Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 2, 166 – 186

Управление накопительно-потребительским фондом с функциями страховой компании

Борис В. Бондарев и Артем В. Баев

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. Рассмотрена накопительно-потребительская модель компании, которая занимается инвестированием, как в безрисковые, так и в рисковые активы, и создаётся лишь на конкретный конечный срок. Величины выплат исков к компании пропорциональны имеющемуся капиталу компании, учитывается также потребление средств. Решается задача оптимального управления портфелем инвестора и потреблением. Найдены оптимальные управления, при которых предложенный функционал качества принимает наибольшее значение.

2000 MSC. 60H30, 60H10, 93E20, 62P05, 91B28.

Ключевые слова и фразы. Винеровский процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, пуассоновская мера, уравнение Беллмана, оптимальное управление.

1. Вступление

В работе рассмотрена одна модель накопительной системы с потреблением, которая занимается еще инвестированием, как в безрисковые, так и в рисковые активы, и обладает некоторыми функциями "страхования", а именно, в случайные моменты времени к компании может быть предъявлен "иск", величина которого случайна и определяется следующим образом: если управляющая величиной "иска" неотрицательная случайная величина η принимает значение x, $0 < x \leqslant \beta < 1$, а капитал компании на данный момент времени $\xi(t)$, то компания выплачивает по "иску" сумму $x\xi(t)$; если случайная величина η принимает значение x, $\beta \leqslant\ x$, то компания выплачивает по "иску" сумму $\beta\xi(t)$. Таким образом, компания функционирует на BS-рынке. Некоторые аспекты, связанные с изучением функционирования страховой компании на BS-рынка в случае "классических"

Статья поступила в редакцию 10.03.2006

моделей, которые описывают эволюцию рискового актива, рассмотрены в [1]. Там же рассмотрены вопросы о вероятности разорения страховой компании, как при вложении только в безрисковые активы, так при смешанном вложении. В нашем случае учитывается потребление средств со скоростью $0 \leqslant u_1(t, \xi(t))$. В качестве функционала качества взят функционал Р. Мертона [2]

$$M \int\limits_0^T e^{-\rho s} \left[u_1(s, \xi(s))\right]^{\gamma} ds, \qquad 0 < \gamma < 1$$

$\rho > 0$ — коэффициент непрерывного дисконтирования. Р. Мертон, лауреат Нобелевской премии по экономике 1997 года, широко использовал этот функционал в своих работах. Найдены оптимальные управления потреблением и портфелем активов, при которых функционал качества принимает наибольшее значение.

2. Основная часть

Рассмотрим следующую модель накопления, потребления и “страхования”, являющуюся компиляцией в некотором смысле динамической модели “страхования” [3] и известной модели портфельного анализа Р. Мертона [2]. Как и в [2] будем предполагать, что цена рискового актива (акции) $S(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T$ описывается моделью П. Самуэльсона [4], т.е.

$$S(t) = S_0 \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W(t)\right\},$$

где $W(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T$ — стандартный винеровский процесс, откуда следует, что

$$dS(t) = S(t) \left[\mu dt + \sigma dW(t)\right],$$

а с точностью бесконечно малых высшего порядка имеем

$$S(t + \Delta t) \approx S(t) \left[1 + \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t)\right].$$

Предположим, что в момент времени t капитал страховой компании равен $\xi(t)$, часть средств $u\xi(t),\ 0 \leqslant u \leqslant 1$ выделяется на покупку акций, оставшаяся часть средств $(1 - u)\xi(t),\ 0 \leqslant u \leqslant 1$ ложится на банковский счёт под простую процентную ставку $r > 0$ (как и в [2] мы будем считать, что $\mu > r$). Будем также предполагать, что в момент времени $0 \leqslant t < T$ происходит потребление средств со скоростью $0 \leqslant u_1(t, \xi(t))$, суммарные выплаты страховой компании на промежутке времени от t до $t + \Delta t$ описываются величиной

$$\sum_{i=Z(t)+1}^{Z(t+\Delta t)} \xi(t)\chi(\eta_i, \beta),$$

где η_i — случайные величины, управляющие величинами выплат компании, независимые положительные одинаково распределенные. Пусть $M\eta_i = a$,

$$P(\eta_i < x) = F(x),$$

$Z(t)$ — процесс Пуассона, со средним λt, независящий от последовательности $\{\eta_i\}$,

$$\chi(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha, & 0 < \alpha \leqslant \beta < 1, \\ \beta, & \alpha \geqslant \beta. \end{cases}$$

Таким образом, если к компании в момент времени t предъявлен “иск” величины η, то компания выплачивает клиенту по “иску” величину $\eta\xi(t)$, если $0 < \eta \leqslant \beta < 1$ и $\beta\xi(t)$, если $\eta \geqslant \beta$.

Пусть $0 \leqslant u \leqslant 1$, класс $\Re$ допустимых скоростей потребления $u_1(t, x)$ состоит из функций

$$\Re = \Bigg\{ u_1(t,x) : u_1(t,0) \equiv 0,\ u_1(t,x) \geqslant 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times R,$$
$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant c(t) < +\infty \quad (t,x) \in [0,T) \times R,$$
$$\int_0^T [c(t)]^\gamma \, dt < +\infty, \quad 0 < \gamma < 1 \Bigg\}.$$

В данной работе поставлена следующая задача: найти такие управления $0 \leqslant u \leqslant 1$, $u_1(t, x) \in \Re$, которые максимизируют плату

$$M \int_0^T e^{-\rho s} \left[u_1(s, \xi(s))\right]^\gamma \, ds, \qquad 0 < \gamma < 1,$$

$\rho > 0$ — коэффициент непрерывного дисконтирования. Составим уравнение, описывающее эволюцию капитала компании. В момент времени t капитал компании равен $\xi(t)$, часть средств $u\xi(t)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ выделяется на покупку акций (остаток ложится на банковский счёт), цена акции на этот момент равна $S(t)$, стало быть на выделенную сумму мы купим $\frac{u\xi(t)}{S(t)}$ акций, каждая из которых к моменту времени $t+\Delta t$ будет стоить $S(t+\Delta t)$, то есть весь пакет акций будет стоить

$$\frac{u\xi(t)}{S(t)}S(t+\Delta t) = u\xi(t)\left[1+\mu\Delta t+\sigma\Delta W(t)\right],$$

