frac{\tau}{\sigma}\right)\cos\alpha - Q\left(x-\frac{\tau}{\sigma}\right)\sin\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Так как $(-1)^k f\left(\frac{k\pi-\alpha}{\sigma}\right) = E\left(\frac{k\pi-\alpha-\tau}{\sigma}\right) \geq 0$ при всех $k\in\mathbb{Z}$, то

$$\sigma\Big(P\Big(x-\frac{\tau}{\sigma}\Big)\cos\alpha - Q\Big(x-\frac{\tau}{\sigma}\Big)\sin\alpha\Big)\cos(\sigma x+\alpha)$$
$$-\Big(P'\Big(x-\frac{\tau}{\sigma}\Big)\cos\alpha - Q'\Big(x-\frac{\tau}{\sigma}\Big)\sin\alpha\Big)\sin(\sigma x+\alpha) =$$
$$\sigma\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\sigma x+\alpha)}{(\sigma x+\alpha-k\pi)^2}\cdot E\Big(\frac{k\pi-\alpha-\tau}{\sigma}\Big) \geq 0, \qquad \alpha, x\in\mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим сначала случай $\tau = 0$. Тогда

$$\sigma(P(x)\cos\alpha - Q(x)\sin\alpha)\cos(\sigma x+\alpha)$$
$$-(P'(x)\cos\alpha - Q'(x)\sin\alpha)\sin(\sigma x+\alpha) \geq 0, \qquad \alpha, x\in\mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Предположим, что при некотором $\beta\in\mathbb{R}$ и для всех $k\in\mathbb{Z}$ выполняются равенства $E\big(\frac{k\pi-\beta}{\sigma}\big) = 0$. Тогда неравенство (3.3) при $\alpha=\beta$ обращается в тождество по $x\in\mathbb{R}$ и, значит, при некоторой константе $\gamma\in\mathbb{R}$ имеет место тождество $P(x)\cos\beta - Q(x)\sin\beta \equiv \gamma\sin(\sigma x+\beta)$, $x\in\mathbb{R}$. Пусть, например, $\cos\beta\neq 0$. Тогда выражая P через Q и подставляя в выражение (1.1) для E, получаем тождество $E(x)\cos\beta \equiv f_1(x)\sin(\sigma x+\beta)$, где $f_1(x) := \gamma\cos\sigma x + Q(x)$. Так как $E(x)\geq 0$ при всех $x\in\mathbb{R}$, то все вещественные нули функции E имеют чётную кратность. Поэтому $f_1\big(\frac{k\pi-\beta}{\sigma}\big) = 0$ при всех $k\in\mathbb{Z}$. Применяя формулу (3.1) к функции f_1, получаем, что при некоторой константе $c_1\in\mathbb{R}$ имеет место тождество $\gamma\cos\sigma x + Q(x) \equiv c_1\sin(\sigma x+\beta)$. Полагая $c := \frac{c_1}{\cos\beta}$, получаем тождества (1.3). Аналогично рассматривается случай $\sin\beta\neq 0$. То, что при выполнении тождеств (1.3) неравенство

(1.2) обращается в тождество, проверяется непосредственно и в этом случае получаем, что $d(x) \equiv \gamma^2\sigma$.

Предположим теперь, что при любых $\alpha \in \mathbb{R}$ $E(x) \not\equiv c\sin^2(\sigma x+\alpha)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует $k_0 \in \mathbb{Z} : E\big(\frac{k_0\pi-\alpha}{\sigma}\big) > 0$. В этом случае неравенство (3.3) строгое при всех $x \neq \frac{k\pi-\alpha}{\sigma}$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$\begin{array}{l}\text{неравенство (3.3) обращается при некоторых } x = x_0 \in \mathbb{R} \\ \text{и } \alpha = \alpha_0 \in \mathbb{R} \text{ в равенство } \iff \text{ при некотором } k_0 \in \mathbb{Z} \\ \text{выполняются равенства } x_0 = \dfrac{k_0\pi - \alpha_0}{\sigma} \text{ и } E(x_0) = 0.\end{array} \tag{3.4}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
&A_1(x) := \sigma P(x)\cos\sigma x - P'(x)\sin\sigma x,\\
&A_2(x) := \sigma Q(x)\sin\sigma x + Q'(x)\cos\sigma x,\\
&A_3(x) := \sigma(P(x)\sin\sigma x + Q(x)\cos\sigma x) + P'(x)\cos\sigma x - Q'(x)\sin\sigma x.
\end{aligned}$$

Тогда неравенство (3.3) эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned}
A_1(x) + A_2(x) + (A_1(x) - A_2(x))\cos 2\alpha&\\
- A_3(x)\sin 2\alpha \geq 0, \qquad \alpha, x \in \mathbb{R}.&
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Неравенство (3.5) с двумя параметрами эквивалентно следующему неравенству с одним параметром

$$\sqrt{(A_1(x) - A_2(x))^2 + A_3^2(x)} \leq A_1(x) + A_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

При этом (см. (3.4))

неравенство (3.6) обращается при некотором $x = x_0 \in \mathbb{R}$ в равенство $\iff$ неравенство (3.5) обращается в равенство при $x = x_0 \in \mathbb{R}$ и некотором $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{R}$ $\iff$ $E(x_0) = 0$.

Так как $A_1(x) \geq 0$ всех $x \in \mathbb{R}$ (это неравенство (3.3) при $\alpha = 0$) и $A_2(x) \geq 0$ всех $x \in \mathbb{R}$ (это неравенство (3.3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$), то неравенство (3.6) эквивалентно неравенству

$$A_3^2(x) \leq 4A_1(x)A_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7}$$

Неравенство (3.7) эквивалентно неравенству (1.2). Это следует из следующего тождества

$$\begin{aligned}
A_3^2(x) - \big\{(\sigma P(x) + Q'(x))\sin\sigma x + (P'(x) - \sigma Q(x))\cos\sigma x\big\}^2&\\
\equiv 4A_1(x)A_2(x) - 4\sigma\left(P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x)\right)\,.&
\end{aligned}$$

Таким образом, в случае $\tau = 0$ утверждения 1), 2) $iii) \Rightarrow iv \Rightarrow i)$ и 3) доказаны. Общий случай сводится к предыдущему, если рассмотреть функции $P_1(x) := P\left(x - \frac{\tau}{\sigma}\right)$ и $Q_1(x) := Q\left(x - \frac{\tau}{\sigma}\right)$. Тогда $E_1(x) := P_1(x)\cos\sigma x + Q_1(x)\sin\sigma x = E\left(x - \frac{\tau}{\sigma}\right) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Докажем остальные утверждения в 2). Утверждение $ii) \Rightarrow iii)$ очевидно. Пусть неравенство (1.2) обращается в тождество. Предположим, что при любых $\beta \in \mathbb{R}$ и $c \geq 0$ $E(x) \not\equiv c\sin^2(\sigma x + \tau + \beta)$, и, значит, $E(x) \not\equiv 0$. Но из утверждения 3) следует, что $E(x) \equiv 0$. Это противоречие доказывает утверждение $i) \Rightarrow ii)$. Теорема 1.1 доказана. $\square$

