Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 3, 331 – 351

Построение множества инерционных управлений

Валерий И. Коробов, Василий А. Скорик

(*Представлена И. А. Луковский*)

Аннотация. Рассмотрена задача допустимого синтеза управления для автономной системы с r-мерным управлением с ограничениями на управление и его производные до заданного порядка l. Исследования проводятся на основе метода функции управляемости. Вначале задача решена для линейной системы, затем, для нелинейной системы по ее первому приближению в случае $l = 1$. Показано, что любой набор из r функций, каждая из которых является неотрицательной монотонно невозрастающей на неотрицательной полуоси функцией и удовлетворяющей некоторому условию, порождает множество функций управляемости и соответствующее множество управлений, которые решают рассматриваемую задачу. Результаты проиллюстрированы примером.

2000 MSC. 93B50.

Ключевые слова и фразы. Задача допустимого синтеза, инерционные управления, метод функции управляемости.

1. Введение

Рассмотрим задачу синтеза ограниченных инерционных управлений для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varphi(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{1.1}$$

с ограничениями на управление и его производные в силу замкнутой системы до заданного порядка $l \geq 1$, состоящую в построении управления $u = u(x)$, которое переводит произвольную начальную точку $x_0 = x(0)$ из некоторой окрестности Q начала координат в начало координат по траектории $x(t) \in$ Q системы

$$\dot{x} = \varphi(x, u(x)), \tag{1.2}$$

Статья поступила в редакцию 7.08.2006

ISSN 1810 – 3200.

за конечное время $T(x_0)$ и удовлетворяет заданным ограничениям

$$\|u^{(k)}(x)\| \le d_k, \quad k = 0, 1, \dots, l, \quad x \in \mathrm{Q}, \tag{1.3}$$

где $d_0, \dots, d_l$ — заданные числа, $u^{(k)}(x)$ — производная k-го порядка в силу системы (1.2).

В статье вначале решена задача синтеза инерционных управлений для линейной полностью управляемой системы с ограничениями на управление вида (1.3), а затем для нелинейной системы путем использования ее первого приближения с ограничениями на управление и его первую производную. Показано, что любой набор функций $f_1, \dots, f_r$, где $f_i(s)$ — произвольная неотрицательная монотонно невозрастающая на неотрицательной полуоси функция, удовлетворяющая условию $0 < \int_0^\infty s^{2n_i-2} f_i(s)\,ds < \infty$, порождает множество функций управляемости $\{\Theta_{f,\alpha}(x)\}_{\alpha \ge 1}$ и соответствующее множество управлений $\{u_f^\alpha(x)\}_{\alpha \ge 1}$, которые решают рассматриваемую задачу при $\alpha \ge \alpha_0$. Результаты проиллюстрированы примером.

Данная работа является развитием результатов работ [1–3]. Оно, прежде всего, заключается в рассмотрении не одной функции, а нескольких функций. Это позволяет расширить класс управлений, решающих задачу синтеза инерционных управлений.

2. Решение задачи синтеза инерционных управлений для линейной системы

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^r. \tag{2.1}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $\operatorname{rang} B = r$. Предположим, что ранг матрицы $(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ равен n и реализуется на векторах

$$b_1, \ \dots, \ A^{n_1-1}b_1, \ b_2, \ \dots, \ A^{n_2-1}b_2, \ \dots, \ b_r, \ \dots, \ A^{n_r-1}b_r, \tag{2.2}$$

где b_i – i-й столбец матрицы B, $n_1 \ge \dots \ge n_r \ge 1$, $n_1 + \dots + n_r = n$.

Пусть $f_1(s), \dots, f_r(s)$ — произвольные неотрицательные монотонно невозрастающие на полуоси $[0, +\infty)$ функции, удовлетворяющие условиям

$$0 < \int\limits_0^\infty s^{2n_i-2} f_i(s)\,ds < \infty, \qquad i = 1, \dots, r. \tag{2.3}$$

Для фиксированного набора таких функций $f_1(s), \dots, f_r(s)$ обозначим через $f(s)$ диагональную $(n \times n)$-матрицу вида $f(s) =$

$\operatorname{diag}\bigl(f_i(s)E_i\bigr)_{i=1}^r$, где E_i — единичная $(n_i{\times}n_i)$-матрица, и рассмотрим семейство $\bigl\{F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta)\bigr\}_{\alpha\geq 1}$ положительно определенных матриц вида

$$F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = \int\limits_0^\infty f\left(t/\Theta^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-A_0 t} B_0 B_0^* e^{-A_0^* t}\, dt, \tag{2.4}$$

где $A_0 = \operatorname{diag}(A_{01}, \ldots, A_{0r})$ — $(n{\times}n)$-матрица, в которой A_{0i} — $(n_i{\times}n_i)$-матрица с равными единице элементами первой наддиагонали и равными нулю остальными элементами, $B_0 = (e_{s_1}, \ldots, e_{s_r})$ — $(n{\times}r)$-матрица, в которой e_{s_i} — s_i-й орт пространства $\mathbb{R}^n$, $s_i = n_1 + \cdots + n_i$, $i = 1, \ldots, r$. Здесь и далее символ $*$ означает транспонирование. Обозначим матрицы $D_\alpha(\Theta) = \operatorname{diag}(D_{\alpha,1}(\Theta), \ldots, D_{\alpha,r}(\Theta))$, $H^\alpha = \operatorname{diag}(H_1^\alpha, \ldots, H_r^\alpha)$, где

$$D_{\alpha,i}(\Theta)=\operatorname{diag}\Bigl(\Theta^{-\frac{2n_i-2k+1}{2\alpha}}\Bigr)_{k=1}^{n_i}, \qquad H_i^\alpha=\operatorname{diag}\Bigl(-\frac{2n_i-2k+1}{2\alpha}\Bigr)_{k=1}^{n_i}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Поскольку

$$\Theta^{\frac{1}{\alpha}} e^{-A_0 \Theta^{\frac{1}{\alpha}} s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* \Theta^{\frac{1}{\alpha}} s} = D_\alpha^{-1}(\Theta) e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s} D_\alpha^{-1}(\Theta),$$

то из (2.4) получаем равенство $F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = D_\alpha^{-1}(\Theta) F_f^{-1} D_\alpha^{-1}(\Theta)$, где матрица $F_f^{-1} = \int_0^\infty f(s) e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s} ds$. Следовательно, матрица $F_{f,\alpha}(\Theta)$ представима в виде

$$F_{f,\alpha}(\Theta) = D_\alpha(\Theta) F_f D_\alpha(\Theta). \tag{2.5}$$

Выберем векторы $c_1, \ldots, c_r$ из решения систем

$$K^* c_i = e_{s_i}, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{2.6}$$

где матрица K имеет вид

$$K = (b_1 \ \ldots \ A^{n_1-1} b_1 \ b_2 \ \ldots \ A^{n_2-1} b_2 \ \ldots \ b_r \ \ldots \ A^{n_r-1} b_r),$$

и образуем невырожденную матрицу

$$L = \Bigl(c_1 \ \ A^* c_1 \ \ldots \ A^{*n_1-1} c_1 \ \ldots \ c_r \ \ A^* c_r \ \ldots \ A^{*n_r-1} c_r\Bigr)^*. \tag{2.7}$$

Пусть a_0 — пока произвольное положительное число, которое будет определено далее. Для фиксированного $\alpha \geq 1$ рассмотрим функцию

$$\Phi_{f,\alpha}(\Theta, x) = 2a_0\Theta - (L^* F_{f,\alpha}(\Theta) L x, x). \tag{2.8}$$

Выберем число $\overline{\Theta} > 0$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\Phi_{f,\alpha}(\overline{\Theta}, x) > 0, \tag{2.9}$$

и положим $R_\alpha = \delta\sqrt{2a_0\overline{\Theta}/\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|}\ /\|L\|$, $\delta \in (0,1)$. Тогда неравенство (2.9) будет выполнено в области $\mathrm{Q}^1_\alpha = \{x:\ \|x\| \le R_\alpha\}$. Определим функцию управляемости $\Theta_\alpha(x)$ из уравнения

$$\Phi_{f,\alpha}(\Theta, x) = 0, \quad x \in \mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}. \tag{2.10}$$

