Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 3, 315 – 330

Неравенство Адамара и наилучшее приближение функций, аналитических в единичном круге

Михаил З. Двейрин

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В статье рассматриваются линейные нормированные пространства функций, определенных в единичном круге, с нормой, удовлетворяющей условию инвариантности относительно поворота аргумента. Для таких пространств при естественных условиях на рассматриваемые функции получены обобщения теоремы Адамара о трех окружностях, неравенства Бернштейна и некоторые неравенства для наилучших приближений с точными постоянными.

2000 MSC. 30E10, 41A17, 41A65, 41A50.

Ключевые слова и фразы. Приближение в линейных нормированных пространствах, наилучшее приближение в единичном круге, точные неравенства для наилучшего приближения, теорема Адамара о трех окружностях.

1. Введение

Рассмотрим линейное нормированное пространство X, образованное функциями, определенными в $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ и имеющими конечную норму $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$. Будем считать, что $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ помимо обычных свойств нормы удовлетворяет также условию

$$\|f(ze^{it})\|_{\mathbb{D}} \equiv \|f(z)\|_{\mathbb{D}} \tag{1.1}$$

для $t \in \mathbb{R}$ и $f \in X$.

Этому требованию удовлетворяет норма в целом ряде функциональных пространств, являющихся объектом многочисленных исследований. Приведем некоторые из них:

Статья поступила в редакцию 11.08.2006

ISSN 1810 – 3200.

1) пространство B функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ и непрерывных на его замыкании $\overline{\mathbb{D}}$ с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)| < \infty;$$

2) пространства Харди H_p функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ при $p \geq 1$ с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \sup_{0<r<1} M_p\,(f,r), \qquad M_p\,(f,r) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in [1;\infty);$$

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|, \qquad p = \infty;$$

3) пространства Бергмана H'_p функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ при $p \in [1;\infty)$ с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{z\in\mathbb{D}} |f(x+iy)|^p\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}};$$

4) пространства $\mathcal{B}_p,\ p \in (0;1)$ функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \int_0^1\int_0^{2\pi} (1-r)^{\frac{1}{p}-2}|f(re^{it})|^p\,dt\,dr,$$

введенные Ромбергом, Дюреном и Шилдсом [1];

5) пространства $\mathcal{B}_{p,\,q,\,\lambda},\ 0 < p < q \leq \infty,\ \min(\lambda, q) \geq 1,$ функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \left\{\int_0^1 (1-r)^{\lambda\,pq\,(q-p)^{-1}} M_p^{\lambda}(f,r)\,dr\right\}^{\frac{1}{\lambda}}, \qquad \lambda < \infty,$$

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \sup_{0<r<1}\left\{(1-r)^{\lambda\,p\,q\,(q-p)^{-1}} M_p\,(f,r)\right\}, \qquad \lambda = \infty,$$

введенные в работе [2];

6) пространства $\mathcal{A}_p^s(\mathbb{D})$ функций, аналитических в $\mathbb{D}$, введенные Е. М. Дынькиным [3] и являющиеся аналогами классов О. В. Бесова $\mathcal{B}_p^s[-1;\ 1],\ BMOA$ [14] и другие.

Обозначим $E_n(f)_{\mathbb{D}} \equiv E_n(f,\, L_n)_{\mathbb{D}}$ наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами линейного подпространства L_n:

$$E_n(f)_{\mathbb{D}} := \inf_{p \in L_n} \|f - p\|_{\mathbb{D}}.$$

В качестве аппроксимирующего подпространства L_n мы будем преимущественно рассматривать совокупность $\mathcal{P}_n$ алгебраических полиномов комплексной переменной степени не выше $(n-1)$ или линейное пространство $\mathcal{H}_n$, образованное действительными частями полиномов из $\mathcal{P}_n$.

Нахождение точных значений $E_n(f)_{\mathbb{D}}$ и наилучших аппроксимирующих полиномов для индивидуальных функций представляет трудную задачу. В настоящее время известно сравнительно немного примеров точного вычисления или точных неравенств для $E_n(f)_{\mathbb{D}}$ (см., например, [4–8]). При этом зачастую аналогичные факты устанавливают отдельно для различных пространств аналитических функций. В настоящей работе предпринята попытка некоторой систематизации, состоящая в рассмотрении задач наилучшей аппроксимации аналитических функций в линейном нормированном пространстве X с нормой, удовлетворяющей условию (1.1). Это позволило распространить некоторые результаты, уже известные для отдельных из вышеприведенных функциональных пространств, на широкую совокупность пространств, включающую случаи 1)–6). Примененный подход позволил также охватить случай аппроксимации гармонических в $\mathbb{D}$ функций при тех же требованиях к норме, в которой осуществляется аппроксимация.