Замечание 3.1. Из приведенного доказательства видно, что верно и обратное утверждение: *Пусть $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$, где P, Q — вещественные функции класса E_σ, $\sigma > 0$, и на вещественной оси $\omega(x) = o(x)$, $x \to \pm\infty$. Если при некотором $\tau \in \mathbb{R}$ и всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство* (1.2) *и, кроме того, при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняются два неравенства $A_1(x) := \sigma P(x)\cos(\sigma x+\tau) - P'(x)\sin(\sigma x+\tau) \geq 0$ и $A_2(x) := \sigma Q(x)\sin(\sigma x + \tau) + Q'(x)\cos(\sigma x + \tau) \geq 0$, то справедливо также и неравенство $E(x) := P(x)\cos(\sigma x+\tau)+Q(x)\sin(\sigma x+\tau) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.*

Предложение 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *и $H_\alpha(z) := P(z)\cos\alpha - Q(z)\sin\alpha$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- **i)** *функция ω вещественная с точностью до постоянного множителя;*
- **ii)** $d(x) \equiv 0$*;*
- **iii)** *при некоторых $c \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ выполняется тождество $\omega(x) \equiv ce^{i(\frac{\pi}{2}-\beta)}\sin(\sigma x + \tau + \beta)$;*
- **iv)** *при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется тождество $H_\alpha(x) \equiv 0$.*

Доказательство. Докажем утверждение i) $\Rightarrow$ ii). Пусть $\omega(z) \equiv e^{i\beta}\omega_0(z)$, где ω_0 — вещественная и $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда $P(x) = \omega_0(x)\cos\beta$, $Q(x) = \omega_0(x)\sin\beta$ и, очевидно, $d(x) \equiv 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Пусть $d(x) \equiv 0$. Тогда неравенство (1.2) обращается в тождество. Из теоремы 1.1 следует, что при некоторых $c \geq 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ имеют место тождества (1.3) и, кроме того, $d(x) \equiv \gamma^2\sigma$. Поэтому $\gamma = 0$ и, значит, $\omega(x) \equiv ce^{i(\frac{\pi}{2}-\beta)}\sin(\sigma x + \tau + \beta)$.

iii) $\Rightarrow$ iv). Пусть тождество $\omega(x) \equiv ce^{i(\frac{\pi}{2}-\beta)}\sin(\sigma x+\tau+\beta)$ выполняется при некоторых $c \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда $P(x) = c\sin\beta\sin(\sigma x + \tau + \beta)$,

$Q(x) = c\cos\beta\sin(\sigma x+\tau+\beta)$ и, значит, $H_\alpha(x) = c\sin(\sigma x+\tau+\beta)(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) \equiv 0$ при $\alpha=\beta$.

iv) $\Rightarrow$ i). Пусть при некотором $\alpha\in\mathbb{R}$ $H_\alpha(x)\equiv 0$. Тогда $P(x)\cos\alpha - Q(x)\sin\alpha \equiv 0$. Поэтому либо $Q(x)\equiv\lambda P(x)$, либо $P(x)\equiv\lambda Q(x)$ при некотором $\lambda\in\mathbb{R}$. В любом случае ω — вещественная с точностью до постоянного множителя функция. Предложение 3.1 доказано. □

Предложение 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1, $H_\alpha(z) := P(z)\cos\alpha - Q(z)\sin\alpha$ *и функция* ω *не является вещественной с точностью до постоянного множителя. Тогда:*

i) H_α *при любом* $\alpha\in\mathbb{R}$ *является вещественной функцией класса* E_σ, $H_\alpha\not\equiv 0$, *на вещественной оси* $H_\alpha(x)=o(x)$, $x\to\pm\infty$ *и* $(-1)^pH_\alpha\left(\frac{p\pi-\alpha-\tau}{\sigma}\right) = E\left(\frac{p\pi-\alpha-\tau}{\sigma}\right)\ge 0$, $p\in\mathbb{Z}$.

ii) *При любом* $\alpha\in\mathbb{R}$ *функция* H_α *имеет бесконечно много нулей и все они вещественные, на вещественной оси* $xH_\alpha(x)\ne o(1)$, $x\to\pm\infty$. *В каждом интервале* $I_p := (\lambda_{p-1},\lambda_p)$, *где* $\lambda_p = \lambda_p(\alpha) := \frac{p\pi-\alpha-\tau}{\sigma}$, *может находиться лишь один нуль функции* H_α *и если есть, то он простой. Более того, если* $x_0\in I_p$ *и* $H_\alpha(x_0)=0$, *то* $(-1)^pH'_\alpha(x_0)>0$. *Если при некотором* $p\in\mathbb{Z}$ *число* λ_p *является нулём функции* H_α, *то его кратность не выше* 2 *и в одном из интервалов* I_p *и* I_{p+1} *нулей функции* H_α *нет. Если число* λ_p *является нулём кратности* 2 *функции* H_α, *то* $(-1)^pH_\alpha^{(2)}(\lambda_p)<0$ *и* $(-1)^pH_\alpha(x)<0$ *при* $x\in I_p\cup I_{p+1}$, *а числа* λ_{p-1} *и* λ_{p+1} *могут быть только простыми нулями.*

iii) *Функция* $\omega\in\overline{HB}$.

iv) *Если у функции* ω *есть вещественные нули, то они простые.*

v) $d(x_0)=0$ *при некотором* $x_0\in\mathbb{R}\iff\omega(x_0)=0\iff P(x_0)=Q(x_0)=0$. *Если число* $x_0\in\mathbb{R}$ *является нулём функции* ω, *то для функции* d *число* x_0 *является нулём кратности* 2.

vi) *Если число* $x_0\in\mathbb{R}$ *является нулём функции* H_α *кратности* 2, *то* $\omega(x_0)=0$.

vii) *Если* $E(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, *то функция* $\omega\in HB$, *а у функции* H_α, $\alpha\in\mathbb{R}$, *все нули простые.*

Доказательство. Пусть ω не является вещественной с точностью до постоянного множителя функцией. Тогда $H_\alpha(x)\not\equiv 0$ при любом $\alpha\in\mathbb{R}$ (предложение 3.1). Остальная часть утверждения i) очевидна. Утверждение ii) вытекает из утверждения i) и теоремы E.