Утверждение 2.1. *Для каждого $\alpha \ge 1$ уравнение* (2.10) *и равенство $\Theta_\alpha(0) = 0$ определяют неотрицательную функцию $\Theta = \Theta_\alpha(x)$, непрерывную в области Q^1_α и непрерывно дифференцируемую в $\mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Действительно, из соотношения (2.8) в силу неравенства

$$(L^* F_{f,\alpha}(\Theta)Lx, x) \ge \|x\|^2/(\|L\|^2\|F^{-1}_{f,\alpha}(\Theta)\|), \quad x \in \mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}, \tag{2.11}$$

и представления (2.5) имеем

$$\lim_{\Theta\to+0} \Phi_{f,\alpha}(\Theta, x) = -\infty, \quad x \in \mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}. \tag{2.12}$$

Поскольку в силу (2.5) $\frac{\partial}{\partial\Theta}F_{f,\alpha}(\Theta)$ является отрицательно определенной матрицей, то из (2.8) вытекает, что $\partial\Phi_{f,\alpha}(\Theta, x)/\partial\Theta \ge 2a_0 > 0$, и, следовательно, $\Phi_{f,\alpha}(\Theta, x)$ является возрастающей по Θ функцией для всех $x \in \mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}$. Отсюда в силу соотношений (2.9), (2.12) получаем, что уравнение (2.10) имеет единственное положительное решение $\Theta = \Theta_\alpha(x)$, $x \in \mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}$. Поскольку $\Phi_{f,\alpha}(\Theta, x)$ непрерывно дифференцируемая функция по Θ и по x, причем $\partial\Phi_{f,\alpha}(\Theta, x)/\partial\Theta \ne 0$ при $x \in \mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}$, то по теореме о неявной функции $\Theta_\alpha(x)$ является непрерывной и непрерывно дифференцируемой в области $\mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}$ функцией.

Из соотношения (2.10) в силу представления (2.5) для $\Theta_\alpha(x) \le 1$ получаем неравенство $2a_0\Theta_\alpha(x) \le \|L\|^2\|F_f\|\Theta_\alpha^{-\frac{2n_1-1}{\alpha}}(x)$. Отсюда в силу равенства $\Theta_\alpha(0) = 0$ следует непрерывность функции $\Theta_\alpha(x)$ в нуле. □

Утверждение 2.2. *Для каждого $\alpha \ge 1$ существует постоянная $c_\alpha > 0$ такая, что область $\mathrm{Q}_\alpha = \{x : \Theta_\alpha(x) \le c_\alpha\}$ является ограниченной и $\mathrm{Q}_\alpha \subset \operatorname{int} \mathrm{Q}^1_\alpha$.*

Доказательство. Поскольку $(L^* F_{f,\alpha}(\Theta)Lx, x)$ является невозрастающей по Θ функцией, то из (2.10) в силу неравенства (2.11) имеем

$$\Theta_\alpha(x) \geq \frac{\|x\|^2}{2a_0\|F_{f,\alpha}^{-1}(\overline{\Theta})\|\|L^{-1}\|^2}, \qquad x \in \mathrm{Q}_\alpha^1.$$

Отсюда, учитывая выражение для числа R_α, получаем, что для

$$0 < c_\alpha \leq \frac{\sigma\delta^2\overline{\Theta}}{\|L^{-1}\|^2\|L\|^2\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|\|F_{f,\alpha}^{-1}(\overline{\Theta})\|}, \qquad \sigma \in (0,1), \tag{2.13}$$

множество Q_α является ограниченным и $\mathrm{Q}_\alpha \subset \mathrm{int}\mathrm{Q}_\alpha^1$. □

Зададим управление $u_f^\alpha(x)$ в области $\mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}$ формулой

$$u_f^\alpha(x) = -M^{-1}B_0^*\Big(\frac{1}{2}f(0)F_{f,\alpha}(\Theta_\alpha(x))L + LA\Big)x, \tag{2.14}$$

где M — верхнетреугольная $(r\times r)$-матрица, элементы главной диагонали которой равны единице, а $m_{ij} = c_i^* A^{n_i-1}b_j$ для $j = i+1,\ldots,r$, $i = 1,\ldots,r$. Ограниченность этого управления и его производных будет показана далее.

Утверждение 2.3. *Производная функции* $\Theta_\alpha(x)$ $(\alpha \geq 1)$ *в силу системы* (2.1) *с управлением* $u_f^\alpha(x)$ *вида* (2.14) *удовлетворяет неравенству*

$$\dot{\Theta}_\alpha(x) \leq -\lambda_{\min}^\alpha \Theta_\alpha^{1-\frac{1}{\alpha}}(x), \qquad \lambda_{\min}^\alpha > 0. \tag{2.15}$$

Доказательство. Обозначим $y = D_\alpha(\Theta_\alpha(x))Lx$, $P_0 = -\frac{1}{2}B_0^* f(0)F_f$. На основании (2.5) равенство (2.10) и управление (2.14) принимают вид

$$2a_0\Theta_\alpha(x) - (F_f\, y, y) = 0, \tag{2.16}$$

$$u_f^\alpha(x) = M^{-1}\big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}}(x)P_0 y - B_0^* LAx\big). \tag{2.17}$$

Вычислим производную y в силу системы (2.1) с $u_f^\alpha(x)$ вида (2.17). В силу выбора векторов $c_1,\ldots,c_r$ и равенства $(E-B_0)LAL^{-1} = A_0$ имеем

$$L\dot{x} = A_0 Lx + \Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}}(x)B_0P_0y. \tag{2.18}$$

Тогда на основании равенств (2.18),

$$D_\alpha(\Theta)A_0D_\alpha^{-1}(\Theta) + D_\alpha(\Theta)B_0P_0\Theta^{-\frac{1}{2\alpha}} = A_1\Theta^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.19}$$

где $A_1 = (A_0 + B_0P_0)$, получаем

$$\dot{y} = \big(\dot{\Theta}_\alpha(x)\Theta_\alpha^{-1}(x)H^\alpha + A_1\Theta_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}(x)\big)y. \tag{2.20}$$

Из равенства (2.16) с использованием равенства (2.20) имеем

$$\dot{\Theta}_\alpha(x) = -\frac{(W_f y, y)}{(F_f^\alpha y, y)}\,\Theta_\alpha^{1-\frac{1}{\alpha}}(x), \tag{2.21}$$

где $W_f = -(F_f A_1 + A_1^* F_f)$, $F_f^\alpha = F_f - H^\alpha F_f - F_f H^\alpha$ — положительно определенная матрица. Покажем, что W_f является положительно определенной матрицей. Поскольку в силу выбора функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ имеем

$$A_0 F_f^{-1} + F_f^{-1} A_0^* = -\int\limits_0^\infty f(s)\, d\big(e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s}\big) = f(0) B_0 B_0^* - \widehat{F}_f,$$

где $\widehat{F}_f = \int_0^\infty e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s} d(-f(s))$ — положительно определенная матрица, то получаем равенство

$$F_f A_0 + A_0^* F_f = F_f f(0) B_0 B_0^* F_f - F_f \widehat{F}_f F_f.$$

Отсюда в силу равенства $f(0) B_0 B_0^* = B_0 B_0^* f(0)$ получаем, что матрица $W_f = F_f \widehat{F}_f F_f$ и является положительно определенной.

Тогда из соотношения (2.21) получаем неравенство (2.15), где $\lambda_{\min}^\alpha$ — наименьшее собственное значение матрицы $(F_f^\alpha)^{-1} W_f$. □

Вычислим производную k-го порядка управления $u_f^\alpha(x)$ вида (2.17) в силу замкнутой системы $\dot{x} = Ax + Bu_f^\alpha(x)$. Обозначим

$$\beta_\alpha(y) = \frac{(W_f y, y)}{(F_f^\alpha y, y)}, \quad P_i(\alpha, y) = \left(\tfrac{2i-1}{2\alpha} E - H^\alpha\right) \beta_\alpha(y) + A_1, \quad i = 1, \ldots.$$

Отсюда имеем

$$\beta_\alpha^{(k)}(y) = \sum_{i=0}^k C_k^i (W_f y, y)^{(k-i)} \Big(\frac{1}{(F_f^\alpha y, y)}\Big)^{(i)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.22}$$

$$(P_i(\alpha, y))^{(k)} = \left(\tfrac{2i-1}{2\alpha} E - H^\alpha\right) \beta_\alpha^{(k)}(y), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Здесь и далее C_k^i — биномиальные числа.