Для функции $f \in X$ положим $f_\zeta(z) := f(z\zeta)$ и введем семейство норм $\|f(\cdot)\|_{\mathbb{D}_r}$ для $r \in (0;1)$ соотношением

$$\|f\|_{\mathbb{D}_r} := \|f_r\|_{\mathbb{D}}.$$

Всюду в статье, специально не оговаривая, будем считать, что $\|f\|_{\mathbb{D}}$ удовлетворяет условию (1.1).

2. Формулировка результатов

Лемма 2.1. *Пусть функция $f \in X$ аналитическая или гармоническая в $\mathbb{D}$. Тогда $\|f\|_{\mathbb{D}_r}$ есть неубывающая функция от $r \in (0;1]$.*

Теорема 2.1. *Пусть $f \in X$ аналитическая или гармоническая в $\mathbb{D}$, r_1, r, r_2 — произвольные числа, для которых $0 < r_1 < r < r_2 \le 1$. Тогда*

$$\|f\|_{\mathbb{D}_r} \le \|f\|^{\alpha_1}_{\mathbb{D}_{r_1}} \|f\|^{\alpha_2}_{\mathbb{D}_{r_2}}, \tag{2.1}$$

где здесь и далее в статье

$$\alpha_1 = \frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1}, \qquad \alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}.$$

В случае, когда f аналитическая и $\|f\|_{\mathbb{D}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$, теорема 2.1 превращается в теорему Адамара о трех окружностях [9]. При

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \ge 1$$

получаем ее распространение на пространство H_p, принадлежащее Г. Харди (историю вопроса и известные результаты можно найти в [9, 10]). Из теоремы 2.1 следует справедливость теоремы Адамара о трех окружностях в виде (2.1) в пространствах H'_p, $\mathcal{B}_{p,q,\lambda}$, $\mathcal{A}_p^s(\mathbb{D})$ и многих других.

Теорема 2.2. *Пусть* $f \in X$ *аналитична в* $\mathbb{D}$, $\mathcal{P}_n \subset X$, r_1, r, r_2 *— произвольные числа, для которых* $0 < r_1 < r < r_2 \le 1$. *Тогда для* $E_n(f)_{\mathbb{D}_r} \equiv E_n(f, \mathcal{P}_n)_{\mathbb{D}_r}$ *справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{\mathbb{D}_r} \le E_n^{\alpha_1}(f)_{\mathbb{D}_{r_1}} \, E_n^{\alpha_2}(f)_{\mathbb{D}_{r_2}}. \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) *является точным в том смысле, что оно обращается в равенство для функций* $f(z) = z^{n_0}$ *с* $n_0 \ge n$.

Утверждение теоремы 2.2 является аналогом неравенства Адамара для наилучших приближений. Впервые неравенство вида (2.2) получено в работе С. Б. Вакарчука [4], в которой рассмотрен случай пространств H_p с $p \ge 1$.

Теорема 2.2′. *Пусть* $U \in X$ *гармоническая в* $\mathbb{D}$ *и* $\mathcal{H}_n \subset X$, r_1, r, r_2 *— произвольные числа, для которых* $0 < r_1 < r < r_2 \le 1$. *Тогда для* $E_n(U)_{\mathbb{D}_r} \equiv E_n(U, \mathcal{H}_n)_{\mathbb{D}_r}$ *справедливо неравенство*

$$E_n(U)_{\mathbb{D}_r} \le E_n^{\alpha_1}(U)_{\mathbb{D}_{r_1}} \, E_n^{\alpha_2}(U)_{\mathbb{D}_{r_2}}. \tag{2.3}$$

Неравенство (2.3) *обращается в равенство для функций* $U(z) = \Im z^{n_0}$ *с* $n_0 \ge n$.

Другую оценку роста $E_n(f)_{\mathbb{D}_r}$ дают следующие две теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть* $f \in X$ *аналитична в* $\mathbb{D}$, $\mathcal{P}_n \subset X$, $0 < r < \rho \le 1$. *Тогда*

$$E_n(f)_{\mathbb{D}_r} \le \frac{r^n}{\rho^n} \, E_n(f)_{\mathbb{D}_\rho}. \tag{2.4}$$

Теорема 2.4. *Пусть $U(z)$ гармонична в $\mathbb{D}$, $\mathcal{H}_n \subset X$, $0 < r < \rho \le 1$. Тогда*

$$E_n(U)_{\mathbb{D}_r} \le \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^n}{\rho^n}\, E_n(U)_{\mathbb{D}_\rho}. \tag{2.5}$$

