Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 1, 116 – 133

О неравенствах типа Джексона в $L_2[-1,1]$ и точных значениях n-поперечников функциональных классов

С. Б. Вакарчук

(*Представлена В. П. Моторным*)

Аннотация. В гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ получены два вида точных неравенств типа Джексона. Одно из них связывает величину $E_{n-1}(f)$ — наилучшее приближение непериодической функции f подпространством алгебраических полиномов степени $(n-1)$ — с введенным П. Бутцером обобщенным модулем непрерывности s-го порядка $\omega_s^L(\mathcal{D}^r f,\tau)$ ее r-той сильной производной Лежандра $\mathcal{D}^r f$. Другое неравенство устанавливает связь между $E_{n-1}(f)$ и K-функционалом $K_S(\mathcal{D}^r f,\tau)$. Для определенных при помощи K-функционала $K_s(f,\tau)$ и мажоранты $\Psi(\tau)$ классов функций $W^r(K_s,\Psi)$ $(r,\ s\in\mathbb{N})$, у которых производные $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяют условию $K_s(\mathcal{D}^r f,\tau)\leqslant\Psi(\tau)$ при любом $0<\tau\leqslant 2$, найдены точные значения некоторых n-поперечников. На указанных классах вычислены точные верхние грани модулей коэффициентов разложения функций в ряд по многочленам Лежандра.

2000 MSC. 41A10, 41A25, 41A46.

Ключевые слова и фразы. Наилучшее приближение, полиномы Лежандра, модуль непрерывности s-го порядка, сильные производные Лежандра, n-поперечники, K-функционал, коэффициенты Фурье.

1. Введение

Вопросам получения точных неравенств типа Джексона для действительных измеримых 2π-периодических функций f в пространстве $L_2[0,2\pi]$ с нормой

$$\|f\|_{L_2[0,2\pi]}=\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^2(x)\,dx\right\}^{1/2}$$

Статья поступила в редакцию 27.07.2004

посвящен ряд работ Н. И. Черных, Л. В. Тайкова, В. И. Иванова, А. А. Лигуна, В. А. Юдина, А. Г. Бабенко и других авторов (см., напр., [1–10]). В работе [11] А. Г. Бабенко получил точное неравенство типа Джексона в случае приближения на отрезке $[0,\pi]$ действительных измеримых четных 2π-периодических функций вида $F(x) = f(\cos x)$ $(x \in \mathbb{R})$ подпространством косинус-полиномов $\mathrm{G}_{n-1} = \big\{\mathrm{G} : \mathrm{G}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx,\ a_k \in \mathbb{R}\big\}$ в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}[0,\pi]$ $(\alpha > -1$, $\beta > -1)$ с нормой

$$\|F\|_{L^2_{\alpha,\beta}[0,\pi]} = \left\{\int\limits_0^\pi F^2(x)\Big(\sin\frac{x}{2}\Big)^{2\alpha+1}\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2\beta+1}dx\right\}^{1/2}.$$

В данной работе, продолжающей указанную тематику, доказано точное неравенство типа Джексона для L_2-приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f подпространством $\mathcal{P}_{n-1} \overset{\mathrm{df}}{=} \big\{\pi_{n-1} : \pi_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{R}\big\}$ алгебраических полиномов степени $n-1$ в пространстве $L_2[-1,1]$ с нормой

$$\|f\| \overset{\mathrm{df}}{=} \|f\|_{L_2[-1,1]} = \left\{\int\limits_{-1}^1 f^2(x)\,dx\right\}^{1/2}.$$

Приведем ряд необходимых понятий и определений из [12]. Для этого рассмотрим оператор

$$\tau_h(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 f\left(xh + u\sqrt{(1-x^2)(1-h^2)}\right)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

определенный для любых $x, h \in [-1,1]$. Очевидно, что τ_h — положительный линейный оператор, отображающий пространство $L_2[-1,1]$ в себя и такой, что $\|\tau_h(f)\| \leqslant \|f\|$ для любых $h \in [-1,1]$ и

$$\lim_{h\to 1-0}\|\tau_h(f) - f\| = 0 \qquad \forall\, f \in L_2[-1,1].$$

Полагаем $\triangle_h^1 f(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x) - \tau_h(f,x)$. Если для $f \in L_2[-1,1]$ существует функция $g \in L_2[-1,1]$ такая, что

$$\lim_{h\to 1-0}\left\|\frac{\triangle_h^1 f}{1-h} - g\right\| = 0,$$

то ее называют сильной производной Лежандра функции f и обозначают через $\mathcal{D}^1 f \overset{\mathrm{df}}{=} g$. Производные высших порядков определяют итеративным путем: $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}^1(\mathcal{D}^{r-1}f)$ $(r = 2, 3, \ldots)$. Оператор $\mathcal{D}^1$ можно интерпретировать в терминах обычной производной

$$\mathcal{D}^1 f(x) = \frac{d}{dx}\Big[\Big(\frac{x^2-1}{2}\Big)\frac{d}{dx}\Big] f(x).$$