Теорема E ([18, Теорема 1 при $F(z) := \sin(\sigma z+\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_k = \frac{k\pi-\beta}{\sigma}$, $n = 0$**]**[2]**).** *Пусть функция f удовлетворяет условиям:* **a)** *f — вещественная целая функция экспоненциального типа $\le \sigma$, $\sigma > 0$, $f \not\equiv 0$ и на вещественной оси $f(x) = o(x)$, $x \to \pm\infty$;* **b)** *при некотором $\beta \in \mathbb{R}$ и $\forall k \in \mathbb{Z}$ выполняются неравенства $(-1)^k f(\lambda_k) \ge 0$, где $\lambda_k := \frac{k\pi-\beta}{\sigma}$. Тогда:*

1) *В каждом интервале $I_p := (\lambda_{p-1}, \lambda_p)$, $p \in \mathbb{Z}$ может находиться лишь один нуль функции f и если есть, то он простой. Более того, если $x_0 \in I_p$ и $f(x_0) = 0$, то $(-1)^p f'(x_0) > 0$.*[3]

2) $xf(x) \ne o(1), x \to \pm\infty$.

3) *Функция f имеет только вещественные нули.*

4) *Если при некотором $p \in \mathbb{Z}$ число λ_p является нулём функции f, то его кратность не более, чем 2 и в одном из интервалов I_p и I_{p+1} нулей функции f нет. Если число λ_p является нулём кратности 2, то $(-1)^p f^{(2)}(\lambda_p) < 0$ и $(-1)^p f(x) < 0$ при $x \in I_p \cup I_{p+1}$, а числа λ_{p-1} и λ_{p+1} могут быть только простыми нулями.*

Докажем утверждение iii). Из неравенства (1.2) и предложения 3.1 вытекает, что $d(x_0) > 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$. Из утверждения ii) следует, что при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ функция H_α не имеет нулей в $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Так как по условию функция ω не является тривиальной, то по теореме B $\omega \in \overline{HB}$.

Докажем утверждение iv). Предположим, что при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$ выполняются равенства $\omega(x_0) = \omega'(x_0) = 0$. Тогда $P(x_0) = Q(x_0) = P'(x_0) = Q'(x_0) = 0$. Поэтому при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ число $x = x_0$ является нулём функции H_α и его кратность не меньше 2. Из утверждения ii) следует, что $x_0 \in \left\{\frac{p\pi-\alpha-\tau}{\sigma} : p \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{\frac{p\pi-\delta-\tau}{\sigma} : p \in \mathbb{Z}\right\}$, $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, но при $\alpha = \delta - \frac{\pi}{2}$ это пересечение пусто.

Докажем утверждения v) и vi). По доказанному в iii) $\omega \in \overline{HB}$. Тогда можно применить предложение 2.1 и учесть при этом утверждение iv).

Докажем vii). Очевидно, что все вещественные нули функции ω являются нулями функции E. Поэтому, если $E(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, то у функции ω нет вещественных нулей, а у функции H_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, все нули вещественные (см. утверждение ii) и простые (см. утверждение vi). Предложение 3.2 доказано. $\square$

[2] Для более узкого класса функций f эта теорема доказана в работе автора [17].

[3] Это неравенство имеется в самом доказательстве данной теоремы.

Предложение 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда при любом* $n \in \mathbb{N}$ *функция* $\omega^{(n)}(z) = P^{(n)}(z) + i\,Q^{(n)}(z)$ *удовлетворяет при* $\tau_n = \tau + \frac{\pi n}{2}$ *условиям теоремы* 1.1, *т.е.* $P^{(n)}, Q^{(n)}$ *— вещественные функции класса* E_σ, *на вещественной оси* $\omega^{(n)}(x) = o(x)$, $x \to \pm\infty$, *и*

$$E_n(x) := P^{(n)}(x) \cos\left(\sigma x + \tau + \frac{\pi n}{2}\right) + Q^{(n)}(x) \sin\left(\sigma x + \tau + \frac{\pi n}{2}\right) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Кроме того:

i) $E_n(x_0) = 0$ *при некотором* $x_0 \in \mathbb{R} \iff$ *при некотором* $c \geq 0$ *выполняется тождество* $E(x) \equiv c \sin^2\left(\sigma x + \frac{\pi n}{2} - \sigma x_0\right)$. *В этом случае неравенство* (1.2) *для* $\omega^{(n)}(z)$ *обращается в тождество и* $d_n(x) := P^{(n)}(x) Q^{(n+1)}(x) - P^{(n+1)}(x) Q^{(n)}(x) \equiv \gamma^2 \sigma^{2n+1}$, *где* γ *из представления* (1.3), *в котором* $\beta = \frac{\pi n}{2} - \tau - \sigma x_0$.

ii) $\omega^{(n)}$ *— вещественная с точностью до постоянного множителя* $\iff$ ω *— вещественная с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 1$. То, что $P', Q' \in E_\sigma$ и $\omega'(x) = o(x)$, $x \to \pm\infty$, доказано в [18, §1]. Если в (3.2) взять $\alpha = \frac{\pi}{2} - \sigma x$, а затем x заменить на $x + \frac{\tau}{\sigma}$, то получим неравенство

$$E_1(x) = \sigma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{E\left(\frac{k\pi - \frac{\pi}{2} + \sigma x}{\sigma}\right)}{(\frac{\pi}{2} - k\pi)^2} \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Из этого неравенства и теоремы 1.1 (утверждения 2) сразу получается i).

Докажем ii). Пусть ω' — вещественная с точностью до постоянного множителя. Из предложения 3.1 для ω' вытекает, что при некоторых $c \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ выполняется тождество $\omega'(x) \equiv c e^{i(\frac{\pi}{2} - \beta)} \sin(\sigma x + \tau + \frac{\pi}{2} + \beta)$ и, значит, $\omega(x) \equiv c\sigma^{-1} e^{i(\frac{\pi}{2} - \beta)} \sin(\sigma x + \tau + \beta) + A + iB$, где $A, B \in \mathbb{R}$. Поэтому $E(x) \equiv c\sigma^{-1} \sin^2(\sigma x + \tau + \beta) + A \cos(\sigma x + \tau) + B \sin(\sigma x + \tau) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Из леммы 2.1 (утверждение 7) вытекает, что $A = B = 0$ и, значит (см. предложение 3.1 для ω), ω — вещественная с точностью до постоянного множителя. Обратное утверждение очевидно.

Предложение 3.3 при $n = 1$ доказано. Общий случай получается индукцией по $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Утверждения 1) и 2) доказаны в предложении 3.2.

Докажем утверждение 3). Пусть функция ω не является вещественной с точностью до постоянного множителя. То, что функция $\omega^{(n)} \in \overline{HB}$ вытекает из предложений 3.3 и 3.2. Докажем, что у функции $\omega^{(n)}$ нет вещественных нулей. Если при любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $c \geq 0$ $E(x) \not\equiv c\sin^2(\sigma x + \tau + \alpha)$, то (см. предложение 3.3) $E_n(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, и, значит (см. предложение 3.2.vii для $\omega^{(n)}$), функция $\omega^{(n)}$ не имеет вещественных нулей.