Поскольку из (2.20) в силу равенства $\dot{\Theta}_\alpha(x) = -\beta_\alpha(y)\Theta_\alpha^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$ имеем $\dot{y} = (A_1 - H^\alpha \beta_\alpha(y))\, \Theta^{-\frac{1}{\alpha}}(x) y$, то производная в силу замкнутой системы квадратичной формы (Vy, y) имеет вид

$$(Vy, y)^{\boldsymbol{\cdot}} = \big((V_a y, y) + (V_h y, y)\beta_\alpha(y)\big)\, \Theta_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.23}$$

где $V_a = VA_1 + A_1^* V$, $V_h = -(VH^\alpha + H^\alpha V)$, и, следовательно, производная p-го порядка этой квадратичной формы вычисляется по формуле

$$(Vy,y)^{(p)} = \sum_{s=0}^{p-1} C_{p-1}^s \Bigg((V_a y,y)^{(p-1-s)} + \sum_{l=0}^{p-1-s} C_{p-1-s}^l (V_h y,y)^{(p-1-s-l)} \beta_\alpha^{(l)}(y) \Bigg) \big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}\big)^{(s)}. \quad (2.24)$$

Методом индукции устанавливается справедливость формулы

$$\Big(\frac{1}{(F_f^\alpha y,y)}\Big)^{(i)} = \frac{1}{(F_f^\alpha y,y)} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=i-j} \gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_j}^{(i)} \prod_{l=1}^{j} \frac{(F_f^\alpha y,y)^{(\alpha_l+1)}}{(F_f^\alpha y,y)}, \quad (2.25)$$

где $\gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_j}^{(i)}$ — положительные числа, определяемые рекуррентными соотношениями

$$\gamma_0^{(1)} = 1, \quad \gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_j}^{(i)} = \gamma'^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}, \qquad \alpha_1+\cdots+\alpha_j = i-j,$$
$$\gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}0}^{(i)} = j\,\gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}}^{(i-1)} + \gamma'^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}0}, \quad j=1,\ldots,i, \quad i=2,\ldots,$$

здесь

$$\gamma'^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j} = \gamma_{\alpha_1-1\alpha_2\ldots\alpha_j}^{(i-1)} + \cdots + \gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}\alpha_j-1}^{(i-1)}$$

(слагаемое с отрицательным индексом равно нулю), на основании равенства $\big(\Theta_\alpha^{-\frac{m+1}{\alpha}}\big)^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{m+1}{\alpha}\beta_\alpha(y)\Theta_\alpha^{-\frac{m+2}{\alpha}}$ справедливость формулы

$$\big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}\big)^{(s)} = \Theta_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{m=1}^{s} \frac{m!}{\alpha^m} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=s-m} \zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_m}^{(s)} \beta_\alpha^{(\alpha_1)} \ldots \beta_\alpha^{(\alpha_m)} \Theta^{-\frac{m}{\alpha}},$$

на основании равенства $\big(\Theta_\alpha^{-\frac{2i+1}{2\alpha}} y\big)^{\boldsymbol{\cdot}} = P_{i+1}\Theta_\alpha^{-\frac{2i+3}{2\alpha}} y$ для $k=1,\ldots$ справедливость формулы

$$\big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}} y\big)^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_i=k-i} \zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_i}^{(k)} P_1^{(\alpha_1)} \ldots P_i^{(\alpha_i)} \Theta_\alpha^{-\frac{2i+1}{2\alpha}} y, \quad (2.26)$$

где $\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_i}^{(k)}$ — положительные числа, определяемые рекуррентными соотношениями

$$\zeta_0^{(1)} = 1, \quad \zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_i}^{(k)} = \zeta'^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_i}, \qquad \alpha_1+\cdots+\alpha_i = k-i,$$
$$\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}0}^{(k)} = \zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}}^{(k-1)} + \zeta'^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}0}, \quad i=1,\ldots,k, \quad k=2,\ldots,$$

здесь

$$\zeta'^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_i} = \zeta^{(k-1)}_{\alpha_1-1\alpha_2\ldots\alpha_i} + \cdots + \zeta^{(k-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_i-1}$$

(слагаемое с отрицательным индексом равно нулю), на основании равенств (2.18), $A_0^{n_1} = 0$ для $k = 1, \ldots$ справедливость формулы

$$(Lx)^{(k)} = \delta_k A_0^k Lx + \sum_{j=0}^{m_k-1} A_0^{m_k-1-j} B_0 P_0 \big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}} y\big)^{(j+(1-\delta_k)(k-n_1))}, \tag{2.27}$$

где $m_k = \min\{k, n_1\}$, $\delta_k = 1$ для $k < n_1$, $\delta_k = 0$ для $k \geq n_1$.

Производная k-го порядка $\big(u_f^\alpha(x)\big)^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ управления $u_f^\alpha(x)$ вида (2.17) в силу замкнутой системы задается формулой

$$\big(u_f^\alpha(x)\big)^{(k)} = M^{-1} P_0 \big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}} y\big)^{(k)} - M^{-1} B_0^* \widetilde{A}\,(Lx)^{(k)}, \tag{2.28}$$

где $\widetilde{A} = LAL^{-1}$.

Покажем ограниченность управления и его производных.

Утверждение 2.4. *Для каждого* $\alpha \geq 2l + 1$ *управление* $u_f^\alpha(x)$ *и его производные* $\big(u_f^\alpha(x)\big)^{(1)}, \ldots, \big(u_f^\alpha(x)\big)^{(l)}$ *в силу замкнутой системы* (2.1) *удовлетворяют ограничениям*

$$\|\big(u_f^\alpha(x)\big)^{(k)}\| \leq d_k, \qquad x \in \mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\}, \quad k = 0, 1, \ldots, l. \tag{2.29}$$

Доказательство. Вначале установим, что

$$|\beta_\alpha^{(k)}(y)| \leq \overline{\beta}_k(\alpha) \Theta_\alpha^{-\frac{k}{\alpha}}, \qquad k = 1, \ldots, \tag{2.30}$$

для любого y. Очевидно, что $\beta_\alpha(y) \leq \lambda^\alpha_{\max}$, где $\lambda^\alpha_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $(F_f^\alpha)^{-1} W_f$. Из (2.22) в силу (2.25) имеем

$$\beta_\alpha^{(k)}(y) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{(W_f y, y)^{(k-i)}}{(F_f^\alpha y, y)} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \times \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j = i-j} \gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j} \prod_{l=1}^{j} \frac{(F_f^\alpha y, y)^{(\alpha_l+1)}}{(F_f^\alpha y, y)}, \tag{2.31}$$

для $k = 1, \ldots$. По индукции, из формулы (2.31) при $k = 1$ имеем

$$\dot{\beta}_\alpha(y) = \frac{(W_f y, y)^{\boldsymbol{\cdot}}}{(F_f^\alpha y, y)} - \beta_\alpha(y) \frac{(F_f^\alpha y, y)^{\boldsymbol{\cdot}}}{(F_f^\alpha y, y)}\ .$$

Отсюда в силу (2.23) получаем, что $|\dot{\beta}_\alpha(y)| \le \overline{\beta}_1(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}$, где $\overline{\beta}_1(\alpha) = \omega_1^\alpha + \lambda_{\max}^\alpha \varphi_1^\alpha$,

$$\omega_1^\alpha = \max\left\{|\lambda_{\min}^{W_a}|, |\lambda_{\max}^{W_a}|\right\} + \lambda_{\max}^\alpha \max\left\{|\lambda_{\min}^{W_h}|, |\lambda_{\max}^{W_h}|\right\},$$

$$\varphi_1^\alpha = \max\left\{|\lambda_{\min}^{F_a^\alpha}|, |\lambda_{\max}^{F_a^\alpha}|\right\} + \lambda_{\max}^\alpha \max\left\{|\lambda_{\min}^{F_h^\alpha}|, |\lambda_{\max}^{F_h^\alpha}|\right\},$$

где $\lambda_{\min}^{W_a}$, $\lambda_{\max}^{W_a}$, $\lambda_{\min}^{W_h}$, $\lambda_{\max}^{W_h}$, $\lambda_{\min}^{F_a^\alpha}$, $\lambda_{\max}^{F_a^\alpha}$, $\lambda_{\min}^{F_h^\alpha}$, $\lambda_{\max}^{F_h^\alpha}$ — наименьшие и наибольшие собственные значения матриц $(F_f^\alpha)^{-1}(W_f)_a$, $(F_f^\alpha)^{-1}(W_f)_h$, $(F_f^\alpha)^{-1}(F_f^\alpha)_a$, $(F_f^\alpha)^{-1}(F_f^\alpha)_h$ соответственно.