Под модулем непрерывности s–го ($s \in \mathbb{N}$) порядка функции $f \in L_2[-1,1]$ в смысле Лежандра понимают следующую величину [12]

$$\omega_s^L(f,\tau) = \sup\big\{\|\triangle_h^s f\| \,:\, 1-\tau \leqslant h \leqslant 1\big\}, \tag{1.1}$$

где $0 < \tau \leqslant 2$; $\triangle_h^s f = \triangle_h^1(\triangle_h^{s-1} f)$, $\triangle_h^o f \equiv f$.

2. Формулировка основных результатов

Обозначим через $L_2^r[-1,1]$ $(r \in \mathbb{N})$ класс функций $f \in L_2[-1,1]$, у которых сильная производная r-го порядка по Лежандру $\mathcal{D}^r f$ принадлежит пространству $L_2[-1,1]$. Пусть $E_{n-1}(f)$ — наилучшее приближение функций $f \in L_2[-1,1]$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$, то есть

$$E_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f - \pi_{n-1}\| :\ \pi_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}\ .$$

Под $\chi_{n,s,r}(\tau)$ $(n, s, r \in \mathbb{N};\ 0 < \tau \leqslant 2)$ понимаем следующую величину

$$\chi_{n,s,r}(\tau) \stackrel{\text{df}}{=} \sup\Big\{\frac{E_{n-1}(f)\big(n(n+1)\big)^r}{\omega_s^L(\mathcal{D}^r f,\tau)} : f \in L_2^r[-1,1],\ f \not\equiv \text{const}\Big\}. \tag{2.1}$$

При этом отношение $0/0$ полагаем равным 0.

Пусть $\{\mu_{j,n}\}_{j=1}^{[n/2]}$, где $[b]$ — целая часть числа $b \in \mathbb{R}$, есть последовательные относительные максимумы модуля полинома Лежандра $|\,\mathbb{P}_n(x)\,|$ $(n \geqslant 2)$ при убывании x от единицы до нуля. Известно [13, с. 171–172], что в этом случае

$$1 > \mu_{1,n} > \mu_{2,n} > \cdots > \mu_{[n/2],n} \tag{2.2}$$

и при фиксированном натуральном числе $1 \leq \rho \leq [n/2]$

$$\mu_{\rho,m} > \mu_{\rho,m+1} \tag{2.3}$$

для всех $m \geqslant n$ [13, с.198]. Обозначим через t_n $(0 < t_n < 1;\ n \in \mathbb{N})$ то значение аргумента x, при котором имеет место равенство

$$\mathbb{P}_n(t_n) = \mu_{1,2}\ ,$$

где $\mu_{1,2} = 0,5$. Из (2.2)–(2.3) и информации о поведении полиномов Лежандра на отрезке [0,1] (см., напр., [14, с. 75–80]) следует, что числа t_n $(n \in \mathbb{N})$ образуют монотонно возрастающую последовательность, имеющую предельной точкой единицу. При этом для произвольных $t_n \leqslant x \leqslant 1$ и любых $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\mathbb{P}_n(x) \geqslant \mathbb{P}_{n+j}(x). \tag{2.4}$$

Первым из основных результатов является теорема 2.1.

Теорема 2.1. *Для любых $n, s, r \in \mathbb{N}$ и всех $0 < \tau \leqslant 1 - t_n$ справедливы равенства*

$$\chi_{n,s,r}(\tau) = 2^r\big(1 - \mathbb{P}_n(1-\tau)\big)^{-s}. \tag{2.5}$$

Из (2.5), в частности, следует, что

$$\chi_{n,s,r}(1 - t_n) = 2^{r+s}.$$

Отметим, что сформулированная Петре и получившая дальнейшее развитие в его работах и работах других математиков идея использования K-функционалов для решения проблем, возникающих в теории интерполяционных пространств (см., напр., [15–17]), нашла применение и в классических задачах теории аппроксимации функций (см., напр., [18–26]).