Пусть при некоторых $c \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ выполняется тождество $E(x) \equiv c\sin^2(\sigma x+\tau+\beta)$. Тогда при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$ выполняются тождества (1.3). Предположим, что $\omega^{(n)}(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} P^{(n)}(x_0) &= c\sigma^n \sin\beta \sin\Big(\sigma x_0 + \tau + \beta + \frac{\pi n}{2}\Big) \\ &\qquad\qquad + \gamma\sigma^n \sin\Big(\sigma x_0 + \tau + \frac{\pi n}{2}\Big) = 0, \\ Q^{(n)}(x_0) &= c\sigma^n \cos\beta \sin\Big(\sigma x_0 + \tau + \beta + \frac{\pi n}{2}\Big) \\ &\qquad\qquad - \gamma\sigma^n \cos\Big(\sigma x_0 + \tau + \frac{\pi n}{2}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $P^{(n)}(x_0)\cos(\sigma x_0 + \tau + \frac{\pi n}{2}) + Q^{(n)}(x_0)\sin(\sigma x_0 + \tau + \frac{\pi n}{2}) = c\sigma^n \sin^2(\sigma x_0 + \tau + \beta + \frac{\pi n}{2}) = 0$ и, значит, $\gamma = 0$. Тогда ω — вещественная с точностью до постоянного множителя, что противоречит условию. Утверждение 3) доказано. □

Замечание 3.2. Если выполнены условия теоремы 1.1 и $\omega(z) \not\equiv 0$, то из предложений 3.1 и 3.2(ii) следует, что на вещественной оси $x\omega(x) \neq o(1)$, $x \to \pm\infty$. Кроме того, теоремы 1.1 и 1.2 перестают быть верными, если условие $\omega(x) = o(x)$, $x \to \pm\infty$ заменить на условие $\omega(x) = O(x)$, $x \to \pm\infty$. В этом легко убедиться, если рассмотреть функцию $\omega(z) := \sin z + az\cos z + i(az\sin z + 1 - \cos z)$, где $-1 < a < -\frac{1}{2}$. Очевидно $\omega(x) = O(x)$ при $x \to \pm\infty$ и неравенство (1.1) выполняется при $\tau = -\frac{\pi}{2}$, $\sigma = 1$ (в этом случае $E(x) = 1 - \cos x$). Легко проверить, что $d(x) = a^2x^2 + ax\sin x + (a+1)(1-\cos x)$. Так как $d(x) \sim a^2x^2$ при $x \to \pm\infty$ и $d(x) \sim x^2(a+1)(a+\frac{1}{2})$ при $x \to 0$, то функция d не сохраняет знак на вещественной оси и, значит, $\omega(z) \notin \overline{HB}$ (в противном случае из теоремы B вытекает, что $d(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$). В случае теоремы 1.2 можно рассмотреть функцию $\omega(z) := zF(z)$, где функция F имеет вид (1.4) и удовлетворяет условию теоремы 1.4 (утверждение 2). Очевидно, $\omega(x) = O(x)$ при $x \to \pm\infty$ и неравенство (1.1) выполняется при $\tau = -\frac{\pi}{2}$ (в этом случае $E(x) = xS(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$), но $\omega(z) \notin \overline{HB}$, так как функция F имеет один нуль в открытой нижней полуплоскости.

4. Доказательство теорем 1.3 и 1.4

В этом параграфе мы рассматриваем функции, определённые равенствами (1.4), (1.5), (1.6).

Следствие 4.1. *Пусть μ — вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0,\sigma]$ и выполнено одно из четырёх условий* (4.1), *или* (4.2), *или* (4.3), *или* (4.4):

$$C(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \quad \textit{и} \quad n = 0,\ \tau = 0, \tag{4.1}$$

$$S(x) \geq 0,\ x > 0,\ F(x) = o(1),\ x \to \pm\infty \quad \textit{и} \quad n = 1,\ \tau = -\frac{\pi}{2}, \tag{4.2}$$

$$S(x) \geq 0,\ x > 0,\ F(0) = 0 \quad \textit{и} \quad n = -1,\ \tau = -\frac{\pi}{2}, \tag{4.3}$$

$$\exists\, \tau_0 \in \mathbb{R} : C(x)\cos\tau_0 - S(x)\sin\tau_0 \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \quad \textit{и} \quad n = 0,\ \tau = \pm\tau_0. \tag{4.4}$$

Пусть $\omega(z) := z^n F(z) \equiv P(z) + iQ(z)$, где $P(z) \equiv z^n G(z)$, $Q(z) \equiv z^n H(z)$. Тогда:

1) *функция ω удовлетворяет условиям теоремы* 1.1, *т.е.* 1) P,Q — *вещественные функции класса E_σ и на вещественной оси $\omega(x) = o(x)$, $x \to \pm\infty$;* 2) *при соответствующем значении τ выполняется неравенство $E(x) := P(x)\cos(\sigma x+\tau)+Q(x)\sin(\sigma x +\tau) \equiv x^n(C(x)\cos\tau - S(x)\sin\tau) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$ и, значит, при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$4\sigma d(x) \geq x^{2n-2} D(x)\,, \tag{4.5}$$

где

$$D(x) := \big\{(2\sigma x S(x) + xC'(x) + nC(x))\cos\tau \\ + (2\sigma x C(x) - xS'(x) - nS(x))\sin\tau\big\}^2$$

и $d(x) := P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x) \equiv x^{2n}\Delta(x)$.

2) *Неравенство* (4.5) *обращается в тождество $\iff$ $E(x) \equiv 0$ $\iff C(x)\cos\tau \equiv S(x)\sin\tau \equiv 0$. В этом случае $F(z) \equiv \Delta(z) \equiv 0$, если $\cos\tau \neq 0$ и $F(z) \equiv ce^{i\sigma z}$, $\Delta(z) \equiv c^2\sigma$, $c \in \mathbb{R}$, если $\cos\tau = 0$.*

3) *Неравенство* (4.5) *обращается в равенство при некотором $x = x_0 \in \mathbb{R} \iff E(x_0) = 0$.*

4) *Если $F(z) \not\equiv 0$, то функция ω не является вещественной с точностью до постоянного множителя и, значит, для функций ω, P, Q, E, d и $H_\alpha(z) := P(z)\cos\alpha - Q(z)\sin\alpha \equiv z^n h_\alpha(z)$ имеют место теорема* 1.2 *и предложение* 3.2.

5) *Если выполнено условие* (4.1) *и дополнительно* $F(z) \not\equiv 0$, $S(x) \geq 0$ *при* $x > 0$, $F(0) > 0$, *то у функции* F *нет вещественных нулей.*

6) *Если выполнено условие* (4.2) *и дополнительно* $F(z) \not\equiv 0$, *то* $F(0) > 0$, $H'(0) > 0$ *и* $\Delta(0) > 0$.