Предположим, что для любого y справедливы неравенства

$$|\beta_\alpha^{(\nu)}(y)| \le \overline{\beta}_\nu(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{\nu}{\alpha}}, \qquad \nu = 0, \dots, k-1. \tag{2.32}$$

Это означает, что выполнены неравенства

$$\left|\frac{(Vy, y)^{(\nu)}}{(F_f^\alpha y, y)}\right| \le v_\nu(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{\nu}{\alpha}}, \qquad \nu = 0, \dots, k-1, \tag{2.33}$$

при $V = W_f$, $V = F_f^\alpha$, $V = W_a$ и $V = W_h$, $V = (F_f^\alpha)_a \equiv F_f^\alpha A_1 + A_1^* F_f^\alpha$, $V = (F_f^\alpha)_h \equiv -(F_f^\alpha H^\alpha + H^\alpha F_f^\alpha)$ с v_ν равным, соответственно, ω_ν, φ_ν, ω_ν^a, ω_ν^h, φ_ν^a, φ_ν^h. Поэтому на основании равенства (2.24) имеем

$$\left|\frac{(W_f y, y)^{(k)}}{(F_f^\alpha y, y)}\right| \le \omega_k \Theta_\alpha^{-\frac{k}{\alpha}}, \qquad \left|\frac{(F_f^\alpha y, y)^{(k)}}{(F_f^\alpha y, y)}\right| \le \varphi_k \Theta_\alpha^{-\frac{k}{\alpha}}, \tag{2.34}$$

где

$$\omega_k = \sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^s \Bigg(\omega_{k-1-s}^a + \sum_{l=0}^{k-1-s} C_{k-1-s}^l \omega_{k-1-s-l}^h \overline{\beta}_l\Bigg) \times \sum_{m=1}^{s} \frac{m!}{\alpha^m} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_m = s-m} \zeta_{\alpha_1\dots\alpha_m}^{(s)} \overline{\beta}_{\alpha_1} \dots \overline{\beta}_{\alpha_m},$$

$$\varphi_k = \sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^s \Bigg(\varphi_{k-1-s}^a + \sum_{l=0}^{k-1-s} C_{k-1-s}^l \varphi_{k-1-s-l}^h \overline{\beta}_l\Bigg) \times \sum_{m=1}^{s} \frac{m!}{\alpha^m} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_m = s-m} \zeta_{\alpha_1\dots\alpha_m}^{(s)} \overline{\beta}_{\alpha_1} \dots \overline{\beta}_{\alpha_m}.$$

Тогда из (2.31) в силу неравенств (2.32), (2.33), (2.34) следует неравенство $|\beta_\alpha^{(k)}(y)| \le \overline{\beta}_k(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{k}{\alpha}}$, где

$$\overline{\beta}_k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \omega_{k-i} \sum_{j=1}^{i} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_j=i-j} \gamma_{\alpha_1\dots\alpha_j}^{(i)} \varphi_{\alpha_1+1}\cdots\varphi_{\alpha_j+1}.$$

Поскольку в силу (2.30) имеем

$$\|P_i^{(k)}(\alpha,y)\| \le \Big(\frac{n_1+i-1}{\alpha}\,\overline{\beta}_k(\alpha) + \delta_{0k}\|A_1\|\Big)\Theta_\alpha^{-\frac{k}{\alpha}}, \quad i=1,\dots, \quad k=0,1,\dots,$$

где δ_{0k} — символ Кронекера, то

$$\Big\|\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_i=k-i} \zeta_{\alpha_1\dots\alpha_i} P_1^{(\alpha_1)}\dots P_i^{(\alpha_i)}\Big\| \le \sigma_{k,i}(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{k-i}{\alpha}},$$

где

$$\sigma_{k,i}(\alpha) = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_i=k-i} \zeta_{\alpha_1\dots\alpha_i} \prod_{j=1}^{i}\Big(\frac{n_1+j-1}{\alpha}\,\overline{\beta}_{\alpha_j}(\alpha) + \delta_{0\alpha_j}\|A_1\|\Big).$$

Поэтому из (2.26) получаем

$$\|\big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}(x)y\big)^{(k)}\| \le \sigma_k(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(x)\|y\|, \quad k=0,1\dots, \ x\in\mathbb{R}^n, \tag{2.35}$$

где $\sigma_0 = 1$, $\sigma_k(\alpha) = \sum_{i=1}^{k}\sigma_{k,i}(\alpha)$ Учитывая неравенство (2.35), из (2.27) получаем

$$\|(Lx)^{(k)}\| \le \bigg(\delta_k\|A_0^k D_\alpha^{-1}(\Theta_\alpha(x))\|\Theta_\alpha^{\frac{2k+1}{2\alpha}}(x) + \sum_{j=0}^{m_k-1}\|A_0^{m_k-1-j}B_0P_0\| \times \sigma_{j+(1-\delta_k)(k-n_1)}\Theta_\alpha^{\frac{k-j-(1-\delta_k)(k-n_1)}{\alpha}}(x)\bigg)\Theta_\alpha^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(x)\|y\|. \tag{2.36}$$

Поскольку

$$\|A_0^k D_\alpha^{-1}(\Theta)\|\Theta^{\frac{2k+1}{2\alpha}} = \Theta^{\frac{\gamma}{\alpha}}, \qquad \gamma = \begin{cases}(n_1+1) & \text{при } \Theta>1,\\ 1 & \text{при } \Theta\le 1,\end{cases}$$

и

$$k-j-(1-\delta_k)(k-n_1) \ge k-m_k+1-(1-\delta_k)(k-n_1) = 1,$$

то в области $\mathrm{Q}_\alpha\setminus\{0\}$ имеем оценку

$$\delta_k \|A_0^k D_\alpha^{-1}(\Theta_\alpha(x))\| \Theta_\alpha^{\frac{2k+1}{2\alpha}}(x) + \sum_{j=0}^{m_k-1} \|A_0^{m_k-1-j} B_0 P_0\|$$
$$\times\ \sigma_{j+(1-\delta_k)(k-n_1)}(\alpha) \Theta_\alpha^{\frac{k-j-(1-\delta_k)(k-n_1)}{\alpha}}(x) \le \ell_k(\alpha), \qquad k = 0, 1, \dots,$$

где

$$\ell_k(\alpha) = \delta_k c_\alpha^{\frac{\gamma}{\alpha}} + \sum_{j=0}^{m_k-1} \|A_0^{m_k-1-j} B_0 P_0\| \sigma_{j+(1-\delta_k)(k-n_1)}(\alpha) c_\alpha^{\frac{k-j-(1-\delta_k)(k-n_1)}{\alpha}}.$$

Поэтому из неравенства (2.36) имеем

$$\|(Lx)^{(k)}\| \le \ell_k(\alpha) \Theta_\alpha^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(x) \|y\|, \qquad x \in \mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\}. \tag{2.37}$$

Из (2.28), в силу неравенств (2.35), (2.37), вытекает, что

$$\| \left(u^\alpha(x)\right)^{(k)} \| \le \eta_k(\alpha) \Theta_\alpha^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(x) \|y\|, \qquad x \in \mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\},\ k = 0, 1, \dots, \tag{2.38}$$

где $\eta_k(\alpha) = \|M^{-1} P_0\| \sigma_k(\alpha) + \|M^{-1} B_0^* \widetilde{A}\| \ell_k(\alpha)$. Из (2.16) имеем неравенство $\|y\|^2 \le 2a_0 \Theta_\alpha(x) \|F_f^{-1}\|$, в силу которого, из (2.38) для $\alpha \ge (2l+1)$ в области $\mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\}$ получаем

$$\| \left(u_f^\alpha(x)\right)^{(k)} \| \le \eta_k(\alpha) \sqrt{2a_0 \|F_f^{-1}\|}\, c_\alpha^{\frac{1}{2} - \frac{2k+1}{2\alpha}}, \qquad k = 0, 1, \dots, l. \tag{2.39}$$

Выберем число a_0 из условия

$$0 < a_0 \le \frac{1}{2\|F_f^{-1}\|} \min_{0 \le k \le l} \frac{d_k^2}{\eta_k^2(\alpha) c_\alpha^{1 - \frac{2k+1}{\alpha}}}. \tag{2.40}$$

Тогда из (2.39) получаем справедливость неравенств (2.29). □

Таким образом, имеем теорему, дающую решение задачи синтеза инерционных управлений для системы (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть $f_1(s), \dots, f_r(s)$ — произвольные неотрицательные монотонно невозрастающие на полуоси $[0, +\infty)$ функции, удовлетворяющие условиям (2.3), число $\alpha \ge 2l + 1$, a_0 удовлетворяет условию (2.40), функция управляемости $\Theta_\alpha(x)$ при $x \ne 0$ является положительным решением уравнения (2.10), $\Theta_\alpha(0) = 0$, область $\mathrm{Q} = \{x : \Theta_\alpha(x) \le c_\alpha\}$, где c_α из (2.13).*

Тогда управление $u_f^\alpha(x)$ вида (2.14) решает задачу синтеза инерционных управлений в области $\mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\}$, причем время движения $T_\alpha(x_0)$ из произвольной точки $x_0 \in \mathrm{Q}_\alpha$ в начало координат по траектории системы (2.1) с управлением $u_f^\alpha(x)$ не превосходит $\alpha \Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)/\lambda_{\min}^\alpha$.