к моменту времени $t+\Delta t$ на банковском счёте будет

$$(1-u)\xi(t)(1+r\Delta t)$$

На промежутке времени от t до $t+\Delta t$ потреблено средств страховой компании

$$u_1(t,\xi(t))\Delta t,$$

суммарные выплаты равны

$$\sum_{i=Z(t)+1}^{Z(t+\Delta t)} \xi(t)\chi(\eta_i,\beta).$$

В силу представления сложного пуассоновского процесса в виде стохастического интеграла по пуассоновской мере [3, 5] имеем

$$\sum_{i=z(t)}^{z(t+\Delta t)} \xi(t)\chi(\eta_i,\beta) \approx \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{0}^{+\infty} \xi(s)\chi(\alpha,\beta)\nu\left(d\alpha\,,ds\right).$$

Учитывая сказанное на момент времени $t+\Delta t$, будем иметь

$$\begin{aligned}\xi(t+\Delta t) = u\xi(t)(1+\mu\Delta t) + \sigma(W(t+\Delta t)-W(t))\\ + (1-u)\xi(t)(1+r\Delta t) - u_1(t,\xi(t))\Delta t\\ - \int\limits_{0}^{+\infty} \xi(t)\chi(\alpha,\beta)(\nu(d\alpha,t+\Delta t)-\nu(d\alpha,t)).\end{aligned}$$

Перейдем к дифференциалу, получим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}d\xi\left(t\right) = u\xi\left(t\right)\,\left(\mu dt+\sigma dW\left(t\right)\right) + \left(1-u\right)\xi\left(t\right)r\,dt\\ - u_1\left(t,\xi\left(t\right)\right)dt - \int\limits_{0}^{+\infty} \xi\left(t\right)\chi(\alpha,\beta)\nu\left(d\alpha,dt\right). \quad (2.1)\end{aligned}$$

Добавляя и вычитая математическое ожидание $\lambda \int_0^{+\infty} \xi(t)\chi(\alpha,\beta) \times F_\xi\,(d\alpha)\,dt$, получим стохастическое дифференциальное уравнение с центрированной мерой Пуассона

$$d\xi\,(t) = u\xi\,(t)\,\left(\mu dt + \sigma dW\,(t)\right) + (1-u)\,\xi\,(t)\,rdt - u_1\,(t,\xi\,(t))\,dt \\ - \lambda\xi(t)\int\limits_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)F_\xi\,(d\alpha)\,dt - \xi\,(t)\int\limits_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)\tilde{\nu}\,(d\alpha,dt). \quad (2.2)$$

Пусть

$$V(t,x) = \max_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1,\\ u_1\in\Re}} M\int\limits_t^T e^{-\rho s}\left[u_1(s,\xi_{t,x}(s))\right]^\gamma\,ds$$

цена управления функционалом Р. Мертона, капитал компании $\xi_{t,x}(s)$ в момент времени t стартует из точки x. Везде в дальнейшем считаем, что $x>0$ для любого $0\leqslant t<T$. Действительно в силу условий, наложенных на класс $\Re$, $\xi_{t,x}(s),\ t\leqslant s$ решение уравнения баланса (2.2), стартующее в момент времени t из точки $x>0$, остается положительным на всем промежутке времени $0\leqslant t\leqslant s<T$, убедимся в этом. Пусть $\xi_c(t)$ решение уравнения

$$d\xi_c(t) = \xi_c(t)\left([u\mu + (1-u)r - c(t)]dt - \int\limits_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)\nu(d\alpha,dt)\right) \\ + u\sigma\xi_c(t)\,dW(t), \quad \xi_c(0)=\xi_0,\ 0\leqslant t<T. \quad (2.3)$$

Нетрудно показать,что с вероятностью 1

$$\xi(t)\geqslant\xi_c(t), \qquad 0\leqslant t<T.$$

Действительно, пусть $\zeta(t)=\xi(t)-\xi_c(t),\ 0\leqslant t<T$, тогда имеем

$$d\zeta(t) = \zeta(t)\left([u\mu + (1-u)r - c(t)]\,dt - \int\limits_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)\nu\,(d\alpha,dt)\right) \\ + \left(\xi(t)c(t) - u_1(t,\xi(t)\right)dt + u\sigma\varsigma(t)\,dW(t), \\ \zeta(0)=0,\ 0\leqslant t<T. \quad (2.4)$$

Пусть [6, стр. 273]

$$\xi_0^c(t) = \exp\Biggl\{-\int\limits_0^t \Bigl(\mu u + (1-u)r - c(\tau) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\Bigr)\, d\tau$$
$$- \int\limits_0^t \sigma u\, dW(\tau) - \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \ln(1-\chi(\alpha,\beta))\nu\,(d\alpha, d\tau)\Biggr\},$$

тогда решение (2.4) имеет вид

$$\zeta(t) = [\xi_0^c(t)]^{-1} \int\limits_0^t \bigl(\xi(\tau)c(\tau) - u_1(\tau,\xi(\tau))\bigr)[\xi_0^c(\tau)]\, d\tau > 0,$$

так как при $0 \leqslant t < T$ с вероятностью 1

$$0 \leqslant u_1(t,\xi(t)) \leqslant c(t)\xi(t).$$

Таким образом, действительно $\xi(t) \geqslant \xi_c(t),\ 0 \leqslant t < T$ с вероятностью 1. Выпишем решение уравнения (2.3) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant s < T,\ \xi_c(t) = x > 0$, оно будет иметь вид ([6, стр. 274]):

$$\xi_c(s) = [\xi_0^c(s)]^{-1}\left(x + \int\limits_t^s \xi_0^c(\tau)\, d\tau\right) > 0,$$

откуда и следует, что с вероятностью 1 для $0 \leqslant t < T,\ \xi_c(t) > 0$.