Запишем определение K-функционала Петре в принятых здесь обозначениях [12]

$$\begin{aligned} K_s(f,\tau) &\stackrel{\mathrm{df}}{=} K_s\big(f,\tau,L_2[-1,1],L_2^s[-1,1]\big) \\ &= \inf\big\{\|f-g\| + \tau\|\mathcal{D}^s g\| : g \in L_2^s[-1,1]\big\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\tau > 0$. Из результатов [12] следует, что для любой функции $f \in L_2[-1,1]$ и произвольного $\tau \in (0,2]$ выполнены неравенства

$$m_s\omega_s^L(f,\tau) \leqslant K_s(f,\tau^s) \leqslant M_s\omega_s^L(f,\tau)\ . \tag{2.7}$$

Здесь m_s и M_s — положительные величины, зависящие только от s.

Вторым из основных результатов является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Для произвольного натурального числа n и любой функции $f \in L_2^r[-1,1]$ выполнено неравенство*

$$E_{n-1}(f) \leqslant \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r K_s\Big(\mathcal{D}^r f, \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big), \tag{2.8}$$

которое является точным в том смысле, что существует элемент $f_1 \in L_2^r[-1,1]$, обращающий (2.8) в равенство.

Пусть B — единичный шар в $L_2[-1,1]$; $\mathcal{L}_n \subset L_2[-1,1]$ — n-мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \subset L_2[-1,1]$ — подпространство коразмерности n; $\Lambda : L_2[-1,1] \to \mathcal{L}_n$ — непрерывный линейный оператор; $\Lambda^\perp : L_2[-1,1] \to \mathcal{L}_n$ — непрерывный оператор проектирования; $\mathcal{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_2[-1,1]$. Величины

$$\begin{aligned}
b_n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]) &= \sup\bigl\{\sup\bigl\{\varepsilon > 0 :\ \varepsilon B \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{M}\bigr\} : \\
&\qquad \mathcal{L}_{n+1} \subset L_2[-1,1]\bigr\}, \\
d_n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]) &= \inf\bigl\{\sup\bigl\{\inf\bigl\{\|f-\varphi\| : \varphi \in \mathcal{L}_n\bigr\} : f \in \mathcal{M}\bigr\} : \\
&\qquad \mathcal{L}_n \subset L_2[-1,1]\bigr\}, \\
\delta_n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]) &= \inf\bigl\{\inf\bigl\{\sup\bigl\{\|f-\Lambda f\| : f \in \mathcal{M}\bigr\} : \\
&\qquad \Lambda L_2[-1,1] \subset \mathcal{L}_n\bigr\} : \mathcal{L}_n \subset L_2[-1,1]\bigr\}, \\
\text{п}_n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]) &= \inf\bigl\{\inf\bigl\{\sup\bigl\{\|f-\Lambda^\perp f\| : f \in \mathcal{M}\bigr\} : \\
&\qquad \Lambda^\perp L_2[-1,1] \subset \mathcal{L}_n\bigr\} : \mathcal{L}_n \subset L_2[-1,1]\bigr\}, \\
d^n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]) &= \inf\bigl\{\sup\bigl\{\|f\| : f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}^n\bigr\} : \mathcal{L}^n \subset L_2[-1,1]\bigr\},
\end{aligned}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, проекционным, гельфандовским n-поперечниками. Учитывая, что $L_2[-1,1]$ является гильбертовым пространством, между перечисленными аппроксимативными характеристиками имеют место следующие соотношения (см., напр., [27])

$$\begin{aligned}
b_n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]) &\leqslant d^n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]) \leqslant d_n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]) \\
&= \text{п}_n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]) = \delta_n(\mathcal{M}; L_2[-1,1]). \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Полагаем

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\bigl(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h\cos\theta\bigr)\,d\theta \quad (h>0).$$

Обозначим через $\widetilde{L}_2^r[-1,1]$ $(r\in\mathbb{N})$ множество функций $f\in L_2[-1,1]$, у которых производные $(r-1)$-го порядка, определяемые традиционным образом, абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат $L_2[-1,1]$. При этом полагаем $f^{(0)} \equiv f$; $\widetilde{L}_2^0[-1,1] \equiv L_2[-1,1]$. Для $f \in \widetilde{L}_2^r[-1,1]$ запишем следующий модуль непрерывности

$$\widetilde{\omega}(f^{(r)},\tau) = \sup\Bigl\{\bigl\|\sqrt{(1-x^2)^r}\ [f^{(r)}(x) - f_h^{(r)}(x)]\bigr\| :\ 0 < h \leqslant \tau\Bigr\}.$$