Доказательство. Следуя теореме 1 из [4], установлено, что для каждого $\alpha \geq 1$ уравнение (2.10) определяет единственную положительную функцию $\Theta_\alpha(x)$ непрерывно дифференцируемую в $\mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}$ и непрерывную при $x = 0$ (утверждение 2.1); показано, что для постоянной c_α из (2.13) область Q_α является ограниченной и $\mathrm{Q}_\alpha \subset \operatorname{int} \mathrm{Q}^1_\alpha$ (утверждение 2.2); управление (2.14) является липшицевым в каждом множестве $K(\rho_1, \rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2 \leq R_\alpha\}$ с постоянной Липшица $L_u(\rho_1, \rho_2) \to +\infty$ при $\rho_1 \to 0$; показано, что производная функции $\Theta_\alpha(x)$ ($\alpha \geq 1$) в силу замкнутой системы (2.1) с этим управлением удовлетворяет неравенству (2.15) (утверждение 2.3) и, наконец, установлено, что для каждого $\alpha \geq 2l + 1$ и числа a_0, выбранного согласно неравенству (2.40), управление и его производные в силу замкнутой системы (2.1) удовлетворяют ограничениям (2.29) (утверждение 2.4).

Тогда по теореме 1 из [4, 5] следует утверждение данной теоремы.

□

Пример 2.1. Рассмотрим решение задачи синтеза инерционных управлений для управляемой системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x \in \mathbb{R}^4, \; u \in \mathbb{R}^2, \tag{2.41}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rang} B = 2,$$

с ограничениями на управление (1.3) при $l = 2$ и $d_0 = 10$, $d_1 = 30$, $d_2 = 90$.

В данном случае $\operatorname{rang}(B \;\, AB \;\, A^2B \;\, A^3B) = 4$ и реализуется, например, на вектор-столбцах b_1, Ab_1, b_2, Ab_2, где b_i – i-й столбец матрицы B. Отметим, что в силу условий $\operatorname{rang}(b_i \;\, Ab_i \;\, A^2b_i \;\, A^3b_i) = 2$, $i = 1, 2$, система (2.41) не является полностью управляемой с одномерным управлением (с управлением u_1, или с управлением u_2).

Выберем матрицу K в виде

$$K = (b_1 \; Ab_1 \; b_2 \; Ab_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad n_1 = n_2 = 2.$$

Определяя векторы c_1, c_2 из систем (2.6), которые имеют вид $K^*c_1 = (0, 1, 0, 0)^*$, $K^*c_2 = (0, 0, 0, 1)^*$, получаем $c_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^*$, $c_2 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^*$. Тогда матрица L из (2.7) имеет вид

$$L=\begin{pmatrix} c_1^* \\ c_1^*A \\ c_2^* \\ c_2^*A \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выберем функции $f_1(s)$, $f_2(s)$ в виде

$$f_1(s)=\begin{cases} 1-k/5, & k\le s<k+1,\ k=0,\dots,4, \\ 0, & s\ge 5, \end{cases}$$

$$f_2(s)=\begin{cases} 1-s/2, & 0\le s<2, \\ 0, & s\ge 2. \end{cases}$$

Тогда матрица $F_{f,\alpha}(\Theta)$ имеет вид

$$F_{f,\alpha}(\Theta)=\begin{pmatrix} 12/(59\Theta^{3/\alpha}) & 22/(59\Theta^{2/\alpha}) & 0 & 0 \\ 22/(59\Theta^{2/\alpha}) & 60/(59\Theta^{1/\alpha}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/(2\Theta^{3/\alpha}) & 3/(\Theta^{2/\alpha}) \\ 0 & 0 & 3/(\Theta^{2/\alpha}) & 3/(\Theta^{1/\alpha}) \end{pmatrix}.$$

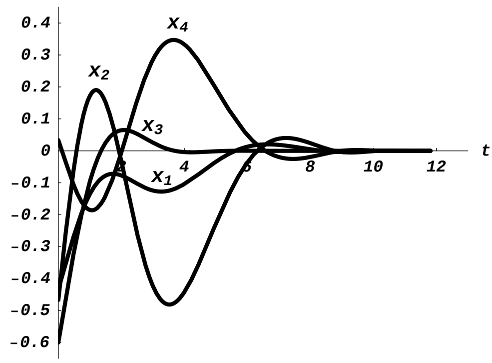

Рис. 1: Траектория $x(t)$.

Пусть $\alpha=5$ и далее в примере этот индекс указывать не будем. Положим $\overline{\Theta}=12814578$. Тогда из (2.13) постоянная $c=1$. Согласно условию (2.40) выберем число $a_0=0.0889486$. Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ при $x\neq 0$ из уравнения (2.10), которое принимает вид

$$2a_0\Theta^{\frac{8}{5}}-\frac{12}{59}z_1^2-\frac{44}{59}\Theta^{\frac{1}{5}}z_1z_2-\frac{60}{59}\Theta^{\frac{2}{5}}z_2^2-\frac{9}{2}z_3^2-6\Theta^{\frac{1}{5}}z_3z_4-3\Theta^{\frac{2}{5}}z_4^2=0, \quad (2.42)$$

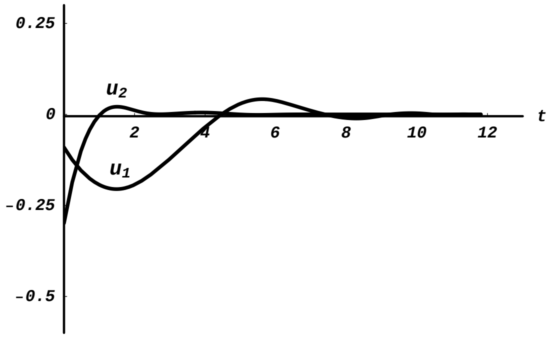

Рис. 2: Управление на траектории.

где $z_1 = -(x_1 - x_3 - x_4)/2$, $z_2 = (3x_1 - x_3 + x_4)/2$, $z_3 = x_3/2$, $z_4 = -x_1 + x_2 - x_3/2 + x_4$.