Формально запишем уравнение Р. Беллмана [7]

$$-V_t' = \max_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1,\\ u_1\in\Re}} \Biggl\{\frac{1}{2}u^2x^2\sigma^2 V_{xx}'' + V_x'\bigl(x(\mu u + (1-u)r) - u_1\bigr)$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} [V(t, x - x\chi(\alpha,\beta)) - V(t,x)]\lambda F_\xi\,(d\alpha) + e^{-\rho t}u_1^\gamma\Biggr\}$$

или

$$-V_t^{'} = \Biggl\{\frac{1}{2}\,\overline{u}^2 x^2\sigma^2 V''{}_{xx} + V'{}_x\bigl((\mu\overline{u} + (1-\overline{u})r) - \overline{u}_1\bigr)$$
$$+ \lambda\int\limits_0^{\beta} [V\,(x-\alpha x, t) - V\,(x,t)]\,\lambda F\,(d\alpha)$$

$$\left. + \lambda \left[V\left(x - \beta x, t\right) - V\left(x, t\right)\right]\left[1 - F(\beta)\right] + e^{-\rho t}\left[\overline{u}_1\right]^{\gamma} \right\}$$

$$V\left(t, x\right)\Big|_{t=T} = 0 \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) связывает оптимальные управления $\overline{u}$ и $\overline{u}_1$ с $V(t,x)$ — платой на оптимальных управлениях.

Приступим к нахождению оптимальных управлений. Приравнивая производную от правой части (2.5) по u к нулю, имеем

$$0 = \overline{u} x^2 \sigma^2 V''_{xx} + x V'_x \left(\mu - r\right),$$

откуда

$$\overline{u} = -\frac{V'_x \left(\mu - r\right)}{x \sigma^2 V''_{xx}}. \qquad (2.6)$$

Аналогичным образом приравнивая производную по u_1 к нулю, имеем

$$\overline{u}_1 = \left(\frac{V'_x e^{\rho t}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \qquad (2.7)$$

Будем искать цену в виде

$$V\left(t, x\right) = x^{\gamma} g\left(t\right), \qquad 0 < \gamma < 1.$$

Из (2.6), (2.7) имеем

$$\overline{u} = \frac{-\gamma x^{\gamma - 1}\left(\mu - r\right) g\left(t\right)}{x \sigma^2 \gamma \left(\gamma - 1\right) x^{\gamma - 2} g\left(t\right)} = \frac{\left(\mu - r\right)}{\sigma^2 \left(1 - \gamma\right)}, \qquad (2.8)$$

$$\overline{u}_1(t, x) = \left(\frac{\gamma x^{\gamma - 1} g(t) e^{\rho t}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = x e^{\frac{\rho t}{\gamma - 1}} g\left(t\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \qquad (2.9)$$

Предположим, что

$$\frac{\left(\mu - r\right)}{\sigma^2 \left(1 - \gamma\right)} < 1,$$

тогда в качестве оптимального управления $\bar{u}$ действительно можно взять величину

$$\overline{u} = \frac{\left(\mu - r\right)}{\sigma^2 \left(1 - \gamma\right)},$$

а в качестве скорости оптимального потребления $\overline{u}_1(t,x)$ — функцию

$$\overline{u}_1(t, x) = x e^{\frac{\rho t}{\gamma - 1}} g\left(t\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Так как в этом случае

$$\lambda \int_0^{\beta} \left[V\left(x-\alpha x,t\right)-V\left(x,t\right)\right] \lambda F\left(d\alpha\right)$$
$$+\lambda\left[V\left(x-\beta x,t\right)-V\left(x,t\right)\right]\left[1-F(\beta)\right]$$
$$=\lambda \int_0^{\beta} V\left(x-\alpha x,t\right)F(d\alpha)+\lambda V\left(x-\beta x,t\right)\left[1-F(\beta)\right]$$
$$-\lambda V(x,t)=x^{\gamma}g(t)C(\lambda,\beta),$$

где

$$C(\lambda,\beta)=\lambda\int_0^{\beta}(1-\alpha)^{\gamma}F(d\alpha)+\lambda(1-\beta)^{\gamma}\left[1-F(\beta)\right]-\lambda,$$

то из (2.5) с учётом (2.8) и (2.9) получаем

$$-x^{\gamma}g'\left(t\right)=\frac{1}{2}x^2\sigma^2\frac{\left(\mu-r\right)^2}{\sigma^4\left(1-\gamma\right)^2}\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}g\left(t\right)$$
$$+\gamma x x^{\gamma-1}g\left(t\right)\left[\frac{\left(\mu-r\right)^2}{\sigma^2\left(1-\gamma\right)}+r\right]-\gamma x^{\gamma}e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}\left(g\left(t\right)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$
$$+e^{-\rho t}x^{\gamma}e^{\frac{\rho t\gamma}{\gamma-1}}\left(g\left(t\right)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+C(\lambda,\beta)g\left(t\right)x^{\gamma}.$$

После сокращения на x^{γ} получаем уравнение

$$-g'\left(t\right)=\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\mu-r\right)^2}{\sigma^2\left(1-\gamma\right)}\gamma+r\gamma+C(\lambda,\beta)\right]g(t)+\left(1-\gamma\right)e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}\left(g\left(t\right)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

с условием на конце временного интервала

$$g(T)=0.$$

Сделаем замену [7] $g\left(t\right)=h\left(t\right)^{1-\gamma}e^{-\rho t}\Rightarrow h\left(t\right)=\left(g\left(t\right)e^{\rho t}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$, тогда

$$-\left(1-\gamma\right)h'\left(t\right)h\left(t\right)^{-\gamma}e^{-\rho t}+h\left(t\right)^{1-\gamma}\rho e^{-\rho t}$$
$$=\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\mu-r\right)^2}{\sigma^2\left(1-\gamma\right)}\gamma+r\gamma+C(\lambda,\beta)\right]h\left(t\right)^{1-\gamma}e^{-\rho t}$$
$$+\left(1-\gamma\right)e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}h\left(t\right)e^{\frac{-\rho t\gamma}{\gamma-1}},$$

откуда

$$-h'(t) = \Big[\frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)}\gamma + r\gamma + C(\lambda,\beta) - \rho\Big]\frac{h(t)}{1-\gamma} + 1, \qquad (2.10)$$
$$h(T) = 0.$$

Пусть

$$A = \Big[\frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)}\gamma + r\gamma + C(\lambda,\beta) - \rho\Big]\frac{1}{1-\gamma},$$