Под $\widetilde{W}_\omega^r$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ понимаем класс функций $f \in \widetilde{L}_2^r[-1,1]$, r-тые производные которых при любом $0 < \tau \leqslant 2$ удовлетворяют условию

$$\widetilde{\omega}(f^{(r)},\tau) \leqslant c\cdot\omega(\tau)\ ,$$

где $\omega(\tau)$ — некоторый фиксированный модуль непрерывности, а $c > 0$ — постоянная. В работе А. А. Абилова [28] было показано, что при $n > r$ имеют место соотношения

$$d_n\big(\widetilde{W}^r_\omega; L_2[-1,1]\big) \asymp n^{-r}\omega(n^{-1}).$$

Напомним [29, с. 25], что неубывающую на $[0,\infty)$ функцию $\Psi(t)$ называют k-мажорантой ($k \in \mathbb{N}$), если функция $t^{-k}\Psi(t)$ не возрастает на $(0,\infty)$, $\Psi(t) \to 0$ при $t \to 0$ и $\Psi(0) = 0$. В случае $k = 1$ условимся называть функцию $\Psi(t)$ мажорантой.

Пусть $\Psi(t)$ есть некоторая мажоранта. Через $W^r(K_s,\Psi)$ $(r,s \in \mathbb{N})$ обозначим класс функций $f \in L^r_2[-1,1]$, у которых r-тые сильные производные по Лежандру $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяют условию $K_s(\mathcal{D}^r f,\tau) \leqslant \Psi(\tau)$ для любого $0<\tau\leqslant 2$. Исходя из формулы (2.7), можно сделать вывод о том, что введенный класс является вполне естественным, поскольку K-функционал (2.6), используемый для его определения, играет ту же роль, что и модуль непрерывности соответствующего порядка при определении традиционных функциональных классов, например $\widetilde{W}^r_\omega$.

Теорема 2.3. *Пусть Ψ — некоторая мажоранта, определяющая класс функций $W^r(K_s,\Psi)$ $(r,s \in \mathbb{N})$. Тогда для произвольного натурального числа n имеют место равенства*

$$p_n(W^r(K_s,\Psi);\ L_2[-1,1]) = \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^r \Psi\left(\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^s\right), \tag{2.10}$$

где $p_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

3. Доказательство теоремы 2.1

Для произвольной функции $f \in L_2[-1,1]$ запишем ее разложение в ряд Лежандра

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\mathbb{P}_k(x), \tag{3.1}$$

где $\mathbb{P}_k (k \in \mathbb{Z}_+)$ — полиномы Лежандра, а равенство в (3.1) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2[-1,1]$; коэффициенты разложения равны

$$a_k(f) = \frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathbb{P}_k(x)\,dx.$$

Учитывая, что для $f \in L_2[-1,1]$ справедливы равенства [12]

$$a_k(\tau_h(f)) = \mathbb{P}_k(h)a_k(f),$$

где $k \in \mathbb{Z}_+;\ h \in [-1,1]$, запишем разложение в ряд по многочленам Лежандра функции $\Delta_h^s f (s \in \mathbb{N})$, воспользовавшись методом математической индукции

$$\triangle_h^s f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\mathbb{P}_k(h))^s a_k(f)\mathbb{P}_k(x). \tag{3.2}$$

Используя равенство Парсеваля и (3.2), запишем

$$\|\triangle_h^s f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1-\mathbb{P}_k(h))^{2s}}{2k+1}\ a_k^2(f) \geqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{2(1-\mathbb{P}_k(h))^{2s}}{2k+1}\ a_k^2(f). \tag{3.3}$$

Известно (см., напр., [30, с. 112]), что какова бы ни была функция $f \in L_2[-1,1]$, последовательность частных сумм

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)\mathbb{P}_k(x)$$

ее ряда Лежандра (3.1) сходится к ней самой в метрике пространства $L_2[-1,1]$. При этом в силу теоремы Теплера (см., напр., [30, с. 102]) и равенства Парсеваля получим

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2}{2k+1}a_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{3.4}$$