Согласно (2.14) зададим управление $u(x)$ формулой

$$u(x) = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{11}{59\Theta^{2/5}(x)}\right)z_1 + \left(2 - \frac{30}{59\Theta^{1/5}(x)}\right)z_2 \\ \left(3 - \frac{3}{2\Theta^{2/5}(x)}\right)z_3 + \left(2 - \frac{3}{2\Theta^{1/5}(x)}\right)z_4 \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

первая и вторая производные которого имеют вид

$$\dot u(x) = \begin{pmatrix} -\frac{22(-75+59\beta+295\Theta^{1/5}(x))}{17405\Theta^{3/5}(x)}\, z_1 + \frac{251-354\beta-3540\Theta^{1/5}(x)+3481\Theta^{2/5}(x)}{3481\Theta^{2/5}(x)}\, z_2 \\ -\frac{-45+12\beta+60\Theta^{1/5}(x)}{20\Theta^{3/5}(x)}\, z_3 - \frac{6\beta-15(1-2\Theta^{1/5}(x))^2}{20\Theta^{2/5}(x)}\, z_4 \end{pmatrix},$$

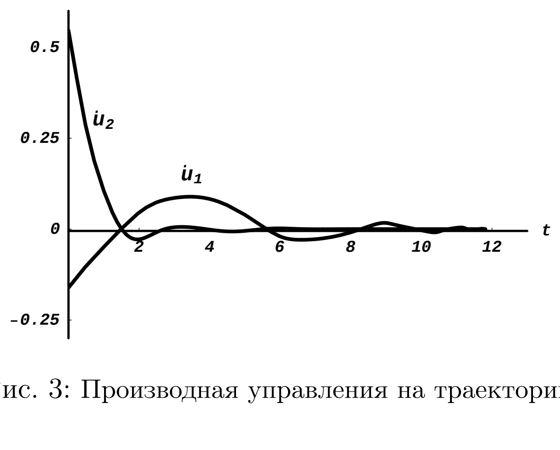

Рис. 3: Производная управления на траектории.

$$\ddot{u}(x)=\begin{pmatrix} \frac{1}{5134475\Theta^{4/5}}(-11(62658\beta^2+590\beta(-180+59\Theta 1/5)+15(1255 \\ +118(-25+59\dot{\beta})\Theta^{1/5}))z_1+5(179100-125316\beta^2 \\ -354\beta(-52+295\Theta^{1/5})-295(-251+1062\dot{\beta})\Theta^{1/5})\Theta^{1/5}z_2) \\ \\ -\frac{1}{200\Theta^{4/5}}(9((24\beta^2+40\beta(-3+\Theta^{1/5})+5(15+(-30+8\dot{\beta})\Theta^{1/5}))z_3 \\ +(-75+8\beta^2+10\beta(-1+2\Theta^{1/5})+10(-5+2\dot{\beta})\Theta^{1/5})\Theta^{1/5}z_4)) \end{pmatrix},$$

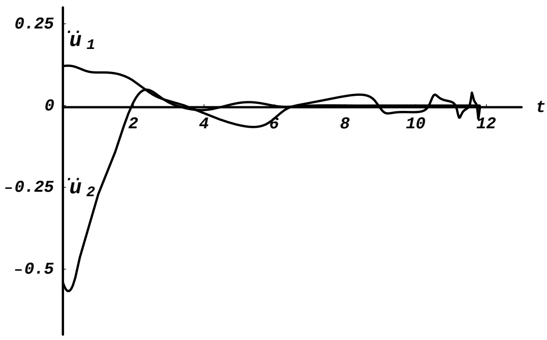

Рис. 4: Вторая производная управления на траектории.

где

$$\beta=\frac{5(484z_1^2+1224\Theta^{\frac{1}{5}}z_1z_2+1004\Theta^{\frac{2}{5}}z_2^2+10443(3z_3^2+3\Theta^{\frac{1}{5}}z_3z_4+\Theta^{\frac{2}{5}}z_4^2))}{118(48z_1^2+154\Theta^{\frac{1}{5}}z_1z_2+3(60\Theta^{\frac{2}{5}}z_2^2+59(6z_3^2+7\Theta^{\frac{1}{5}}z_3z_4+3\Theta^{\frac{2}{5}}z_4^2)))},$$

$$\begin{aligned}\dot{\beta}=(&-16(42075-178475\beta+125316\beta^2)z_1^2\\ &-16(5300-305325\beta+268037\beta^2)\Theta^{1/5}z_1z_2\\ &-80(-7485-32686\beta+31329\beta^2)\Theta^{2/5}z_2^2\\ &-616137(3(75-100\beta+24\beta^2)z_3^2+(75-210\beta+56\beta^2)\Theta^{1/5}z_3z_4\\ &+2\beta(-25+6\beta)\Theta^{2/5}z_4^2))/(69620\Theta^{1/5}(48z_1^2+154\Theta^{1/5}z_1z_2\\ &+3(60\Theta^{2/5}z_2^2+59(6z_3^2+7\Theta^{1/5}z_3z_4+3\Theta^{2/5}z_4^2)))).\end{aligned}$$

Это управление переводит любую точку $x_0\in \mathrm{Q}=\{x\in\mathbb{R}^4:\Theta(x)\le 1\}$ в начало координат за время $T(x_0)\le 13555\Theta(x_0)/(870-10\sqrt{2147})$ и удовлетворяет вместе с первой и второй производными в области $\mathrm{Q}\setminus\{0\}$ заданным ограничениям.

Найдем траекторию системы (2.41), отвечающую управлению $u=u(x)$ вида (2.43) и начинающуюся в точке $x(0)=x_0\in \mathrm{Q}$. Выберем начальную точку $x_0=\left(-\frac{13}{30},\ -\frac{7}{15},\ -\frac{3}{5},\ \frac{1}{30}\right)^*\in \mathrm{Q}$ и найдем положительный корень Θ_0 уравнения (2.42) при $x=x_0$. Имеем $\Theta_0=0.98728$

и, следовательно, время движения удовлетворяет оценке $T(x_0) \leq 33.2487$. Траектория $x(t) = L^{-1}z(t)$, где $z(t)$ определяется из решения задачи Коши

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -\frac{11}{59\theta^{\frac{2}{5}}}\, z_1 - \frac{30}{59\theta^{\frac{1}{5}}}\, z_2, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -\frac{3}{2\theta^{\frac{2}{5}}}\, z_3 - \frac{3}{2\theta^{\frac{1}{5}}}\, z_4,$$

$$\dot{\theta} = -\frac{(2420z_1^2 + 52215(3z_3^2 + 3z_3z_4\theta^{\frac{1}{5}} + z_4^2\theta^{\frac{2}{5}}) + 6120z_1z_2\theta^{\frac{1}{5}} + 5020z_2^2\theta^{\frac{2}{5}})\theta^{\frac{4}{5}}}{118(48z_1^2 + 3(59(6z_3^2 + 7z_3z_4\theta^{\frac{1}{5}} + 3z_4^2\theta^{\frac{2}{5}}) + 60z_2^2\theta^{\frac{2}{5}}) + 154z_1z_2\theta^{\frac{1}{5}}))},$$

$$z_1(0) = 1/2, \quad z_2(0) = -1/3, \quad z_3(0) = -3/10, \quad z_4(0) = 3/10, \quad \theta(0) = \Theta_0.$$

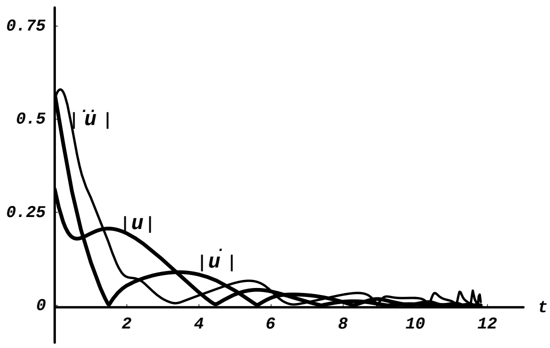

Рис. 5: Нормы управления, его первой и второй производных на траектории.

На рис. 1 изображены графики компонент траектории $x(t)$, по которой начальная точка переводится в начало координат за время $T = 11.814$. На рис. 2–4 изображены графики управления, его первой и второй производных на этой траектории, а на рис. 5 изображены графики их норм. Очевидно, управление, его первая и вторая производные удовлетворяют заданным ограничениям.

3. Синтез инерционных управлений для нелинейных систем по первому приближению

Рассмотрим задачу синтеза инерционных управлений для системы (1.1) с ограничениями на управление вида (1.3) при $l = 1$, т.е. с ограничениями на управление и его производную. Предположим, что функция $\varphi(x, u)$ такая, что $\varphi(0, 0) = 0$ и имеет непрерывные до второго порядка производные по x и u. Тогда в окрестности нуля систему (1.1) можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + g(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{3.1}$$

где $A = f_x(0,0)$, $B = f_u(0,0)$, $g(x,u)$ — непрерывная функция. Не ограничивая общности, предположим, что $\operatorname{rang} B = r$.

Построим функцию управляемости и на ее основе определим инерционное управление, решающее рассматриваемую задачу для системы (3.1) в предположении, что функция $g(x,u)$ удовлетворяет неравенству

$$\|g(x,u)\| \le c_1\|x\|^{s_1} + c_2\|x\|^{s_2}\|u\|^{s_3} + c_3\|u\|^{s_4}, \tag{3.2}$$

где $c_1 \ge 0$, $c_2 \ge 0$, $c_3 \ge 0$, $s_1 > 1$, $s_2 + s_3 > 1$, $s_4 > 1$.