тогда, решая обыкновенное линейное дифференциальное уравнение (2.10), имеем

$$h(t) = \frac{1}{A}\left(1 - e^{At}\right)e^{-At} + e^{-At}h_0,$$
$$0 = \frac{1}{A}\left(e^{-AT} - 1\right) + e^{-AT}h_0,$$
$$h_0 = -\frac{1}{A}\left(e^{-AT} - 1\right)e^{AT} = \frac{-e^{AT} + 1}{A},$$
$$h(t) = \frac{1}{A}\left(e^{-At} - 1\right) + e^{-At}\frac{\left(e^{AT} - 1\right)}{A} = \frac{1}{A}\big[e^{A(T-t)} - 1\big].$$

Таким образом,

$$g(t) = \Big(\frac{1}{A}\big[e^{A(T-t)} - 1\big]\Big)^{1-\gamma} e^{-\rho t} \qquad (2.11)$$

для любого $t \in [0, T]$, и цена управления равна

$$V(t,x) = x^\gamma g(t) = x^\gamma\Big(\frac{1}{A}\big[e^{A(T-t)} - 1\big]\Big)^{1-\gamma} e^{-\rho t} \qquad (2.12)$$

при управлениях (2.8), (2.9).

Наши действия были бы законными, если бы функция $V(t,x)$ — цена управления функционалом Р. Мертона, имела соответствующие производные V_t', V_x', V_{xx}'' . Хорошо известно как трудно проверить это предположение a priori, и кроме того, можно указать примеры [8, §3], в которых оно не выполняется. В настоящее время имеется [8] обходной путь, позволяющий доказать, что в некоторых случаях функция цены является достаточно гладкой и удовлетворяет уравнению Р. Беллмана. Он заключается в том, что сначала доказывается, что уравнение Беллмана имеет достаточно гладкое решение, а потом, что это решение и есть цена [7, стр. 222]. Проделаем эти выкладки для нашего случая.

Пусть

$$\psi(u,u_1,x,t)=\frac{1}{2}\,u^2x^2\sigma^2V''_{xx}+V'_x\bigl(x[u\mu+(1-u)r]-u_1\bigr)$$
$$+\lambda\int\limits_0^{+\infty}[V(t,x-x\chi(\alpha,\beta))-V(t,x)]\lambda F(d\alpha)+e^{-\rho t}[u_1]^\gamma+V'_t,$$

тогда форма

$$\psi''_{uu}+\psi''_{uu_1}+\psi''_{u_1u_1}=x^2\sigma^2V''_{xx}+\gamma(\gamma-1)e^{-\rho t}[u_1]^{\gamma-2}$$

при

$$V(t,x)=x^\gamma g(t),\qquad \overline{u}_1(t,x)=xe^{-\rho t}[g(t)]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

очевидно равна

$$\psi''_{uu}+\psi''_{uu_1}+\psi''_{u_1u_1}=\gamma(\gamma-1)\bigl[x^2\sigma^2g(t)+x^{\gamma-2}e^{\frac{\rho t}{1-\gamma}}[g(t)]^{\frac{2-\gamma}{1-\gamma}}\bigr]<0,$$

так как $g(t)>0$ при $0\leqslant t<T$, то есть функции

$$\overline{u}=\frac{\mu-r}{\sigma^2(1-\gamma)},\qquad \overline{u}_1(t,x)=xe^{-\rho t}[g(t)]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

при $V(t,x)=x^\gamma g(t)$ доставляют максимум выражению $\psi(u,u_1,x,t)$, который к тому же равен нулю.

Рассмотрим решение уравнения (2.2) на любых других управлениях $0\leqslant u\leqslant 1$, $u_1\in\Re$. Воспользовавшись обобщенной формулой Ито [6], имеем для функции $V(t,x)$ при $0\leqslant t\leqslant s<T$ стохастический дифференциал

$$dV(s,\xi_{t,x}(s))=V'_t(s,\xi_{t,x}(s))\,ds+V'_x(s,\xi_{t,x}(s))[\mu u+(1-u)r]\xi_{t,x}(s)\,ds$$
$$-V'_x(s,\xi_{t,x}(s))u_1(s,\xi_{t,x}(s))\,ds+\frac{1}{2}\,u^2\sigma^2\xi^2_{t,x}(s)V''_{xx}(s,\xi_{t,x}(s))\,ds$$
$$+u\sigma\xi_{t,x}(s)\,dW(s)+\lambda\bigl[V(s,\xi_{t,x}(s)(1-\beta))-V(s,\xi_{t,x}(s))\bigr](1-F(\beta))\,ds$$
$$+\lambda\int\limits_0^{\beta}\bigl[V(s,\xi_{t,x}(s)(1-\alpha))-V(s,\xi_{t,x}(s))\bigr]F(d\alpha)\,ds$$
$$+\int\limits_0^{+\infty}\bigl[V(s,\xi_{t,x}(s)(1-\chi(\alpha,\beta)))-V(s,\xi_{t,x}(s))\bigr]\tilde{\nu}(d\alpha,ds),$$

откуда в силу того, что $V(T, \xi_{t,x}(T)) = 0$, $V(s, \xi_{t,x}(s))\big|_{s=t} = V(t,x)$, имеем

$$-V(T,x) = M\int\limits_t^T \psi(u,u_1,\xi_{t,x}(s),s)\,ds - M\int\limits_t^T e^{-\rho s}[u_1(s,\xi_{t,x}(s))]^\gamma\,ds,$$

а в силу того, что $\psi(u,u_1,\xi_{t,x}(s),s) \leqslant 0$, имеем

$$V(t,x) \geqslant \int\limits_t^T e^{-\rho s}[u_1(s,\xi_{t,x}(s))]^\gamma\,ds.$$

Заметим в силу условий, наложенных на управления класса $\Re$, интеграл в правой части последнего неравенства существует. Действительно

$$\int\limits_t^T e^{-\rho s}[u_1(s,\xi_{t,x}(s))]^\gamma\,ds \leqslant \int\limits_t^T e^{-\rho s}[c(s)]^\gamma(M(\xi_{t,x}(s))^\gamma\,ds < +\infty,$$