7) *Если выполнено условие* (4.4) *и дополнительно* $F(z) \not\equiv 0$, $\sin \tau_0 \neq 0$, *то у функции* F *нет вещественных нулей.*

Доказательство. Утверждение 1) сразу следует из теоремы 1.1 (утверждение 1), если воспользоваться тождествами (2.2) и (2.3). Первая часть утверждение 2) сразу следует из теоремы 1.1 (утверждение 2) и леммы 2.1 (утверждение 3). Вторая часть этого утверждения следует из первой и леммы 2.1 (утверждение 1). Утверждение 3) следует из утверждения 2) и теоремы 1.1 (утверждение 3). Утверждение 4) сразу следует из леммы 2.1 (утверждение 6).

Докажем утверждение 5). Если $x_0 \in \mathbb{R}$ и $F(x_0) = 0$, то $x_0 \neq 0$ и $C(x_0) = S(x_0) = 0$. Поэтому $C'(x_0) = S'(x_0) = 0$ и, значит, $F'(x_0) = 0$, что противоречит утверждению iv) в предложении 3.2 о простоте вещественных нулей функции $\omega(z) \equiv F(z)$. Утверждение 5) доказано.

Докажем утверждение 6). Сначала применим утверждение ii) в предложении 3.2 при $\alpha = 0$. Тогда $\lambda_p = \frac{p\pi + \frac{\pi}{2}}{\sigma}$. Число $x_0 = 0 \in I_0 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и является нулём функции $H_0(x) = xG(x)$. Поэтому $H_0'(0) > 0$. Осталось учесть, что $H_0'(0) = G(0) = F(0)$. Теперь применим утверждение ii) в предложении 3.2 при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Тогда $\lambda_p = \frac{(p+1)\pi}{\sigma}$. Число $\lambda_{-1} = 0$ является нулём функции $H_{-\frac{\pi}{2}}(x) = xH(x)$ кратности не меньше 2. Поэтому $H''_{-\frac{\pi}{2}}(0) > 0$. Осталось учесть, что $H''_{-\frac{\pi}{2}}(0) = 2H'(0)$ и $\Delta(0) = G(0)H'(0)$. Утверждение 6) доказано[4].

Докажем утверждение 7). Так как $C(x)$ — чётная, а $S(x)$ — нечётная функции, то неравенство (4.4) эквивалентно неравенству $|S(x)\sin\tau_0| \leq C(x)\cos\tau_0$, $x \in \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ и $F(x_0) = 0$, то $C(x_0) = S(x_0) = 0$ и $\cos\tau_0 \neq 0$ (в противном случае $S(x) \equiv 0$ и $F(z) \equiv ce^{i\sigma z}$, $c \neq 0$, но у этой функции нет нулей). Поэтому $C'(x_0) = S'(x_0) = 0$ и, значит, $F'(x_0) = 0$, что противоречит утверждению iv) в предложении 3.2 о простоте вещественных нулей функции $\omega(z) \equiv F(z)$. □

Доказательство теоремы 1.3. Теорема 1.3 сразу получается из следствия 4.1 (утверждение 4). Приведём другое доказательство того, что

[4]Неравенство $H'(0) > 0$ также следует из леммы 2.2

у функции F нет нулей в открытой нижней полуплоскости. Пусть $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y < 0$ и $h(t) := -\frac{y}{\pi(y^2+t^2)}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда (см. (2.1))

$$\begin{aligned} F(z)e^{-i\sigma z} &= -\int\limits_0^\sigma e^{-ixu} e^{yu}\, d\mu(\sigma-u) \\ &= -\int\limits_0^\sigma e^{-ixu}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} h(t)\, dt\Bigg)\, d\mu(\sigma-u) \\ &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t)\Bigg(\int\limits_0^\sigma e^{i(t-x)u}\, d\mu(\sigma-u)\Bigg)\, dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t+x)(C(t)+iS(t))\, dt. \end{aligned}$$

Если $C(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $F(z) \not\equiv 0$, то $C(x) \not\equiv 0$ и, значит,

$$\operatorname{Re}\big(F(z)e^{-i\sigma z}\big) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi(y^2+(t+x)^2)} \cdot C(t)\, dt > 0, \qquad \operatorname{Im} z < 0\,.$$

□

Доказательство теоремы 1.4. Пусть $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$. Тогда $\mu(\sigma-0) \geq \mu(0)$ (лемма 2.2) и $\mu(\sigma-0) - \mu(0) = 0 \iff S(x) \equiv 0 \iff F(z) \equiv ce^{i\sigma z}$, $c \in \mathbb{R}$. В нашем случае $F(z) \not\equiv 0$. Поэтому, если $S(x) \equiv 0$, то функция F не имеет нулей. Пусть $S(x) \not\equiv 0$. Тогда (см. доказательство теоремы 1.3) при $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y < 0$ и $h(t) := -\frac{y}{\pi(y^2+t^2)}$, $t \in \mathbb{R}$ имеем равенство

$$\operatorname{Im}\big(F(z)e^{-i\sigma z}\big) = \int\limits_0^{+\infty} (h(x+t) - h(x-t))\, S(t)\, dt =$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{4xyt}{\pi(y^2+(t+x)^2)(y^2+(t-x)^2)} \cdot S(t)\, dt \neq 0,$$

$$\operatorname{Im} z < 0,\ \operatorname{Re} z \neq 0.$$

Если $x < 0$ или $x > 0$, то последний интеграл соответственно положителен или отрицателен. Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$

при $\operatorname{Re} z \neq 0$ функция F не имеет нулей. Рассмотрим случай $\operatorname{Re} z = 0$. Если f — функция из леммы 2.2, то

$$g(y) := F(iy)e^{\sigma y} = -\int_0^\sigma e^{yu}\,d\mu(\sigma-u) = F(0) + y\int_0^\sigma e^{yu} f(u)\,du,$$

$$g'(y) = \int_0^\sigma e^{yu}(1+yu)f(u)\,du.$$

Из леммы 2.4 вытекает, что $g(-\infty) := \lim_{y\to-\infty} g(y) = \mu(\sigma) - \mu(\sigma - 0) = F(0) - (\mu(\sigma-0) - \mu(0))$. Если $y < 0$, то из леммы 2.3 ($\beta = \alpha = -y > 0$) вытекает, что $g'(y) > 0$ и, значит, функция g строго возрастает на $(-\infty, 0]$. Поэтому $g(-\infty) < g(y) < g(0) = F(0)$ при всех $y < 0$. Из этого неравенства, предложения 2.2 и леммы 2.1 (утверждение 6) вытекает утверждение 1). Утверждение 2) вытекает из строгой монотонности функции g на $(-\infty, 0]$.