Теорема 3.1. *Рассмотрим управляемую систему* (3.1)*. Пусть выполнены условия* (2.2), (2.3) *функция* $g(x,u)$ *удовлетворяет неравенству* (3.2) *и в каждой области* $\{(x,u) : 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2,\ \|u\| \le d_0\}$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|g(x'',u'') - g(x',u')\| \le L(\rho_1,\rho_2)(\|x''-x'\| + |u''-u'|).$$

Пусть $\alpha_0 = \max\left\{3,\ \nu_0,\ \frac{2n_1}{s_1} - 1,\ \frac{2n_1 - s_2 + s_3}{s_2 + s_3},\ \frac{2n_1}{s_4} + 1\right\}$*, где число* ν_0 *удовлетворяет неравенству* $\nu_0 > \max\left\{\frac{2n_1 - s_1 - 3}{s_1 - 1},\ \frac{2n_1 + s_3 - s_2 - 3}{s_2 + s_3 - 1},\ \frac{2n_1 + s_4 - 3}{s_4 - 1}\right\}$.

Тогда существуют положительные числа a_0 *и* $\widetilde{c}_\alpha$ *такие, что при* $\alpha \ge \alpha_0$ *управление*

$$u_f^\alpha(x) = -\frac{1}{2} M^{-1} B_0^* f(0) F_{f,\alpha}(\Theta_\alpha(x)) L x, \tag{3.3}$$

где функция управляемости $\Theta_\alpha(x)$ *при* $x \ne 0$ *определена из уравнения* (2.10), $\Theta_\alpha(0) = 0$, *для системы* (3.1) *решает задачу синтеза инерционных управлений в области* $\widetilde{\mathrm{Q}}_\alpha = \{x : \Theta_\alpha(x) \le \widetilde{c}_\alpha\}$ *и удовлетворяет ограничениям* $\|u_f^\alpha(x)\| \le d_0$, $\|\dot{u}_f^\alpha(x)\| \le d_1$*. Время движения* $T_\alpha(x_0)$ *из точки* $x_0 \in \widetilde{\mathrm{Q}}_\alpha$ *в начало координат по траектории системы* (3.1) *с управлением* $u_f^\alpha(x)$ *удовлетворяет неравенству* $T_\alpha(x_0) \le \alpha \Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)/\widetilde{\beta}_\alpha$ $(\widetilde{\beta}_\alpha > 0)$.

Доказательство. Доказательство основано на теореме 1 из [4]. Управление $u_f^\alpha(x)$ вида (3.3) удовлетворяет условию Липшица в каждой области $K(\rho_1,\rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2\}$ с постоянной $L(\rho_1,\rho_2)$, причем $L(\rho_1,\rho_2) \to 0$ при $\rho_1 \to 0$.

Покажем, что производная функции $\Theta_\alpha(x)$ в силу системы (3.1) с этим управлением удовлетворяет неравенству $\dot{\Theta}_\alpha(x) \le -\widetilde{\beta}_\alpha \Theta_\alpha^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$, и установим ограниченность управления и его производной. Перепишем управление (3.3) в виде

$$u_f^\alpha(x) = \Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}}(x) M^{-1} P_0 y. \tag{3.4}$$

Далее будем считать, что $\Theta = \Theta_\alpha(x)$, $D = D_\alpha(\Theta_\alpha(x))$, $g = g(x, u_f^\alpha(x))$. Так как

$$L\dot{x} = \widetilde{A}Lx + B_0 M u_f^\alpha(x) + Lg = \widetilde{A}Lx + \Theta^{-\frac{1}{2\alpha}} B_0 P_0 y + Lg,$$

то используя равенства $(E - B_0 B_0^*)\widetilde{A} = A_0$, (2.19), получаем

$$\dot{y} = \bigl(\dot{\Theta}\Theta^{-1} H^\alpha + \Theta^{-\frac{1}{\alpha}} A_1 + \Theta^{-\frac{1}{2\alpha}} B_0 B_0^* \widetilde{A} D^{-1}\bigr) y + DLg.$$

Тогда

$$\dot{\Theta} = -\frac{(W_f y, y)}{(F_f^\alpha y, y)}\, \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}} + \frac{\Theta^{1-\frac{1}{2\alpha}}(G_f(\Theta)y, y) + 2\Theta(F_f y, DLg)}{(F_f^\alpha y, y)}, \tag{3.5}$$

где матрица $G_f(\Theta)$ имеет вид

$$G_f(\Theta) = F_f B_0 B_0^* \widetilde{A} D^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta) \widetilde{A}^* B_0 B_0^* F_f.$$

Следовательно, производная управления $u_f^\alpha(x)$ вида (3.4) в силу системы (3.1) имеет вид

$$\dot{u}_f^\alpha(x) = M^{-1} P_0 \Biggl[P_1 \Theta^{-\frac{3}{2\alpha}} y + B_0 B_0^* \widetilde{A} D^{-1} \Theta^{-\frac{1}{\alpha}} y + \Theta^{-\frac{1}{2\alpha}} DLg \\ + \Bigl(H^\alpha - \frac{1}{2\alpha} E\Bigr) y \frac{\Theta^{-\frac{1}{\alpha}}(G_f(\Theta)y, y) + 2\Theta^{-\frac{1}{2\alpha}}(F_f y, DLg)}{(F_f^\alpha y, y)} \Biggr]. \tag{3.6}$$

Так как $(F_f^\alpha y, y) \geq \|y\|^2 / \|(F_f^\alpha)^{-1}\|$, $\|y\| \leq \sqrt{2a_0 \Theta \|F_f^{-1}\|}$ и при $\Theta \leq 1$ справедливы неравенства $\|D(\Theta)\| \leq \Theta^{-\frac{2n_1 - 1}{2\alpha}}$, $\|D^{-1}(\Theta)\| \leq \Theta^{\frac{1}{2\alpha}}$, то из (3.5) и (3.6) получаем, что

$$\dot{\Theta} \leq -\Bigl(\lambda_{\min}^\alpha - 2\Theta^{\frac{1}{\alpha}} \|F_f B_0 B_0^* \widetilde{A}\| \|(F_f^\alpha)^{-1}\| \\ - 2\Theta^{-\frac{2n_1 - 3}{2\alpha}} \|F_f\| \|(F_f^\alpha)^{-1}\| \|L\| \|g\| / \|y\| \Bigr) \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}, \tag{3.7}$$

$$\|u^\alpha(x)\| \leq \|M^{-1} P_0\| \sqrt{2a_0 \|F_f^{-1}\|}\, \Theta^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}}, \tag{3.8}$$

$$\|\dot{u}^\alpha(x)\| \leq \mu_0 \sqrt{a_0}\, \Theta^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2\alpha}} + \mu_1 \sqrt{a_0}\, \Theta^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}} + \mu_2 \|g\| \Theta^{-\frac{n_1}{\alpha}}, \tag{3.9}$$

где

$$\mu_0 = \|M^{-1} P_0\| \Bigl(\frac{n_1}{\alpha}\ \lambda_{\max}^\alpha + \|A_1\|\Bigr) \sqrt{2\|F_f^{-1}\|},$$

$$\mu_1 = \|M^{-1} P_0\| \Bigl(\frac{2n_1}{\alpha}\ \|F_f B_0 B_0^* \widetilde{A}\| \|(F_f^\alpha)^{-1}\| + \|B_0 B_0^* \widetilde{A}\|\Bigr) \sqrt{2\|F_f^{-1}\|},$$

$$\mu_2 = \|M^{-1} P_0\| \Bigl(\frac{2n_1}{\alpha}\ \|F_f\| \|(F_f^\alpha)^{-1}\| + 1\Bigr) \|L\|.$$

Получим оценку для $\|g(L^{-1}D^{-1}y, u_f^\alpha(x))\|$. Используя неравенство (3.2) и вид управления $u_f^\alpha(x)$, имеем

$$\begin{aligned}
&\|g(L^{-1}D^{-1}y, M^{-1}P_0\Theta^{-\frac{1}{2\alpha}}y)\| \\
&\quad\le c_1\|L^{-1}\|^{s_1}\Theta^{\frac{s_1}{2\alpha}}\|y\|^{s_1} + c_2\|L^{-1}\|^{s_2}\|M^{-1}P_0\|^{s_3}\Theta^{\frac{s_2-s_3}{2\alpha}}\|y\|^{s_2+s_3} \\
&\qquad\qquad + c_3\|M^{-1}P_0\|^{s_4}\Theta^{-\frac{s_4}{2\alpha}}\|y\|^{s_4},
\end{aligned}$$