Заметим, что теорема 2.3 является точной в том смысле, что неравенство (2.4) обращается в равенство для функции $f(z) = z^n$ при любом выборе нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$, удовлетворяющей условию (1.1). Теорема 2.4 в этом смысле не является точной, т.к. в неравенстве $E_n(U)_{\mathbb{D}_r} \le C(r\rho^{-1})E_n(U)_{\mathbb{D}_\rho}$ наименьшее возможное значение постоянной (не зависящей от n и U) $C(r\rho^{-1})$ зависит от выбора нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$. Действительно, из теоремы 2.4 следует, что при любом выборе $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ $C(r\rho^{-1}) \le \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(r\rho^{-1})^n$. В случае, когда $\|U\|_{\mathbb{D}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |U(z)|$, для функции

$$U(z) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, \Re\, z^{(2k+1)n}$$

неравенство (2.5) обращается в равенство и в этом смысле оно точное. Пример функции $U(z) = \Re z^n$ показывает, что при любом выборе $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ $C(r\rho^{-1}) \ge r^n\rho^{-n}$. Нетрудно видеть, что для

$$\|U(z)\|_{\mathbb{D}} = \sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |U(re^{it})|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad C(r\rho^{-1}) = r^n\rho^{-n}.$$

Таким образом, наименьшее значение $C(r\rho^{-1})$ в теореме 2.4 заключено в пределах

$$(r\rho^{-1})^n \le C(r\rho^{-1}) \le \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(r\rho^{-1})^n$$

и определяется выбором нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$.

Теорема 2.5. *Пусть $n_0, n_1, \ldots, n_k$ — попарно разные целые неотрицательные числа, $\varphi_0(|z|), \varphi_1(|z|), \ldots, \varphi_k(|z|)$ — радиальные функции, такие, что $\varphi_i(|z|)z^{n_i} \in X$, $i = \overline{0;k}$. Тогда*

$$\inf_{\{c_i\}} \|\varphi_0(|z|)z^{n_0} - \sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i(|z|)z^{n_i}\|_{\mathbb{D}_r} = \|\varphi_0(|z|)z^{n_0}\|_{\mathbb{D}_r}, \qquad r \in (0;1],$$

где inf *взят по множеству всех наборов комплексных чисел.*

Замечание 2.1. Если, в частности, в теореме 2.5 взять

$$\varphi_i(|z|) \equiv 1, \qquad i = \overline{1,k}, \qquad \|f(z)\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|,$$

получим утверждение теоремы 2 из работы Вейса и Ривлина [11]. Полагая далее $f_0(|z|) = |z|^{2l}$, мы получим точное значение наилучшего полиномиального приближения для $z^m\overline{z}^l$ при $m \geq l$ и наилучший аппроксимирующий полином.

Теорема 2.5$'$. *Пусть $n_0, n_1, \dots, n_k$ — попарно различные целые неотрицательные числа, $\{\varphi_i(|z|)\}_{i=0}^k$, $\{\psi_i(|z|)\}_{i=0}^k$ функции, определенные на $[0;1)$ и такие, что*

$$\varphi_i(|z|)\Re z^{n_i} \in X, \qquad \psi_i(|z|)\Im z^{n_i} \in X, \qquad i = \overline{0,k}.$$

Тогда

$$\inf_{\{a_i\},\{b_i\}} \Bigg\| \varphi_0(|z|)\Re z^{n_0} + \psi_0(|z|)\Im z^{n_0} - \sum_{i=1}^{k} (a_i\varphi_i(|z|)\Re z^{n_i} + b_i\psi_i(|z|)\Im z^{n_i}) \Bigg\|_{\mathbb{D}_r} = \|\varphi_0(|z|)\ \Re z^{n_0} + \psi_0(|z|)\Im\ z^{n_0}\|_{\mathbb{D}_r}.$$

Утверждения типа теорем 2.5 и 2.5$'$ обобщают известные факты [12, гл. 5] о том, что функции z^n и $\cos nx$ не аппроксимируются полиномами в равномерной норме. Они часто бывают полезны, и на них, в частности, основывается оценка снизу тригонометрических поперечников компактных классов функций, аналитических в единичном круге (см., например, [6, 13]).

Следующие теоремы помогают находить наилучшие аппроксимирующие полиномы в специальных случаях.

Теорема 2.6. *Пусть $f \in X$ аналитична в $\mathbb{D}$, $\mathcal{P}_n \subset X$ и $f(ze^{\frac{2\pi}{n}i}) \equiv f(z)$. Тогда $E_n(f, \mathcal{P}_n)_{\mathbb{D}_r} = \inf_{c\in\mathbb{C}} \|f(z) - c\|_{\mathbb{D}_r}$.*

Теорема 2.6$'$. *Пусть $U \in X$ гармоническая в $\mathbb{D}$, $\mathcal{H}_n \subset X$ и $U(ze^{\frac{2\pi}{n}i}) \equiv U(z)$. Тогда $E_n(U, \mathcal{H}_n)_{\mathbb{D}_r} = \inf_{c\in\mathbb{C}} \|U(z) - c\|_{\mathbb{D}_r}$.*

Теорема 2.7. *Пусть $f \in X$ аналитична в $\mathbb{D}$, $\mathcal{P}_n \subset X$ и f представима в $\mathbb{D}$ степенным рядом*

$$f(z) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{m_j}, \qquad (a_j \neq 0,\ m_j \in \mathbb{N}), \tag{2.6}$$