Докажем утверждение о кратности вещественных нулей функции F. Если при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, выполняются равенства $F(x_0) = F'(x_0) = 0$, то из (2.1) следует, что числа $\pm x_0$ являются нулями функций G, H, C, S и их кратность не меньше 2. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ выбираем так, чтобы $\frac{p\pi - \alpha + \frac{\pi}{2}}{\sigma} \neq \pm x_0$ при всех $p \in \mathbb{Z}$, что эквивалентно неравенству $\cos(\alpha \pm \sigma x_0) \neq 0$. Из (2.4) и леммы 2.1 (утверждение 6) следует, что функция $f(z) := \frac{z h_\alpha(z)}{(z^2 - x_0^2)^2}$ удовлетворяет условию теоремы E (при $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$) и, значит $xf(x) \neq o(1)$, $x \to \pm\infty$, что очевидно не так.

Пусть $F(0) = 0$. Из (2.4) и леммы 2.1 (утверждение 6) следует, что функция $f(z) := \frac{h_0(z)}{z}$ удовлетворяет условию теоремы E (при $\beta = -\frac{\pi}{2}$) и число $x_0 = 0 \in I_0 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ является нулём f. Поэтому $f'(0) > 0$. Осталось учесть, что $F''(0) = h_0''(0) = 2f'(0)$. Теорема 1.4 доказана. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть μ — вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0, \sigma]$.*

1) *Если $F(z) \not\equiv 0$ и выполнено одно из двух условий: $C(x) \geq 0$ при $x \in \mathbb{R}$ или $S(x) \geq 0$ при $x > 0$, $F(0) \in (-\infty, 0] \cup [\mu(\sigma - 0) - \mu(0), +\infty)$, то:*
i) $\Delta(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ и $\Delta(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$ $\iff$ $F(x_0) = 0$. Если число $x_0 \in \mathbb{R}$ является нулём кратности p для функции F, то для функции Δ число x_0 является нулём кратности $2p$.

ii) *Для всех* $\alpha \in \mathbb{R}$ *функция* h_α *имеет бесконечно много нулей и все они вещественные. Если число* $x_0 \in \mathbb{R}$ *является нулём функции* h_α *кратности* q, *то* $q \le p+1$, *где* p — *кратность нуля* x_0 *для функции* F ($p = 0$, *если* $F(x_0) \ne 0$). *Если у функции* F *нет вещественных нулей, то все нули функции* h_α *простые.*

2) *Если* $S(x) \ge 0$ *при* $x > 0$ *и* $F(z) \not\equiv 0$, $F(0) \in (0, \mu(\sigma - 0) - \mu(0))$, *а число* $-i\xi$, $\xi > 0$, *является нулём функции* F (*в силу теоремы* 1.4 *такой нуль существует и он единственный*), *то* $\Delta_\xi(x) := \Delta(x) + \frac{\xi}{\xi^2+x^2} \cdot (G^2(x) + H^2(x)) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_\xi(x) \not\equiv 0$ *и* $\Delta_\xi(x_0) = 0$ *при некотором* $x_0 \in \mathbb{R} \iff F(x_0) = 0$. *Если число* $x_0 \in \mathbb{R}$ *является нулём функции* F, *то для функции* Δ_ξ *число* x_0 *является нулём кратности* 2.

Доказательство. Докажем утверждение 1). При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ функция h_α вещественна и имеет бесконечно много вещественных нулей. Это вытекает из неравенства (см. (2.4))

$$(-1)^p h_\alpha\Big(\frac{p\pi - \alpha - \tau}{\sigma}\Big) = C\Big(\frac{p\pi - \alpha - \tau}{\sigma}\Big)\cos\tau - S\Big(\frac{p\pi - \alpha - \tau}{\sigma}\Big)\sin\tau \ge 0,$$

которое выполняется при всех целых $p \ge \frac{\alpha+\tau}{\pi}$. Здесь $\tau = 0$ или $\tau = -\frac{\pi}{2}$ соответственно в первом или во втором случае. Из теорем 1.3, 1.4 следует, что функция $F \in \overline{HB}$ и не является тривиальной. Поэтому можно воспользоваться предложением 2.1.

Докажем утверждение 2). Функция $\omega(z) := \frac{F(z)}{z+i\xi}$ является целой функцией экспоненциального типа, которая не имеет нулей в открытой полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ и её дефект $d_\omega = d_F > 0$. Из теоремы C вытекает, что $\omega \in \overline{HB}$, а из леммы 2.1 (утверждение 8) следует, что ω не является тривиальной. Поэтому к функции ω можно применить предложение 2.1. Следует только учесть, что все вещественные нули функции F (если они есть) простые (теорема 1.4), $(x^2 + \xi^2)d(x) \equiv \Delta_\xi(x)$ и $\omega(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R} \iff F(x_0) = 0$. □

Предложение 4.1. *Пусть* μ — *вещественная функция ограниченной вариации на отрезке* $[0, \sigma]$, $S(x) \ge 0$ *при всех* $x > 0$ *и* $F(z) \not\equiv 0$. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

1) *Функция* h_α *вещественна и при всех* $p \in \mathbb{Z}$ *выполняются неравенства* $(-1)^p H_\alpha(\lambda_p) = E(\lambda_p) \ge 0$, *где* $\lambda_p = \lambda_p(\alpha) := \frac{p\pi - \alpha + \frac{\pi}{2}}{\sigma}$, $H_\alpha(x) := x h_\alpha(x)$ *и* $E(x) := xS(x)$. *Кроме того,* $h_\alpha(x) \not\equiv 0$, $x^2 h_\alpha(x) \ne o(1)$ *при* $x \to \pm\infty$ *и функция* h_α *имеет бесконечно много вещественных нулей.*

2) *Если* $F(0) \in (-\infty, 0] \cup [\mu(\sigma-0)-\mu(0), +\infty)$, *то функция* h_α *не имеет нулей в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

3) *Если* $F(0) \in (0, \mu(\sigma-0)-\mu(0))$, *то при некотором* $\alpha \in \mathbb{R}$ *функция* h_α *имеет комплексные (не вещественные) нули.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Вещественность h_α очевидна, а выполнение указанных неравенств следует из (2.4). Отсюда сразу следует то, что у функции h_α бесконечно много вещественных нулей. То, что $h_\alpha(x) \not\equiv 0$ следует из леммы 2.1 (утверждение 6). Если $x^2 h_\alpha(x) = o(1)$ при $x \to \pm\infty$, то функция H_α удовлетворяет условию теоремы E и, значит, $xH_\alpha(x) = x^2 h_\alpha(x) \neq o(1)$, $x \to \pm\infty$, что противоречит предположению.

Утверждение 2) содержится в следствии 4.2.