так как при $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$

$$M\xi_{t,x}(s) \leqslant M\overline{\xi}_{t,x}(s),$$

где $\overline{\xi}_{t,x}(s)$ решение линейного уравнения

$$d\overline{\xi}_{t,x}(s) = \overline{\xi}_{t,x}(s)\left([u\mu + (1-u)r]\,ds - \int\limits_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)\nu(d\alpha,ds)\right),$$
$$\overline{\xi}_{t,x}(s)\,|_{s=t} = x,$$

откуда

$$dM\overline{\xi}_{t,x}(s) = M\overline{\xi}_{t,x}(s)\left([u\mu + (1-u)r]\,ds - \lambda\int\limits_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)F(d\alpha)\,ds\right),$$
$$\overline{\xi}_{t,x}(s)\,|_{s=t} = x$$

и

$$M\overline{\xi}_{t,x}(s) = x\exp\left\{(s-t)\left[\mu u + (1-u)r - \lambda\int\limits_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)F(d\alpha)\right]\right\}.$$

С другой стороны очевидно, что при

$$\overline{u} = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)}, \qquad \overline{u}_1(t,x) = xe^{-\rho t}[g(t)]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

для $V(t,x) = x^\gamma g(t)$, где $g(t) = (\frac{1}{A}[e^{A(T-t)} - 1])^{1-\gamma} e^{-\rho t}$, имеем $\psi(\overline{u}, \overline{u}_1, x, t) \equiv 0$, откуда следует, что

$$\max_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1,\\ u_1\in\Re}} M \int\limits_t^T e^{-\rho s}[u_1(s,\xi_{t,x}(s))]^\gamma \, ds = V(t,x)$$

Выпишем решение уравнения (2.2) при оптимальных управлениях

$$\bar{u} = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2\,(1-\gamma)} < 1, \qquad \bar{u}_1(t,x) = xe^{-\frac{2\rho t}{1-\gamma}}\Big(\frac{1}{A}\big[e^{A(T-t)} - 1\big]\Big)^{-1}.$$

На этих оптимальных управлениях уравнение (2.2) примет вид:

$$\begin{aligned}
d\xi(t) = \xi(t)\,\Big[\,\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)} + r - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}} g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\Big]dt \\
+ \frac{(\mu - r)}{\sigma^2(1-\gamma)}\xi(t)\sigma\,dW(t) - \int\limits_0^{+\infty} \xi(t)\chi(\alpha,\beta)\tilde{\nu}\,(d\alpha,dt) \\
= \xi(t)\,\Big[\,\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)} + r - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}} g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\Big]dt \\
+ \frac{(\mu - r)}{\sigma^2(1-\gamma)}\xi(t)\sigma\,dW(t) - \int\limits_0^{\beta} \alpha\xi(t)\tilde{\nu}\,(d\alpha,dt) - \int\limits_\beta^{+\infty} \beta\xi(t)\tilde{\nu}\,(d\alpha,dt) \\
= \xi(t)\,\Big[\,\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)} + r - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}} g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\Big]dt \\
+ \frac{(mu - r)}{\sigma^2(1-\gamma)}\xi(t)\sigma\,dW(t) - \xi(t)\Bigg[\int\limits_0^{\beta} \alpha\xi\tilde{\nu}(d\alpha,dt) - \int\limits_\beta^{+\infty} \beta\xi\tilde{\nu}(d\alpha,dt)\Bigg] \\
= \xi(t)\,\Big[\,\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)} + r - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}} g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\Big]dt \\
+ \frac{(\mu - r)}{\sigma^2(1-\gamma)}\xi(t)\sigma\,dW(t) - \xi(t)\int \chi(\alpha,\beta)\tilde{\nu}\,(d\alpha,dt).
\end{aligned}$$

Применив обобщённую формулу Ито к функции $\ln \xi(t)$, имеем

$$d\ln\xi(t) = \Big[\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)} + r - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}} g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)^2} - C(\lambda,\beta)\Big]dt$$

$$+\frac{(\mu-r)}{\sigma^2(1-\gamma)}\,dW(t) + \int\limits_0^{+\infty}[\ln(1-\chi(\alpha,\beta))\xi(t) - \ln\xi(t)]F(d\alpha)\lambda\,dt$$

$$+\lambda\int\limits_0^{\beta}\alpha F(d\alpha)+\lambda\beta\,[1-F(\beta)]+\int\limits_0^{+\infty}[\ln(1-\chi(\alpha,\beta))\xi(t)-\ln\xi(t)]\tilde{\nu}(d\alpha,dt)$$

или

$$d\ln\xi(t) = \Bigg[\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)} + r - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}} g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)^2} - C(\lambda,\beta)$$

$$+\lambda\int\limits_0^{\beta}(\alpha+\ln(1-\alpha))F(d\alpha)+\lambda(\beta+\ln(1-\beta))\,[1-F(\beta)]\Bigg]dt$$

$$+\frac{(\mu-r)}{\sigma^2(1-\gamma)}\,dW(t) + \int\limits_0^{+\infty}[\ln(1-\chi(\alpha,\beta))]\tilde{\nu}(d\alpha,dt). \quad (2.13)$$

Пусть

$$D_1(\mu,r,\lambda,\beta,\sigma) = \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r - \frac{1}{2}C(\lambda,\beta)$$

$$+\lambda\int\limits_0^{\beta}(\alpha+\ln(1-\alpha))F(d\alpha)+\lambda(\beta+\ln(1-\beta))\,[1-F(\beta)]\,.$$

Из (2.13) следует, что капитал компании описывается случайным процессом

$$\xi(t) = \xi_0\exp\Bigg(D_1(\mu,\lambda,\beta,\sigma)t - \int\limits_0^{t} e^{\frac{\rho\tau}{\gamma-1}} g(\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}\,d\tau$$

$$+\frac{(\mu-r)}{\sigma^2(1-\gamma)}W(t) + \int\limits_0^{+\infty}[\ln(1-\chi(\alpha,\beta))]\tilde{\nu}(d\alpha,t)\Bigg).$$

Из последнего следует, что при положительном начальном капитале ξ_0 на протяжении времени $0 \leqslant t < T$ капитал компании положителен, то есть вопрос о вероятности разорения компании на промежутке времени $0 \leqslant t < T$ не имеет смысла. В частности следует,

$$M\left\{\xi(t)/\Im_0^s\right\} = \xi(s) + \int\limits_s^t M\left\{\xi(\tau)/\Im_0^s\right\}\left(\left[\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)} + r - C(\lambda,\beta)\right] - e^{\frac{\rho\tau}{\gamma-1}} g(\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right) d\tau.$$