откуда, используя неравенство $\|y\| \le \sqrt{2a_0\|F_f^{-1}\|\Theta}$, получаем

$$\|g\| \le \mu_3 a_0^{\frac{s_1}{2}}\Theta^{\frac{s_1}{2\alpha}+\frac{s_1}{2}} + \mu_4 a_0^{\frac{s_2+s_3}{2}}\Theta^{\frac{s_2+s_3}{2}+\frac{s_2-s_3}{2\alpha}} + \mu_5 a_0^{\frac{s_4}{2}}\Theta^{\frac{s_4}{2}-\frac{s_4}{2\alpha}}, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\|g\|/\|y\| \le \frac{1}{\sqrt{2\|F_f^{-1}\|}}\Big(&\mu_3 a_0^{\frac{s_1-1}{2}+\frac{s_1}{2\alpha}}\Theta^{\frac{s_1}{2\alpha}+\frac{s_1-1}{2}} \\
&+ \mu_4 a_0^{\frac{s_2+s_3-1}{2}}\Theta^{\frac{s_2+s_3-1}{2}+\frac{s_2-s_3}{2\alpha}} + \mu_5 a_0^{\frac{s_4-1}{2}}\Theta^{\frac{s_4-1}{2}-\frac{s_4}{2\alpha}}\Big),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mu_3 = 2^{\frac{s_1}{2}}c_1\|L^{-1}\|^{s_1}\|F_f^{-1}\|^{\frac{s_1}{2}}, \\
&\mu_4 = 2^{\frac{s_2+s_3}{2}}c_2\|L^{-1}\|^{s_2}\|M^{-1}P_0\|^{s_3}\|F_f\|^{\frac{s_2+s_3}{2}}, \\
&\mu_5 = 2^{-\frac{s_4}{2}}c_3\|M^{-1}P_0\|^{s_4}\|F_f^{-1}\|^{\frac{s_4}{2}}.
\end{aligned}$$

Тогда из (3.7) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
\dot\Theta \le -\Big(&\lambda_{\min}^\alpha - 2\Theta^{\frac{1}{\alpha}}\|F_fB_0B_0^*\widetilde{A}\|\|(F_f^\alpha)^{-1}\| \\
&- \sqrt{2/\|F_f^{-1}\|}\|F_f\|\|(F_f^\alpha)^{-1}\|\|L\|\Big(\mu_3 a_0^{\frac{s_1-1}{2}}\Theta^{\nu_1(\alpha)} \\
&+ \mu_4 a_0^{\frac{s_2+s_3-1}{2}}\Theta^{\nu_2(\alpha)} + \mu_5 a_0^{\frac{s_4-1}{2}}\Theta^{\nu_3(\alpha)}\Big)\Big)\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$\begin{aligned}
&\nu_1(\alpha) = (\alpha(s_1-1)-2n_1+s_1+3)/2\alpha \\
&\nu_2(\alpha) = (\alpha(s_2+s_3-1)-2n_1+s_2-s_3+3)/2\alpha, \\
&\nu_3(\alpha) = (\alpha(s_4-1)-2n_1-s_4+3)/2\alpha,
\end{aligned}$$

причем $\nu_i(\alpha) > 0$ при $\alpha \ge \alpha_0$, $i = 1, 2, 3$.

На основании неравенств $\|y\| \le \sqrt{2a_0\Theta\|F_f^{-1}\|}$, (3.10) из неравенств (3.8), (3.9) получаем, что в области $\{x : \Theta_\alpha(x) \le 1\} \setminus \{0\}$ справедливы неравенства

$$\|u_f^\alpha(x)\| \le \|M^{-1}P_0\|\sqrt{2a_0\|F_f^{-1}\|}, \tag{3.12}$$

$$\|\dot{u}_f^\alpha(x)\| \le (\mu_0+\mu_1)\sqrt{a_0} + \mu_2\Big(\mu_3 a_0^{\frac{s_1}{2}} + \mu_4 a_0^{\frac{s_2+s_3}{2}} + \mu_5 a_0^{\frac{s_4}{2}}\Big). \tag{3.13}$$

Выберем число a_0, удовлетворяющее неравенствам

$$0 < a_0 \le \frac{d_0^2}{2\|M^{-1}P_0\|^2\|F_f^{-1}\|},$$

$$(\mu_0+\mu_1)\sqrt{a_0} + \mu_2\Big(\mu_3 a_0^{\frac{s_1}{2}} + \mu_4 a_0^{\frac{s_2+s_3}{2}} + \mu_5 a_0^{\frac{s_4}{2}}\Big) \le d_1.$$

Тогда из (3.12), (3.13) получаем

$$\|u_f^\alpha(x)\| \le d_0, \quad \|\dot{u}_f^\alpha(x)\| \le d_1, \quad x \in \{x : \Theta(x) \le 1\} \setminus \{0\}. \tag{3.14}$$

Для этого числа a_0 пусть положительная константа c_α такова, что при $0 < \Theta \le c_\alpha$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \beta_\alpha(\Theta) \equiv \lambda_{\min}^\alpha &- 2\Theta^{\frac{1}{\alpha}}\|F_f B_0 B_0^* \widetilde{A}\|\|(F_f^\alpha)^{-1}\| \\ &- \sqrt{2/\|F_f^{-1}\|}\|F_f\|\|(F_f^\alpha)^{-1}\|\|L\| \\ \times \Big(\mu_3 a_0^{\frac{s_1-1}{2}}\Theta^{\nu_1(\alpha)} &+ \mu_4 a_0^{\frac{s_2+s_3-1}{2}}\Theta^{\nu_2(\alpha)} + \mu_5 a_0^{\frac{s_4-1}{2}}\Theta^{\nu_3(\alpha)}\Big) > 0. \end{aligned}$$

Положим $\widetilde{c}_\alpha = \min\{c_\alpha, 1\}$ и рассмотрим область $\widetilde{\mathrm{Q}}_\alpha = \{x : \Theta_\alpha(x) \le \widetilde{c}_\alpha\}$, для которой, очевидно, справедливо включение $\widetilde{\mathrm{Q}}_\alpha \subset \{x : \Theta_\alpha(x) \le 1\}$. Положим $\widetilde{\beta}_\alpha = \beta_\alpha(\widetilde{c}_\alpha)$, тогда из неравенства (3.11) вытекает, что

$$\dot{\Theta}_\alpha(x) \le -\widetilde{\beta}_\alpha \Theta_\alpha^{1-\frac{1}{\alpha}}(x), \quad x \in \widetilde{\mathrm{Q}}_\alpha,$$

и, как следует из (3.14), управление $u^\alpha(x)$ удовлетворяет в области $\widetilde{\mathrm{Q}}_\alpha \setminus \{0\}$ заданным ограничениям. В силу [4, теоремы 1] следует утверждение данной теоремы. □

Литература

[1] В. И. Коробов, Г. М. Скляр, *Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума* // Дифференциальные уравнения, **26** (1990), N 11, 1914–1924.

[2] В. И. Коробов, В. А. Скорик, *Позиционный синтез ограниченных инерционных управлений для систем с одномерным управлением* // Дифференциальные уравнения, **38** (2002), N 3, 319–331.

[3] V. I. Korobov, V. O. Skoryk, *Synthesis of restricted inertial controls for systems with multivariate control* // J. Math. Anal. Appl. (USA), **275**, N 1, 84–107.

[4] В. И. Коробов, *Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости* // Математический сборник, **109(151)** (1979), N 4(8), 582–606.

[5] В. И. Коробов, *Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости* // Доклады АН СССР, **248** (1979), N 5, 1051–1055.

Сведения об авторах

Валерий Иванович Коробов

Uniwersytet Szczecinski,
Instytut Matematyki,
ul. Wielkopolska, 15, Szczecin,
Poland
Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4,
61077, Харьков,
Украина
E-Mail: `korobow@sus.univ.szczecin.pl`,
`vkorobov@univer.kharkov.ua`

Василий Александрович Скорик

Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4,
61077, Харьков,
Украина
E-Mail: `skoryk@univer.kharkov.ua`