где $S_{n-1}(f, z)$ — частная сумма ряда порядка $(n-1)$. Если $m_{j+1} \vdots\, m_j$, $j \geq 1$, то при $r \in (0;1]$

$$E_n(f)_{\mathbb{D}_r} = \inf_{c\in\mathbb{C}} \|f(z) - S_{n-1}(f, z) - c\|_{\mathbb{D}_r}.$$

Теорема 2.7$'$. *Пусть $U \in X$ гармоническая в $\mathbb{D}$, $\mathcal{H}_n \subset X$ и U представима в $\mathbb{D}$ рядом вида*

$$U(z) = \Re\biggl(a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{m_j}\biggr), \qquad (a_j \neq 0,\ m_j \in \mathbb{N})$$

$S_{n-1}(U,z)$ — его частная сумма порядка $(n-1)$. Если $m_{j+1} \vdots\, m_j$, $j \geq 1$, то при $r \in (0;1]$

$$E_n(U)_{\mathbb{D}_r} = \inf_{c \in R} \|U(z) - S_{n-1}(U,z) - c\|_{\mathbb{D}_r}.$$

В частном случае пространств с равномерной нормой условия теорем 2.7 и 2.7$'$ можно существенно ослабить (см. [11]). В пространстве периодических функций с интегральной нормой утверждение, аналогичное теореме 2.7$'$, получено ранее (см. [19]; там же имеются ссылки на предшествующие работы).

К вопросу о точных неравенствах для наилучших приближений тесно примыкает неравенство Бернштейна, находящее широкие применения в теории аппроксимации и в теории функций в целом. Мы приведем его обобщение на пространства аналитических в $\mathbb{D}$ функций с нормами $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$, удовлетворяющими (1.1).

Теорема 2.8. *Пусть $P_n(z)$ — алгебраический полином степени не выше n. Тогда*

$$\|zP_n'(z)\|_{\mathbb{D}_r} \leq n\|P_n(z)\|_{\mathbb{D}_r}.$$

Неравенство, приведенное в теореме 2.8, отличается от классического неравенства Бернштейна множителем z в левой части. Пример $f(z) = z$, $\|f(z)\| := \max_{|z|\leq\frac{1}{2}} |f(z)|$ показывает, что без этого множителя неравенство, вообще говоря, неверно. В то же время в классических пространствах B или H_p этот множитель несущественен и утверждение теоремы 2.8 равносильно обычному неравенству Бернштейна.

3. Доказательства

Утверждение леммы 2.1 является следствием общего факта, справедливого для операторов, перестановочных с оператором поворота (см. [18, теорема 1.8.1]). Для полноты изложения приведем элементарное доказательство леммы. Из представления

$$f(rz) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\frac{r}{\rho}} f\Bigl(\frac{rz}{\zeta}\Bigr)\biggl(1 + 2\Re\sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k\biggr)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

справедливого при $|z| < 1,\ 0 \le r \le \rho < 1$ и проверяемого почленным интегрированием, имеем $\|f\|_{\mathbb{D}_r} \le \|f\|_{\mathbb{D}_\rho}$ для любых $0 \le r \le \rho < 1$ ввиду неотрицательности ядра Пуассона

$$\frac{1}{2} + \Re \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k$$

в $\mathbb{D}$ и свойства (1.1) нормы. Для гармонических функций доказательство аналогичное.

Доказательство теоремы 2.2. Заметим вначале, что при $|\zeta| = r$

$$E_n(f)_{\mathbb{D}_r} = E_n(f_\zeta)_{\mathbb{D}} = E_n(f_r)_{\mathbb{D}}.$$

Как следует из соображений двойственности ([19, гл. 4 лемма 1.1], см. также [15])

$$E_n(f)_{\mathbb{D}} = \sup_{\Lambda} |\langle \Lambda, f \rangle|,$$

где точная верхняя грань здесь и далее в доказательстве теоремы берется по всем линейным функционалам Λ из единичного шара сопряженного пространства, равным нулю на полиномах степени не выше $(n-1)$.