Докажем 3). Предположим, что при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ функция h_α не имеет нулей в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Так как $F(z) \not\equiv 0$, то по лемме 2.1 (утверждение 6) функция F не является вещественной с точностью до постоянного множителя. Поэтому $d(x) \not\equiv 0$ и, значит, $d(x_0) \neq 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $d(x_0) > 0$, то из теоремы B следует, что $F \in \overline{HB}$ и, значит, у функции F нет нулей в открытой полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, что противоречит теореме 1.4 (утверждение 2). Поэтому $d(x_0) < 0$. Тогда из теоремы B следует, что $\overline{F}(z) = \overline{F(\overline{z})} \in \overline{HB}$ и, значит, у функции F нет нулей в открытой верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Таким образом, все нули функции F, кроме одного (см. утверждение 2 в теореме 1.4), являются вещественными (и их бесконечно много). В этом случае (см. [15, Следствие 1]), если при некотором $\delta \in (0,\sigma)$ существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{\int_0^\delta e^{-xu}\, d\mu(u)}{\int_0^\delta e^{-xu}\, d\mu(\sigma-u)} \right| = a\,,$$

то $a = 1$. В нашем случае этот предел существует и равен $\left|\frac{\mu(+0)-\mu(0)}{\mu(\sigma-0)-\mu(\sigma)}\right|$ (это следует из леммы 2.4 и неравенства $F(0) = \mu(\sigma)-\mu(0) \neq \mu(\sigma-0)-\mu(0)$). Из леммы 2.2 (утверждение 1) следует, что $\mu(+0) = \mu(0)$. Поэтому $a = 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение 3). $\square$

5. Примеры

Пример 5.1 (См. также [11,17,18]). Пусть функция μ абсолютно непрерывна на $[0,\sigma]$, т.е. $d\mu(t) = g(t)dt$, где $g \in L(0,\sigma)$. Предположим, что функция g неотрицательна, не убывает и $g(t) \not\equiv 0$ на $(0,\sigma)$.

Известно, что в этом случае $S(x)=\int_0^\sigma g(\sigma-t)\sin xt\,dt\geq 0$ при всех $x>0$. Следующее доказательство данного неравенства принадлежит Р. М. Тригубу. Для произвольного фиксированного $x>0$ положим $G(u):=0$ при $u>\sigma x$ и $G(u):=g\left(\sigma-\frac{u}{x}\right)$ при $0\leq u\leq\sigma x$. Тогда функция G неотрицательна и не возрастает на $(0,+\infty)$. Очевидно, что при всех $p\in\mathbb{Z}_+$ и $u\in[2p\pi,2(p+1)\pi]$ выполняется неравенство $G_p(u):=(G(u)-G(2p\pi+\pi))\sin u\geq 0$. Поэтому

$$xS(x)=\int\limits_0^{\sigma x} g\Big(\sigma-\frac{u}{x}\Big)\sin u\,du=\int\limits_0^{+\infty} G(u)\sin u\,du$$

$$=\sum_{p=0}^{+\infty}\int\limits_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} G_p(u)\,du\geq 0\,.$$

В этом случае выполняются условия (4.2) и $F(z)\not\equiv 0$. Поэтому все нули функции F лежат в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}z\geq 0$, а нули F' лежат в открытой полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$. Если $S(x)>0$ при всех $x>0$, то, очевидно, функция F не имеет вещественных нулей. Из последнего неравенства сразу следует, что $S(x_0)=0$ при некотором $x_0>0\iff$ при некотором $\beta\in[0,\sigma)$ функция g является на (β,σ) кусочно постоянной с равностоящими узлами (т.е. интервал (β,σ) можно разбить на конечное число интервалов одинаковой длины $d>0$, на каждом из которых g постоянна) и $g(t)\equiv 0$ на $(0,\beta)$, если $\beta>0$ (при этом всегда можно считать, что $g(\beta-0)>0$). Пусть $S(x_0)=0$ при некотором $x_0>0$. Тогда

$$F(z)=\frac{e^{idz}-1}{iz}\cdot e^{i\beta z}F_1(z),\ \text{ где }\ F_1(z):=\sum_{p=1}^{m}c_pe^{i(p-1)dz}$$

$$\text{и }\ m=\frac{\sigma-\beta}{d}\in\mathbb{N},\ 0<c_1\leq\cdots\leq c_m.$$

В этом случае функция F имеет бесконечно много вещественных нулей $z_k=\frac{2\pi k}{d}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$. Так как все нули функции F лежат в полуплоскости $\operatorname{Im}z\geq 0$, то при $m\geq 2$ все нули функции F_1 лежат на конечном числе прямых $\operatorname{Im}z=c\geq 0$, которых не более, чем $m-1$ и на каждой из них лежит бесконечно много нулей F_1, а все вещественные её нули простые (если есть). Это эквивалентно тому, что все нули алгебраического многочлена $P(w):=c_1+c_2w+\cdots+c_mw^{m-1}$ лежат в замкнутом круге $|w|\leq 1$, а если есть нули на окружности $|w|=1$, то они простые. Это хорошо известный факт.

Пример 5.2. Пусть $F(z) := \sum_{k=0}^m c_k e^{i\lambda_k z} \not\equiv 0$, где $c_k \in \mathbb{R}$ и $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m = \sigma$. Тогда $F(z) = \int_0^\sigma e^{izt}\,d\mu(t)$, где μ — ступенчатая функция, имеющая скачки в точках $t = \lambda_k$. В этом случае $C(x) = \sum_{k=0}^m c_k \cos(\lambda_m - \lambda_k)x$. Пусть $C(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда выполняются условия следствий 4.1 и 4.2 и, значит, функция F не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, а неравенство (4.5) в этом случае имеет вид

$$4\lambda_m \sum_{k,j=0}^m c_k c_j \lambda_j \cos(\lambda_k - \lambda_j)x \geq \left(\sum_{k=0}^m c_k(\lambda_m + \lambda_k)\sin(\lambda_m - \lambda_k)x \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Это неравенство обращается в равенство при некотором $x = x_0 \in \mathbb{R} \iff C(x_0) = 0$. Если f — чётная, непрерывная, положительно определённая на $\mathbb{R}$ функция и $f(x) = 0$ при $|x| \geq m$, то $f(0) + 2\sum_{k=1}^m f(k)\cos kx = \sum_{k=-m}^m f(k)e^{ikx} \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (доказательство этого утверждения Р. М. Тригуба см. в [21]). Если взять $\lambda_k = k$ при $0 \leq k \leq m$ и $c_k = f(m-k)$, $0 \leq k < m$, $c_m = \frac{f(0)}{2}$, то $C(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Можно взять, например, функцию $f(x) = \left(1 - \left(\frac{|x|}{m}\right)^\lambda\right)_+^\delta$, где $0 < \lambda \leq 1$, $\delta \geq 1$.