Нетрудно заметить, что

$$M\left\{\xi(t)/\Im_0^s\right\} = \xi(s)\exp\left\{\int\limits_s^t \left(\left[\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)} + r - C(\lambda,\beta)\right] - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}} g(\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right) d\tau\right\}. \tag{2.14}$$

В силу того, что

$$\int\limits_s^t e^{\frac{\rho\tau}{\gamma-1}} g(\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}\, d\tau = -A\int\limits_s^t \left(e^{A(T-\tau)} - 1\right)^{-1} d\tau = -A\int\limits_{e^{A(T-s)}}^{e^{A(T-t)}} \frac{-1}{Ay(y-1)}\, dy = -\int\limits_{e^{A(T-s)}}^{e^{A(T-t)}} \frac{1}{y(1-y)}\, dy$$
$$= \ln\frac{1-e^{A(T-t)}}{e^{A(T-t)}} - \ln\frac{1-e^{A(T-s)}}{e^{A(T-s)}} = \ln\frac{\left(1-e^{A(T-t)}\right)e^{A(T-s)}}{e^{A(T-t)}\left(1-e^{A(T-s)}\right)}$$
$$= \ln e^{A(t-s)}\frac{\left(1-e^{A(T-t)}\right)}{\left(1-e^{A(T-s)}\right)} = A(t-s) + \ln\frac{\left(1-e^{A(T-t)}\right)}{\left(1-e^{A(T-s)}\right)},$$

следует, что показатель в экспоненте (2.14) при приближении $t \to T$ стремится к минус бесконечности, то есть начиная с некоторого момента времени капитал компании начинает обладать супермартингальным свойством [9], а в силу неотрицательности $\xi(t)$ существует с вероятностью 1 предел: $\lim_{t\to T}\xi(t) = 0$, то есть к концу срока T капитал компании с вероятностью единица становится равным нулю. Равенство предельного значения нулю следует из равенства нулю математического ожидания неотрицательной величины $\xi(T)$.

Естественно возникает вопрос об оптимизации функционала качества по $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Нетрудно убедиться в том, что максимальное значение функционал качества принимает при $\beta = 0$. Действительно, выражение в правой части уравнения Р. Беллмана, зависящее от $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, это

$$C(\lambda,\beta)=\lambda\int\limits_0^\beta (1-\alpha)^\gamma F(d\alpha)+\lambda(1-\beta)^\gamma\left[1-F(\beta)\right]-\lambda,$$

которое, как функция β принимает значение нуль при $\beta=1$ и отрицательные значения при $\beta>1$, последнее следует из того, что

$$C(\lambda,\beta)=\lambda\int\limits_0^\beta (1-\alpha)^\gamma F(d\alpha)+\lambda(1-\beta)^\gamma\left[1-F(\beta)\right]-\lambda$$

$$=-\lambda\left[1-F(\beta)\right](1-\beta)^\gamma-\gamma\lambda\int\limits_0^\beta (1-\alpha)^{\gamma-1}\left[1-F(\alpha)\right]d\alpha$$

$$+\lambda(1-\beta)^\gamma\left[1-F(\beta)\right]=-\gamma\lambda\int\limits_0^\beta (1-\alpha)^{\gamma-1}\left[1-F(\alpha)\right]d\alpha,$$

$$C^{'}(\lambda,\beta)=-\lambda\gamma(1-\beta)^{\gamma-1}\left[1-F(\beta)\right]\leqslant 0,\qquad C^{'}(\lambda,\beta)=0$$

при $\beta=1$. Нетрудно заметить, что при переходе через точку $\beta=1$ производная $C^{'}(\lambda,\beta)$ меняет знак с минуса на плюс, то есть в точке $\beta=1$ функция $C(\lambda,\beta)$ имеет минимум. Теперь предположим, что

$$\frac{(\mu-r)}{\sigma^2\left(1-\gamma\right)}\geqslant 1,$$

тогда в качестве оптимального управления $\bar u$ действительно можно взять величину

$$\overline{u}=1, \tag{2.15}$$

а в качестве скорости оптимального потребления $\overline{u}_1(t,x)$ — функцию

$$\overline{u}_1(t,x)=xe^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}\overline{g}\left(t\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{2.16}$$

Из (2.2) с учётом (2.15), (2.16) имеем

$$-\tilde V_t^{'}=\max_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1,\\ u_1\in\Re}}\left\{\frac{1}{2}x^2\sigma^2\tilde V_{xx}^{''}+\tilde V_x^{'}(x\mu-u_1)\right.$$

$$+\lambda\int\limits_0^\beta\left[\tilde V\left(x-\alpha x,t\right)-\tilde V\left(x,t\right)\right]\lambda F\left(d\alpha\right)$$

$$\left.+\lambda\left[\tilde V\left(x-\beta x,t\right)-\tilde V\left(x,t\right)\right]\left[1-F(\beta)\right]+\ell^{-\rho t}\left[u_1\right]^\gamma\right\},$$

$$\tilde V\left(t,x\right)\Big|_{t=T}=0,$$

откуда получаем

$$-x^{\gamma}\overline{g}'(t)=\frac{1}{2}x^2\sigma^2\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}\overline{g}(t)+\gamma x x^{\gamma-1}\overline{g}(t)\mu$$
$$-\gamma x^{\gamma}e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}(\overline{g}(t))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+e^{-\rho t}x^{\gamma}e^{\frac{\rho t\gamma}{\gamma-1}}(\overline{g}(t))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+C(\lambda,\beta)\overline{g}(t)x^{\gamma}.$$

После сокращения на x^{γ} получаем уравнение

$$-\overline{g}'(t)=\Big[\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)+\mu\gamma+C(\lambda,\beta)\Big]\overline{g}(t)+(1-\gamma)e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}(\overline{g}(t))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

с условием на конце временного интервала

$$\overline{g}(T)=0.$$

Сделаем замену [7]

$$\overline{g}(t)=h(t)^{1-\gamma}e^{-\rho t}\Rightarrow h(t)=\big(\overline{g}(t)e^{\rho t}\big)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