Положим $g(\zeta) := \langle \Lambda, f_\zeta \rangle$; нетрудно видеть, что $g(\zeta)$ аналитична в $\mathbb{D}$. Далее, при $|\zeta| = r$ и $r_2 < 1$

$$\begin{aligned}
E_n(f)_{\mathbb{D}_r} &= \sup_{|\zeta|=r} E_n(f_\zeta)_{\mathbb{D}} = \sup_{|\zeta|=r} \sup_{\Lambda} |\langle \Lambda, f_\zeta \rangle| = \sup_{\Lambda} \sup_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| \\
&\le \sup_{\Lambda} \Big(\sup_{|\zeta|=r_1} |g(\zeta)| \Big)^{\alpha_1} \Big(\sup_{|\zeta|=r_2} |g(\zeta)| \Big)^{\alpha_2} \\
&\le \sup_{\Lambda} \Big(\sup_{|\zeta|=r_1} |g(\zeta)| \Big)^{\alpha_1} \sup_{\Lambda} \Big(\sup_{|\zeta|=r_2} |g(\zeta)| \Big)^{\alpha_2} \\
&= \sup_{|\zeta|=r_1} \Big(\sup_{\Lambda} |g(\zeta)| \Big)^{\alpha_1} \sup_{|\zeta|=r_2} \Big(\sup_{\Lambda} |g(\zeta)| \Big)^{\alpha_2} = E_n^{\alpha_1}(f)_{\mathbb{D}_{r_1}} E_n^{\alpha_2}(f)_{\mathbb{D}_{r_2}}.
\end{aligned}$$

Оценка для $\sup_{|\zeta|=r} |g(\zeta)|$, примененная здесь, следует из неравенства Адамара. Случай $r_2 = 1$ получаем предельным переходом с использованием леммы 2.1.

Покажем, что для функций $f(z) = z^{n_0}$ с $n_0 \ge n$ неравенство (2.2) превращается в равенство. Действительно, как показано в лемме 3 (см. [6]), при $\rho \le 1$ $E_n(z^{n_0})_{\mathbb{D}_\rho} = \|z^{n_0}\|_{\mathbb{D}_\rho}$. Так как при $\rho \in (0;1]$

$$\|z^{n_0}\|_{\mathbb{D}_\rho} = \rho^{n_0} \|z^{n_0}\|_{\mathbb{D}},$$

то

$$E_n^{\alpha_1}(z^{n_0})_{\mathbb{D}_{r_1}}\, E_n^{\alpha_2}(z^{n_0})_{\mathbb{D}_{r_2}} = r_1^{\alpha_1 n_0}\, r_2^{\alpha_2 n_0}\, \|z^{n_0}\|_{\mathbb{D}}^{\alpha_1+\alpha_2}$$
$$= e^{n_0(\alpha_1 \ln r_1 + \alpha_2 \ln r_2)} \|z^{n_0}\|_{\mathbb{D}} = e^{n_0 \ln r}\, \|z^{n_0}\|_{\mathbb{D}} = E_n(z^{n_0})_{\mathbb{D}_r}.$$

□

Неравенство (2.3) в теореме 2.2′ и его точность доказываются аналогично с использованием следующей леммы.

Лемма 3.1. *Для функции* $U^*(z) = \Im z^{n_0}$ *при* $n \le n_0$

$$E_n(U^*, \mathcal{H}_n)_{\mathbb{D}_r} = \|U^*\|_{\mathbb{D}_r}.$$

Доказательство. Ввиду конечномерности задачи полином наилучшего приближения порядка не выше $(n-1)$ в круге $\mathbb{D}_r$ очевидно существует. Обозначим его

$$T_{n-1}(z) = \Re\biggl(\sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k\biggr).$$

Тогда

$$E_n(U^*)_{\mathbb{D}_r} \le \biggl\| \frac{1}{n_0} \sum_{m=0}^{n_0-1} \bigl[U^*\bigl(ze^{\frac{2\pi m}{n_0} i}\bigr) - T_{n-1}\bigl(ze^{\frac{2\pi m}{n_0} i}\bigr)\bigr] \biggr\|_{\mathbb{D}_r} \le E_n(U^*)_{\mathbb{D}_r}.$$

Это показывает, что полином

$$\widetilde{T}_{n-1}(z) = \frac{1}{n_0} \sum_{m=0}^{n_0-1} T_{n-1}\bigl(ze^{\frac{2\pi m}{n_0} i}\bigr)$$

также является полиномом наилучшего приближения в $\mathbb{D}_r$. Убедимся, что $\widetilde{T}_{n-1}(z)$ тождественная постоянная.

$$\widetilde{T}_{n-1}(z) = \frac{1}{n_0} \sum_{m=0}^{n_0-1} \Re\biggl(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \bigl(ze^{\frac{2\pi m}{n_0} i}\bigr)^k\biggr)$$
$$= \frac{1}{n_0} \Re\biggl(\sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \sum_{m=0}^{n_0-1} \bigl(e^{\frac{2\pi m}{n_0} i}\bigr)^k\biggr) = \Re c_0 \equiv \mathrm{Const}$$

ввиду того, что

$$\sum_{m=0}^{p} \bigl(e^{\frac{2\pi m}{p} i}\bigr)^k = \begin{cases} 0, & k \text{ не кратно } p, \\ p, & k \text{ кратно } p. \end{cases}$$

Из нечетности по x функции $U^*(z) = \rho^n \sin x$ следует, что $\widetilde{T}_{n-1}(z) \equiv \Re c_0 \equiv 0$. □

Теорема 2.1 получается из теорем 2.2 и 2.2′ при $n = 0$.