Полагая $t_n \leqslant h < 1$ и учитывая неравенство (2.4) и соотношение (3.4), из (3.3) имеем:

$$\|\triangle_h^s f\|^2 \geqslant (1-\mathbb{P}_n(h))^{2s}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2a_k^2(f)}{2k+1} = (1-\mathbb{P}_n(h))^{2s}E_{n-1}^2(f). \tag{3.5}$$

Пусть $h = 1-\tau$, где $0 < \tau \leqslant 1 - t_n$. Тогда из (3.5) получим

$$\|\triangle_{1-\tau}^s f\| \geqslant (1-\mathbb{P}_n(1-\tau))^s\, E_{n-1}(f). \tag{3.6}$$

В силу определения модуля непрерывности s-го порядка (1.1) и неравенства (3.6) имеем

$$E_{n-1}(f) \leqslant \frac{\omega_s^L(f,\tau)}{(1-\mathbb{P}_n(1-\tau))^s} \qquad (0 < \tau \leqslant 1 - t_n). \tag{3.7}$$

В [12, с. 285] отмечалось, что между коэффициентами Лежандра $a_k(f)$ функции $f \in L_2^r[-1,1]$ и ее сильной производной r-го порядка $\mathcal{D}^r f$ существует следующая связь

$$\Big(\frac{k(k+1)}{2}\Big)^r a_k(f) = a_k(\mathcal{D}^r f) \qquad (k \in \mathbb{Z}_+). \tag{3.8}$$

Используя (3.4) и (3.8), получим

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &\leqslant \Big\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{2k+1}\Big(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\Big)^{2r} a_k^2(f)\Big\}^{1/2} \\ &= \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \Big\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{2k+1}\Big(\frac{k(k+1)}{2}\Big)^{2r} a_k^2(f)\Big\}^{1/2} \\ &= \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \Big\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{2k+1}\; a_k^2(\mathcal{D}^r f)\Big\}^{1/2} \\ &= \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r E_{n-1}(\mathcal{D}^r f). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для произвольной, отличной от константы функции $f \in L_2^r[-1,1]$ из (3.7) и (3.9) имеем

$$E_{n-1}(f) \leqslant \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^r \frac{\omega_s^L(\mathcal{D}^r f, \tau)}{(1 - P_n(1-\tau))^s} \quad (0 < \tau \leqslant 1 - t_n). \tag{3.10}$$

Оценка сверху

$$\chi_{n,s,r}(\tau) \leqslant 2^r (1 - \mathbb{P}_n(1-\tau))^{-s} \tag{3.11}$$

следует из соотношений (2.1) и (3.10).

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbb{P}_n(x)$. В [12] отмечено, что

$$\mathcal{D}^r \mathbb{P}_n(x) = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r \mathbb{P}_n(x)\ , \tag{3.12}$$

где $x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{Z}_+,\ r \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$E_{n-1}(f_0) = \|\mathbb{P}_n\| = \Big(\frac{2}{2n+1}\Big)^{1/2}$$

и в силу (3.2)

$$\triangle_h^s \mathbb{P}_n(x) = (1 - \mathbb{P}_n(h))^s \mathbb{P}_n(x)\,,$$

то на основании (3.12) при $0 < \tau \leqslant 1 - t_n$ запишем

$$\omega_s^L(\mathcal{D}^r f_0,\tau)=\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r\sup\big\{\|\triangle_h^s\mathbb{P}_n\|:\ 1-\tau\leqslant h\leqslant 1\big\}$$
$$=\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r\Big(\frac{2}{2n+1}\Big)^{1/2}\sup\big\{(1-\mathbb{P}_n(h))^s:\ 1-\tau\leqslant h\leqslant 1\big\}$$
$$=\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r\Big(\frac{2}{2n+1}\Big)^{1/2}\big(1-\mathbb{P}_n(1-\tau)\big)^s. \quad (3.13)$$

Отсюда имеем

$$\chi_{n,s,r}(\tau)\geqslant\frac{E_{n-1}(f_0)(n(n+1))^r}{\omega_s^L(\mathcal{D}^r f_0,\tau)}=2^r(1-\mathbb{P}_n(1-\tau))^{-s}. \qquad (3.14)$$

Сопоставив оценки (3.11) и (3.14), получим требуемое равенство (2.5), чем и завершим доказательство. □