тогда

$$-(1-\gamma)h'(t)h(t)^{-\gamma}e^{-\rho t}+h(t)^{1-\gamma}\rho e^{-\rho t}$$
$$=\Big[\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)+\mu\gamma+\gamma c+C(\lambda,\beta)\Big]h(t)^{1-\gamma}e^{-\rho t}$$
$$+(1-\gamma)e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}h(t)e^{\frac{-\rho t\gamma}{\gamma-1}},$$

откуда

$$-h'(t)=\Big[\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)+\mu\gamma+C(\lambda,\beta)-\rho\Big]\frac{h(t)}{1-\gamma}+1 \qquad h(T)=0. \tag{2.17}$$

Пусть

$$\bar{A}=\Big[\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)+\mu\gamma+C(\lambda,\beta)-\rho\Big]\frac{1}{1-\gamma}.$$

Решая обыкновенное линейное дифференциальное уравнение (2.17), имеем

$$h(t)=\frac{1}{\bar{A}}\big(1-e^{\bar{A}t}\big)e^{-\bar{A}t}+e^{-\bar{A}t}h_0,$$
$$0=\frac{1}{\bar{A}}\big(e^{-\bar{A}T}-1\big)+e^{-\bar{A}T}h_0,$$
$$h_0=-\frac{1}{\bar{A}}\big(e^{-\bar{A}T}-1\big)e^{\bar{A}T}=\frac{-e^{\bar{A}T}+1}{\bar{A}},$$
$$h(t)=\frac{1}{\bar{A}}\big(e^{-\bar{A}t}-1\big)+e^{-\bar{A}t}\frac{\big(e^{\bar{A}T}-1\big)}{\bar{A}}=\frac{1}{\bar{A}}\big[e^{\bar{A}(T-t)}-1\big].$$

Таким образом,

$$\overline{g}\,(t) = \Big(\frac{1}{\bar{A}}\big[e^{\bar{A}(T-t)} - 1\big]\Big)^{1-\gamma} e^{-\rho\, t},$$

цена управления

$$\tilde{V}(t,x) = x^{\gamma}\overline{g}\,(t) = x^{\gamma}\Big(\frac{1}{\bar{A}}\big[e^{\bar{A}(T-t)} - 1\big]\Big)^{1-\gamma} e^{-\rho\, t}. \tag{2.18}$$

Аналогично случаю

$$\frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)} < 1$$

при $\frac{\mu-r}{\sigma^2(1-\gamma)} \geqslant 1$, при $0 \leqslant t < T$ показываем, что выражение $\psi(u, u_1, x, t)$ для $\tilde{V}(t,x) = x^{\gamma}\overline{g}(t)$ достигает максимума при

$$\overline{u} = 1,$$

$$\overline{u}_1 = xe^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}[\overline{g}(t)]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

здесь уже $\overline{g}(t) = \big(\frac{1}{\overline{A}}[e^{\overline{A}(T-t)} - 1]\big)^{1-\gamma}e^{-\rho t} > 0$, причем максимальное значение выражения $\psi(u, u_1, x, t)$ равно нулю. Аналогично предыдущему случаю показываем, что

$$\tilde{V}(t,x) \geqslant \int\limits_t^T e^{-\rho s}[u_1(s, \xi_{t,x}(s))]^{\gamma}\, ds,$$

причем значение $\tilde{V}(t,x)$ достигается при $\overline{u} = 1$, $\overline{u}_1 = xe^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}[\overline{g}(t)]^{\frac{1}{\gamma-1}}$. Выпишем решение [6] уравнения (2.2) при оптимальных управлениях

$$\bar{u} = 1, \qquad \bar{u}_1(t,x) = xe^{-\frac{2\rho t}{1-\gamma}}\frac{1}{\bar{A}}\big[e^{\bar{A}(T-t)} - 1\big].$$

На этих оптимальных управлениях уравнение (2.2) имеет вид:

$$\begin{aligned}
d\xi(t) = \xi(t)\,&\big[\mu - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\big]\,dt \\
&+ \sigma\xi(t)\sigma\, dW(t) - \int \chi(\xi(t),\alpha,\beta)\tilde{\nu}\,(d\alpha, dt)) \\
&= \xi(t)\,\big[\mu - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\big]\,dt + \sigma\xi(t)\, dW(t) \\
&- \int\limits_0^{\beta} \alpha\xi(t)\tilde{\nu}\,(d\alpha, dt) - \int\limits_{\beta}^{+\infty} \beta\xi(t)\tilde{\nu}\,(d\alpha, dt) \\
&= \xi(t)\,\big[\mu - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}}g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\big]\,dt + \xi(t)\sigma\, dW(t)
\end{aligned}$$

$$- \xi(t)\left[\int\limits_0^{\beta} \alpha\tilde{\upsilon}(d\alpha, dt) + \int\limits_{\beta}^{+\infty} \beta\tilde{\nu}(\,\alpha, dt)\right]$$

$$= \xi(t)\left[\mu - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}} g(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\right] dt + \xi(t)\sigma\, dW(t)$$
$$- \xi(t)\int \chi(\alpha,\beta)\tilde{\nu}\,(d\alpha, dt). \quad (2.19)$$

Применив обобщённую формулу Ито к функции $\ln\xi(t)$ из (2.19), имеем

$$d\ln\xi(t) = \Bigg[\mu - e^{\frac{\rho t}{\gamma-1}} g\,(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)$$
$$+ \lambda\int\limits_0^{\beta} (\alpha + \ln(1-\alpha))F(d\alpha) + \lambda(\beta + \ln(1-\beta))\,[1 - F(\beta)] - \frac{\sigma^2}{2}\Bigg] dt$$
$$+ \sigma dW(t) + \int [\ln(1 - \chi(\alpha,\beta))\xi(t) - \ln\xi(t)]\tilde{\nu}\,(d\alpha, dt).$$

Пусть

$$D_2(\mu,\lambda,\beta,\sigma) = \mu - C(\lambda,\beta)$$
$$+ \lambda\int\limits_0^{\beta} (\alpha + \ln(1-\alpha))F(d\alpha) + \lambda(\beta + \ln(1-\beta))\,[1 - F(\beta)] - \frac{\sigma^2}{2},$$