Замечание 3.1. Справедливо также обобщение другого варианта теоремы Адамара — известной теоремы о трех прямых (см., например, [10]). Действительно, пусть X линейное нормированное пространство, образованное функциями, определенными в верхней полуплоскости $\mathcal{H} := \{z : \Im z > 0\}$ и имеющими конечную норму $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Будем считать, что $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ помимо обычных свойств нормы удовлетворяет также условию

$$\|f(z + x)\|_{\mathcal{H}} \equiv \|f(z)\|_{\mathcal{H}} \tag{3.1}$$

для $x \in \mathbb{R}$ и $f \in X$. Для $f \in X$ положим $f_\zeta(z) := f(z + \zeta)$ и введем семейство норм $\|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_y}$ для $y > 0$ соотношением

$$\|f\|_{\mathcal{H}_y} := \|f_y\|_{\mathcal{H}}.$$

Считая $n = 0$ и повторяя доказательство теоремы 2.2, получим следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in X$ аналитическая или гармоническая в $\mathcal{H}$, y_1, y, y_2 — произвольные числа, для которых $0 \le y_1 < y < y_2$. Тогда*

$$\|f\|_{\mathcal{H}_y} \le \|f\|^{\alpha_1}_{\mathcal{H}_{y_1}} \|f\|^{\alpha_2}_{\mathcal{H}_{y_2}}, \tag{3.2}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}, \qquad \alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Справедлив также аналог леммы 2.1, а именно $\|f\|_{\mathcal{H}_y}$ является невозрастающей функцией от y при $y \ge 0$.

Теорема 2.3 является частным случаем теоремы 2 из [6].

Доказательство теоремы 2.4. Пусть $U(z)$ — гармоническая в $\mathbb{D}$ и $T^*_{n-1}(z)$ — полином наилучшего приближения для $U(z)$ в круге $\mathbb{D}_\rho$ при некотором $\rho,\ \rho \in (0;1)$. Выберем произвольно $r \in (0;\rho)$. Справедливо представление, проверяемое почленным интегрированием

$$\begin{aligned} U(rz) - T_{n-1}(rz) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = \frac{r}{\rho}} \left[U\Big(\frac{rz}{\zeta}\Big) - T^*_{n-1}\Big(\frac{rz}{\zeta}\Big)\right](\zeta^n + \overline{\zeta}^{\,n}) \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2(1 + |\zeta|^{2n})} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + |\zeta|^{2n}}(\zeta^k + \overline{\zeta}^{\,k})\right]\frac{d\zeta}{\zeta}, \end{aligned}$$

где T_{n-1} — некоторый гармонический полином порядка не выше $(n-1)$. Отсюда получаем

$$E_n(U)_{\mathbb{D}_r} \le E_n(U)_{\mathbb{D}_\rho}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(\frac{r}{\rho},x)\cos nx|\,dx, \tag{3.3}$$

где

$$\varphi(t,x)=\frac{t^n}{2(1+t^{2n})}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k+n}}{1+t^{2n}}\cos kx.$$

Поскольку последовательность коэффициентов Фурье $\varphi(t,\cdot)$ убывает к нулю и выпукла, то согласно [17, с. 294] $\varphi(t,x)\ge 0$. Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(t,x)\cos nx|\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{sign}\cos nx\;\varphi(t,x)\cos nx\,dx.$$

Подставляя сюда разложение $\operatorname{sign}\cos nx$ в ряд Фурье

$$\operatorname{sign}\cos nx \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\cos(2k+1)nx}{2k+1}$$

и вычисляя интеграл, получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(t,x)\cos nx|\,dx=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{(2k+1)n}}{2k+1}=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}t^n. \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) получаем утверждение теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 2.5. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\|\varphi_i(|z|)z^{n_i}\|_{\mathbb{D}_r}\ne 0,\ i=\overline{0,k}$. Рассмотрим в $(k+1)$ - мерном пространстве линейных комбинаций

$$P(z)=\sum_{i=0}^{k}c_i\varphi_i(|z|)z^{n_i}$$

с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{D}_r}$ линейный оператор

$$U(P)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P(ze^{it})e^{-in_0t}\,dt.$$

Очевидно, что

$$U: X\to X;\qquad U(\varphi_i(|z|)z^{n_i})=0,\qquad i=\overline{1,k};$$

$$U(\varphi_0(|z|)z^{n_0}) = \varphi_0(|z|)z^{n_0}; \qquad \|U\| = 1\,.$$

Согласно теореме Хана–Банаха, существует линейный функционал $I \in X^*$ со свойствами

$$I(\varphi_0(|z|)z^{n_0}) = \|\varphi_0(|z|)z^{n_0}\|_{\mathbb{D}_r}, \qquad \|I\| = 1.$$

Согласно теореме В. Н. Никольского [16], для справедливости леммы достаточно установить существование линейного функционала $\widetilde{I}(f)$, определенного на X и такого, что

$$\begin{gathered} \|\widetilde{I}\| = 1; \quad I(\varphi_i(|z|)z^{n_i}) = 0, \quad i = \overline{1,k}; \\ |\widetilde{I}(\varphi_0(|z|)z^{n_0})| = \|\varphi_0(|z|)z^{n_0}\|_{\mathbb{D}_r}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Поскольку функционал $I \circ U$ определен на X и удовлетворяет требованиям 3.5, то теорема доказана. □

Доказательство теоремы $2.5'$ идентично предыдущему, нужно только соответствующим образом изменить оператор U.