Пример 5.3. Пусть функция μ вещественна, абсолютно непрерывна на $[0,\sigma]$ и $d\mu(t) = g(t)dt$, где $g \in C[0,\sigma]$, $g(0) = 0$, $g(\sigma) > 0$ и функция $g\left((\sigma - |t|)_+\right)$ является положительно определённой на $\mathbb{R}$. Тогда $C(x) = \int_0^\sigma g(\sigma - t)\cos xt\,dt \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. В этом случае выполняются условия следствий 4.1 и 4.2.

В следующем предложении установлена связь между функциями класса $\overline{HB}$ вида (1.4) и положительно определёнными функциями.

Предложение 5.1. *Пусть функция $g \in L(0,\sigma)$ и вещественна, а чётная функция h определена равенствами $h(x) := 0$ при $|x| \geq \sigma$ и $h(x) := \int_{|x|}^\sigma (2u - |x|)g(u)g(u - |x|)\,du$, $|x| < \sigma$. Пусть функция $F(z) := \int_0^\sigma e^{izt}g(t)\,dt$ не имеет нулей в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Тогда:*

1) *$h \in L(\mathbb{R})$, а функция $F \in \overline{HB}$ и не является тривиальной.*

2) *Преобразование Фурье $\widehat{h}(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $\widehat{h}(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R} \iff F(x_0) = 0$. Если число $x_0 \in \mathbb{R}$ является нулём кратности p для функции F, то для функции $\widehat{h}$ число x_0 является нулём кратности $2p$.*

3) *Если дополнительно $g \in L_2(0,\sigma)$, то функция h является непрерывной и положительно определённой на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Докажем 1). Если g продолжить нулём на $(\sigma,+\infty)$, то легко показать, что

$$2h(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|u|)\, g(|x-u|)\,(x-u)\,\left(\operatorname{sign}(x-u) - \operatorname{sign} u\right)\, du.$$

Так как свёртка двух функций из $L(\mathbb{R})$ есть функция из $L(\mathbb{R})$, то $h \in L(\mathbb{R})$. Используя связь между преобразованием Фурье и свёрткой, получаем равенство $\widehat{h}(x) = 2\Delta(x)$. Здесь функция Δ определена равенствами (1.4) и (1.5), в которых $d\mu(t) = g(t)dt$. Если F не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, то из предложения 2.2 вытекает, что $F \in \overline{HB}$. Из утверждения 2 в лемме 2.1 вытекает, что F не является тривиальной (в противном случае $F(z) \equiv F(+\infty) = 0$, что противоречит условию).

Утверждение 2) вытекает из утверждения 1) и предложения 2.1.

Докажем 3). Если дополнительно $g \in L_2(0,\sigma)$, то, очевидно, $h \in C(\mathbb{R})$. По доказанному $h \in L(\mathbb{R})$ и $\widehat{h}(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому функция h является положительно определённой на $\mathbb{R}$. □

Пример 5.4. В качестве примера в предложении 5.1 при $\sigma = 1$ рассмотрим функцию (см. [22, 23]) $g(t) := g_{\mu,\nu}(t) = t^{\mu-1}(1-t^2)^{\nu-1}$. Если $\mu \geq 1$, $0 < \nu \leq 1$ и $(\mu,\nu) \neq (1,1)$, то $F(0) > 0$ и (см. пример 5.1) $S(x) > 0$ при всех $x > 0$ и, значит, функция F не имеет вещественных нулей. Поэтому $\widehat{h}_{\mu,\nu}(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует (см. [22, равенство (44)]), что при указанных μ и ν функция $f(x) = x^{-\mu}(1+x^2)^{-\nu}$ является вполне монотонной на $(0,+\infty)$, т.е. $(-1)^n f^{(n)}(x) > 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ и $x > 0$ (это основной результат работы [24]).

Литература

[1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ, 1956.

[2] B. Ya. Levin in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko, *Lectures on Entire Functions.* Transl. Math. Monographs. v. 150, Amer. Math. Soc., 1996.

[3] И. В. Островский, *Исследования М. Г. Крейна по теории целых и мероморфных функций и их дальнейшее развитие* // Укр. мат. журн. **46** (1994), N 1, 87–99.

[4] Н. Г. Чеботарёв, Н. Н. Мейман, *Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций* // Труды МИАН. **26** (1949).

[5] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.

[6] Е. Лукач, *Характеристические функции.* М.: Наука, 1979.

[7] А. М. Седлецкий, *О целых функциях класса С.Н.Бернштейна, не являющихся преобразованиями Фурье—Стилтьеса* // Мат. заметки. **61** (1997), вып. 3, 367–380.

[8] И. В. Тихонов, *Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений* // Известия РАН. Сер. мат. **67** (2003), N 2, 133–166.

[9] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions.* Kluwer Academic Publishers. Boston/ Dordrecht/ London, 2004.

[10] G. H. Hardy, *On the zeroes of certain classes of integral Taylor series II* // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. **2** (1905), 401–431.

[11] G. Polya, *Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen* // Math. Z. **2** (1918), 352–383.

[12] E. C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions* // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. **25** (1926), 283–302.

[13] M. Cartwright, *The zeros of certain integral functions* // Quart. J. Math. **1** (1930), 38–59.

[14] M. Cartwright, *The zeros of certain integral functions (II)* // Quart. J. Math. **2** (1931), 113–129.

[15] A. M. Sedletskii, *On zeros of Laplace transforms of finite measure* // Integral Transforms and Special Functions. **1** (1993), 51–59.

[16] А. М. Седлецкий, *О нулях преобразований Лапласа* // Мат. заметки. **76** (2004), вып. 6, 883–892.

[17] В. П. Заставный, *Теорема о нулях целых функций и её применение* // Мат. заметки. **75** (2004), вып. 2, 192–207.

[18] V. P. Zastavnyi, *A theorem on zeros of an entire function and its applications* // Methods of Functional Analysis and Topology. **10** (2004), N 2, 91–104.

[19] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* М.: Мир, 1974.

[20] Н. И. Ахиезер, *Лекции об интегральных преобразованиях.* Харьков: Вища школа. Изд. при Харьк. ун-те, 1984.

[21] V. P. Zastavnyi, *On positive definiteness of some functions* // Journal of Multivariate Analysis. **73** (2000), N 1, 55–81.

[22] В. П. Заставный, Р. М. Тригуб, *Положительно определенные сплайны специального вида* // Математический сборник. **193** (2002), N 12, 41–68.

[23] В. П. Заставный, *Положительно определённые радиальные функции и сплайны* // Доклады РАН. **386** (2002), N 4, 446–449.

[24] D. S. Moak, *Completely monotonic functions of the form* $s^{-b}(s^2+1)^{-a}$ // Rocky Mountain J. of Math. **17** (1987), N 4, 719–725.

Сведения об авторах

Виктор Петрович Заставный

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: zastavn@rambler.ru