Из теоремы 2.1 имеем

Следствие 3.1. *Для любых $n,r\in\mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\sup\Big\{\frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)}\ :f\in L_2^r[-1,1],\ f\not\equiv\mathrm{const}\Big\}=\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r. \qquad (3.15)$$

4. Доказательство теоремы 2.2

Пусть f — любая функция из $L_2^r[-1,1]$. Из (3.15) имеем

$$E_{n-1}(f)\leqslant\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)\leqslant\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r\|\mathcal{D}^r f-S_{n-1}(g)\|, \quad (4.1)$$

где $S_{n-1}(g)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Лежандра произвольной функции $g\in L_2^s[-1,1]$. Используя неравенство треугольника для нормы и соотношения (3.4), (3.15) и (4.1), для величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ получим:

$$E_{n-1}(f)\leqslant\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r\big\{\|\mathcal{D}^r f-g\|+\|g-S_{n-1}(g)\|\big\}$$
$$\leqslant\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r\Big\{\|\mathcal{D}^r f-g\|+\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\|\mathcal{D}^s g\|\Big\}. \quad (4.2)$$

Левая часть цепочки неравенств (4.1)–(4.2) не зависит от функции g. Поэтому перейдя в ее правой части к точной нижней грани по $g\in L_2^s[-1,1]$ и учитывая определение K-функционала (2.6), запишем требуемое соотношение (2.8).

Используя соотношение (2.6), в котором полагаем $g\equiv 0$, для произвольного алгебраического полинома $\pi_n\in\mathcal{P}_n$ получим оценку сверху

$$K_s(\pi_n,\tau)\leqslant\|\pi_n\|. \qquad (4.3)$$

Поскольку $\pi_n \in L_2^s[-1,1]$, то в силу формулы (2.6), в правой части которой фиксируем $g \equiv \pi_n$, имеем

$$K_s(\pi_n, \tau) \leqslant \tau \|\mathcal{D}^s \pi_n\|. \tag{4.4}$$

Пусть, например, $f_1(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \Big(\dfrac{2n+1}{2}\Big)^{1/2} \mathbb{P}_n(x)$. Используя соотношение (3.12), равенство

$$\int_{-1}^{1} \mathbb{P}_m(x)\mathbb{P}_n(x)\,dx = \Big\{0, \text{ если } m \neq n;\ \ \frac{2}{2n+1}, \text{ если }\ m = n\Big\} \tag{4.5}$$

и формулу (4.3), из (2.8) получим

$$1 = E_{n-1}(f_1) \leqslant \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r K_s\Big(\mathcal{D}^r f_1, \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big)$$
$$\leqslant \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \|\mathcal{D}^r f_1\| = 1,$$

чем и завершим доказательство.

5. Поперечники классов функций, определенных при помощи усредненных модулей непрерывности s-го порядка

Обозначим через HW_s^r, где $0 < H < 1;\ r, s \in \mathbb{N}$, класс функций $f \in L_2^r[-1,1]$, у которых сильные производные r-го порядка $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяют условию

$$\int_0^H \omega_s^L(\mathcal{D}^r f, \tau)\,d\tau \leqslant 1.$$

Следующая теорема является в определенном смысле аналогом теоремы 2 из работы Л. В. Тайкова [2] для пространства $L_2[-1,1]$.

Теорема 5.1. *Если для натурального числа n выполнено условие $H \leqslant 1 - t_n$, то справедливы равенства*

$$p_n(HW_s^r; L_2[-1,1]) = \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \bigg(\int_0^H (1 - \mathbb{P}_n(1-\tau))^s\,d\tau\bigg)^{-1}, \tag{5.1}$$

где $p_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников, рассмотренных в п. 2.

Доказательство. Пусть для некоторого числа $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $H \leqslant 1 - t_n$. Перепишем формулу (3.10) в следующем виде

$$\Big(1 - \mathbb{P}_n(1-\tau)\Big)^s E_{n-1}(f) \leqslant \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \omega_s^L(\mathcal{D}^r f, \tau), \qquad (5.2)$$