Доказательство теоремы 2.6. Пусть

$$P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$$

полином наилучшего приближения для $f(z)$. Рассуждая как при доказательстве леммы 2.2, получим, что полином

$$\widetilde{P}_{n-1}(z) = \frac{1}{n_0} \sum_{m=0}^{n_0-1} P_{n-1}\big(ze^{\frac{2\pi m}{n_0}i}\big) \equiv c_0$$

также является полиномом наилучшей аппроксимации для $f(z)$, что и доказывает теорему. □

Теорема $2.6'$ доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 2.7. Положим $m_0 = 0$ и выберем $p \in \mathbb{N}$ так, чтобы $m_p \le n-1 < m_{p+1}$. Тогда

$$g_n(z) := f(z) - S_{n-1}(f,z) = \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j z^{m_j}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что полином наилучшего приближения функции g_n в $\mathbb{D}_r$ есть постоянная. А это следует из того, что $g_n(e^{ik\alpha}z) \equiv g_n(z)$ при $\alpha = \frac{2\pi}{m_{p+1}}$ и $k = \overline{0, m_{p+1}-1}$, а также теоремы 2.6. □

Замечание 3.2. Если все числа $\frac{m_j}{m_{p+1}}$, $j > p+1$ нечетны, то inf, очевидно, достигается при $c = 0$.

Теорема $2.7'$ доказывается аналогично.

Для доказательства теоремы 2.8 предварительно докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 3.2. *Пусть* $\{b_k\}_{k=0}^n$ *последовательность комплексных чисел,*

$$I_n(z) = |b_n| + \sum_{k=0}^{n-1}\left(b_k e^{i(\beta+k\alpha)} z^{n-k} + \overline{b}_k e^{-i(\beta+k\alpha)} z^{k-n}\right),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $z_l = e^{\frac{\pi l}{n} i}$, $l = \overline{0, 2n-1}$. *Тогда для любого полинома*

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

справедливо тождество

$$\frac{1}{2n}\sum_{l=0}^{2n-1} I_n(z_l) z_l^{-n} P_n(z z_l) = a_n |b_n| z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k e^{i(\beta+k\alpha)} z^k. \tag{3.6}$$

Доказательство.

$$\frac{1}{2n}\sum_{l=0}^{2n-1} I_n(z_l) z_l^{-n} \sum_{m=0}^{n} a_m z^m z_l^m = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m \frac{1}{2n}\sum_{l=0}^{2n-1} I_n(z_l) z_l^{m-n}$$
$$= \sum_{m=0}^{n} a_m z^m \frac{1}{2n}\sum_{l=0}^{2n-1}\Bigg(|b_n| z_l^{m-n} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k e^{i(\beta+k\alpha)} z_l^{m-k}$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\overline{b}_k e^{-i(\beta+k\alpha)} z_l^{k+m-2n}\Bigg) = a_n|b_n| z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k e^{i(\beta+k\alpha)} z^k,$$

поскольку

$$\sum_{l=0}^{2n-1} z_l^k = \begin{cases} 0, & l \text{ не кратно } 2n, \\ 2n, & l \text{ кратно } 2n. \end{cases}$$

$\square$

Лемма 3.3. *Если в условиях леммы* 3.2 $\beta = -\arg b_n$ *и существует* α *такое, что* $I_n(z_l) \geq 0$, $l = \overline{0, 2n-1}$, *то*

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k\right\|_{\mathbb{D}_r} \leq |b_n| \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right\|_{\mathbb{D}_r}.$$

Неравенство обращается в равенство для $f(z) = z^n$.