тогда капитал компании описывается случайным процессом

$$\xi(t) = \xi_0 \exp\Bigg(D_2(\mu,\lambda,\beta,\sigma)\, t - \int\limits_0^{t} e^{\frac{\rho\tau}{\gamma-1}} g\,(\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}\, d\tau$$
$$+ \sigma W(t) + \int [\ln(1 - \chi(\alpha,\beta))]\tilde{\nu}\,(d\alpha, t)\Bigg),$$

откуда следует, что капитал компании и в этом случае положителен, то есть вопрос о вероятности разорения компании на промежутке времени $0 \leqslant t < T$ не имеет смысла. Аналогично (2.14) имеем

$$M\left\{\xi(t)/\Im_0^s\right\} = \xi\,(s)\exp\left\{\int\limits_s^t \left(\mu - e^{\frac{\rho\tau}{\gamma-1}} g\,(\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\right) d\tau\right\}. \quad (2.20)$$

Убеждаемся в том, что

$$\int\limits_s^t \Big(\mu - e^{\frac{\rho\tau}{\gamma-1}}\Big[\Big(\frac{1}{\bar{A}}\big[e^{\bar{A}(T-\tau)}-1\big]\Big)^{1-\gamma}\Big]^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{-\frac{\rho\tau}{\gamma-1}} - C(\lambda,\beta)\Big)d\tau$$

$$= \int\limits_s^t \Big(\mu - \Big(\frac{1}{\bar{A}}\big[e^{\bar{A}(T-\tau)}-1\big]\Big)^{-1} - C(\lambda,\beta)\Big)d\tau$$

$$= \big(\mu - C(\lambda,\beta) + \bar{A}\big)(t-s) + \ln\frac{\big(1-e^{\bar{A}(T-t)}\big)}{\big(1-e^{\bar{A}(T-s)}\big)}. \qquad (2.21)$$

Из (2.20) и (2.21) следует, что показатель в экспоненте (2.21) при приближении $t \to T$ стремится к минус бесконечности, то есть, начиная с некоторого момента времени, капитал компании начинает обладать супермартингальным свойством [9], а в силу неотрицательности $\xi(t)$ существует с вероятностью 1 предел: $\lim_{t\to T}\xi(t) = 0$, то есть к концу срока T капитал компании с вероятностью единица становится равным нулю. Резюмируем полученные результаты.

Пусть

$$C(\lambda,\beta) = \lambda\int\limits_0^\beta (1-\alpha)^\gamma F(d\alpha) + \lambda(1-\beta)^\gamma\left[1-F(\beta)\right] - \lambda,$$

$$A = \Big[\frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)}\gamma + r\gamma + C(\lambda,\beta) - \rho\Big]\frac{1}{1-\gamma},$$

$$\bar{A} = \Big[\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) + \mu\gamma + C(\lambda,\beta) - \rho\Big]\frac{1}{1-\gamma}.$$

Теорема 2.1. *Если*

$$\frac{(\mu-r)}{\sigma^2(1-\gamma)} < 1, \qquad A \neq 0,$$

то вкладывая долю

$$\bar{u} = \frac{(\mu-r)}{\sigma^2(1-\gamma)}$$

имеющегося капитала в акции, а остаток — на банковский счёт, потребляя со скоростью

$$\bar{u}_1(t,x) = xe^{-\frac{2\rho t}{1-\gamma}}\Big(\frac{1}{A}\big[e^{A(T-t)}-1\big]\Big)^{-1}$$

за весь период от нуля до T, будем иметь максимальное потребление, и оно будет равно величине

$$[\xi_0]^\gamma\Big(\frac{1}{A}\left[e^{AT}-1\right]\Big)^{1-\gamma};$$

если

$$\frac{(\mu - r)}{\sigma^2\,(1-\gamma)} \geqslant 1, \qquad \overline{A} \neq 0,$$

то вкладывая все средства в акции и потребляя со скоростью

$$\bar{u}_1(t,x) = xe^{-\frac{2\rho t}{1-\gamma}}\left(\frac{1}{\bar{A}}\left[e^{\bar{A}(T-t)}-1\right]\right)^{-1}$$

за весь период от нуля до T, будем иметь максимальное потребление, и оно будет равно величине

$$[\xi_0]^{\gamma}\left(\frac{1}{\bar{A}}\left[e^{\bar{A}T}-1\right]\right)^{1-\gamma},$$

здесь ξ_0 — начальный капитал компании.

3. Выводы

В рассмотренной работе не ставится традиционный при изучении функционирования страховой компании вопрос о вероятности разорения, так как вероятность разорения в рассматриваемом случае равна единице лишь в финальный момент времени, до этого момента вероятность обращения капитала компании в нуль — нулевая. В предположениях потребления капитала решена задача оптимизации портфеля активов и потребления таким образом, чтобы рассматриваемый функционал качества принимал максимальное значение.

Благодарности. Авторы благодарят рецензента, чьи замечания способствовали значительному улучшению изложения результатов.

Литература

[1] А. В. Мельников, *Риск-менеджмент*, М.: изд-во “Анкил”, 2001, 112 с.

[2] R. C. Merton, *Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model* // J. Economic Theory, **3** (1971), 373–413.

[3] Б. В. Бондарев, *Математические модели в страховании*, “Апекс”, 2003, 116 с.

[4] А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики: факты, модели* // Т. 1, 2, М.: ФАЗИС, 1998, 1017 с.

[5] А. В. Скороход, *Лекції з випадкових процесів*, К.: Либедь, 1990, 168 с.

[6] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, Киев, Наукова Думка, 1968, 354 с.

[7] У. Флеминг, Р. Ришел, *Оптимальные управления детерминированными и стохастическими системами*, М.: “Мир”, 1978, 316 с.

[8] Н. В. Крылов, *Об управлении решением стохастического интегрального уравнения* // Теория вероятностей и ее применения, **XVII**, (1972), вып. 1, 111–127.

[9] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов*, М.: Наука, 1974, 696 с.

Сведения об авторах

Борис Владимирович Бондарев, Артем В. Баев

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
83055, Донецк
Украина
E-Mail: bvbondarev@cable.netlux.org,
tv@matfak.dongu.donetsk.ua