Доказательство. Предварительно заметим, что ввиду свойства (1.1) нормы

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k\Big\|_{\mathbb{D}_r} = \Big\|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k e^{i(\beta+k\alpha)} z^k\Big\|_{\mathbb{D}_r}$$
$$= \Big\| a_n|b_n|z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k e^{i(\beta+k\alpha)} z^k\Big\|_{\mathbb{D}_r}.$$

С учетом этого, из представления (3.6) получаем

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k\Big\|_{\mathbb{D}_r} \le \|P_n(z)\|_{\mathbb{D}_r} \frac{1}{2n} \sum_{l=0}^{2n-1} |I_n(z_l) z_l^{-n}|$$
$$= \|P_n(z)\|_{\mathbb{D}_r} \frac{1}{2n} \sum_{l=0}^{2n-1} |I_n(z_l)| = |b_n|\, \|P_n(z)\|_{\mathbb{D}_r}.$$

□

Доказательство теоремы 2.8. Положим в лемме 3.3 $b_k = k,\ k = \overline{0,n},\ \alpha = \beta = 0$. Покажем, что в этом случае условие $I_n(z_l) \ge 0,\ l = \overline{0, 2n-1}$ выполнено.

$$I_n(e^{ix}) = n + 2\sum_{k=0}^{n-1} k\cos(n-k)x = n + 2\sum_{m=1}^{n-1} (n-m)\cos mx$$
$$= 2n\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} (1 - \frac{m}{n})\cos mx\right) \ge 0,$$

поскольку выражение в скобках представляет собой ядро Фейера. Применяя лемму 3.3, получим требуемое утверждение. □

Лемма 3.3 представляет собой обобщение неравенства Бернштейна в двух направлениях — на более широкий круг норм в пространстве полиномов и на некоторый класс операторов, подобных оператору дифференцирования. В подобной постановке обобщение неравенства Бернштейна для тригонометрических полиномов получено в [18, § 3.3].

Отметим простое достаточное условие, обеспечивающее неотрицательность $I_n(z_l)$. В распространенной ситуации, когда все b_k вещественны и неотрицательны, $I_n(e^{ix})$ принимает вид $I_n(e^{ix}) = b_n +$

$2\sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\cos kx$. Условие монотонного убывания и выпуклости последовательности

$$a_k := b_{n-k}, \quad k = \overline{0, n}, \qquad a_{n+1} = 0$$

обеспечивает неотрицательность $I_n(e^{ix})$ при $x \in [0; 2\pi]$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить признательность М. М. Маламуду и участникам его семинара за полезные обсуждения.

Литература

[1] P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields, *Linear functionals in H_p spaces with $0 < p < 1$* // J. reine und angew. Math., **238** (1969), 4–60.

[2] М. И. Гварадзе, *Об одном классе пространств аналитических функций* // Мат. заметки, **21** (1977), N 2, 141–150.

[3] Е. М. Дынькин, *Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова* // Труды мат. ин-та АН СССР, **155** (1981), 41–76.

[4] С. Б. Вакарчук, *Связь теоремы Адамара о трех кругах с некоторыми вопросами полиномиальной аппроксимации аналитических функций* // Укр. мат. журнал, **53** (2001), N 2, 250–254.

[5] Л. В. Тайков, *Поперечники некоторых классов аналитических функций* // Мат. заметки, **22** (1977), N 2, 285–295.

[6] М. З. Двейрин, И. В. Чебаненко, *О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций* // Теория отображений и приближение функций. Киев, Наукова думка, 1983, с. 63–73.

[7] С. Б. Вакарчук, *О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I* // Укр. мат. журнал, **42** (1990), N 7, 873–881.

[8] С. Б. Вакарчук, *О наилучшем полиномиальном приближении в некоторых банаховых пространствах аналитических в единичном круге функций* // Мат. заметки, **55** (1994), N 4, 6–14.

[9] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, т. 1, Москва: Мир, 1980, 304 с.

[10] E. Landau, D. Gajer, *Darstellung und Begrundung einiger neuerer Ergebnisse der Functionentheorie*. Berlin Heidelberg New-York: Springer, 1986, p. 201.

[11] T. J. Rivlin, B. Weiss, *Some best polynomial approximations in the plane* // Duke Math. J., **35** (1968), N 3, 475–482.

[12] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*. Москва: Наука, 1964, 440 с.

[13] С. Б. Вакарчук, *О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости* // Укр. мат. журнал, **56** (2004), N 9, 1155–1171.

[14] С. В. Шведенко, *Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге и шаре* // Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ, **23**, Москва, ВИНИТИ, (1985), 3–124.

[15] Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон, *Качественные свойства экстремальных задач некоторых типов* // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Москва: Физматгиз, 1960, с. 77–95.

[16] В. Н. Никольский, *Распространение теоремы А. Н. Колмогорова на банаховы пространства* // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Москва: Физматгиз, 1961, с. 335–337.

[17] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1. Москва: Мир, 1965, 616 с.

[18] Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*. Киев: Наук. думка, 1992, 304 с.

[19] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*. Москва: Мир, 1984, 469 с.

[20] А. И. Рубинштейн, *О наилучше сходящихся в* $L_p[0;2\pi]$ *рядах* // Мат. заметки, **52** (1992), N 6, 100–108.

Сведения об авторах

Михаил Захарович Двейрин

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
83055, Донецк
Украина
E-Mail: `Dvejrin@tcc-online.com`, `strannik35@telenet.dn.ua`