где $0 < \tau \leqslant 1 - t_n$, и проинтегрируем обе части неравенства (5.2) по τ в пределах от 0 до H. Используя определение класса HW_s^r и соотношение (2.9), запишем оценки сверху

$$\begin{aligned} p_n(HW_s^r; L_2[-1,1]) &\leqslant d_n(HW_s^r; L_2[-1,1]) \\ &\leqslant \sup\big\{E_{n-1}(f) : f \in HW_s^r\big\} \\ &\leqslant \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \left(\int\limits_0^H \big(1 - \mathbb{P}_n(1-\tau)\big)^s \, d\tau\right)^{-1}. \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Для получения оценок снизу рассмотрим шар

$$B_{n+1}^* \overset{\text{df}}{=} \left\{\pi_n \in \mathcal{P}_n : \|\pi_n\| \leqslant \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \left(\int\limits_0^H \big(1 - \mathbb{P}_n(1-\tau)\big)^s \, d\tau\right)^{-1}\right\}.$$

Используя формулы (3.2) и (3.8), имеем

$$\triangle_h^s \mathcal{D}^r \pi_n(x) = \sum_{k=1}^n \Big(\frac{k(k+1)}{2}\Big)^r \Big(1 - \mathbb{P}_k(h)\Big)^s a_k(\pi_n) \mathbb{P}_k(x)\ . \qquad (5.4)$$

Пусть $t_n \leqslant h \leqslant 1$. Из (5.4), равенства Парсеваля и определения модуля непрерывности s-го порядка (1.1) для $0 < \tau \leqslant 1 - t_n$ имеем

$$\begin{aligned} \omega_s^L(\mathcal{D}^r \pi_n, \tau) &\leqslant \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r \\ &\times \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^n \big(1 - \mathbb{P}_k(h)\big)^{2s} \frac{2a_k^2(\pi_n)}{2k+1}\right)^{1/2} : 1 - \tau \leqslant h \leqslant 1\right\}. \end{aligned} \qquad (5.5)$$

В силу выбора точки t_n (см. п. 2) при любых $h \in [1-\tau; 1]$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ справедливы неравенства (см., напр., [13, с. 214]; [31, с. 126])

$$\mathbb{P}_k(h) \geqslant \mathbb{P}_n(h)\ . \qquad (5.6)$$

С учетом (5.6) из (5.5) получим

$$\begin{aligned} \omega_s^L(\mathcal{D}^r \pi_n, \tau) &\leqslant \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r \|\pi_n\| \sup\big\{(1 - \mathbb{P}_n(h))^s : 1 - \tau \leqslant h \leqslant 1\big\} \\ &= \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r \Big(1 - \mathbb{P}_n(1-\tau)\Big)^s \|\pi_n\| \quad (0 < \tau \leqslant 1 - t_n). \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Проинтегрировав по τ в пределах от 0 до H обе части неравенства (5.7), для произвольного полинома $\pi_n \in B^*_{n+1}$ имеем

$$\int\limits_0^H \omega_s^L(\mathcal{D}^r\pi_n,\tau)\,d\tau \leqslant \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r \|\pi_n\| \int\limits_0^H \big(1-\mathbb{P}_n(1-\tau)\big)^s\,d\tau \leqslant 1.$$

Следовательно, справедливо включение $B^*_{n+1} \subset HW^r_s$.

Используя (2.9) и определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценки снизу

$$p_n(HW^r_s;L_2[-1,1]) \geqslant b_n(HW^r_s;L_2[-1,1]) \geqslant b_n(B^*_{n+1};L_2[-1,1])$$
$$\geqslant \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \left(\int\limits_0^H \Big(1-\mathbb{P}_n(1-\tau)\Big)^s d\tau\right)^{-1}. \quad (5.8)$$

Требуемые равенства (5.1) получаем из сопоставления неравенств (5.3) и (5.8), чем и завершим доказательство теоремы 5.1 $\square$

6. Доказательство теоремы 2.3

Используя данное в п. 2 определение класса $W^r(K_s,\Psi)$, формулу (2.9), связывающую между собой различные n-поперечники, а также неравенство (2.8), запишем оценки сверху

$$p_n\big(W^r(K_s,\Psi);L_2[-1,1]\big) \leqslant d_n\big(W^r(K_s,\Psi);L_2[-1,1]\big)$$
$$\leqslant \sup\big\{E_{n-1}(f):\ f\in W^r(K_s,\Psi)\big\}$$
$$\leqslant \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big). \quad (6.1)$$

Для нахождения оценок снизу рассмотрим в соответствии с (2.9) бернштейновский n-поперечник $b_n\big(W^r(K_s,\Psi);L_2[-1,1]\big)$ и введем в подпространстве $\mathcal{P}_n$ следующий шар

$$B_{n+1} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Big\{\pi_n\in\mathcal{P}_n:\ \|\pi_n\| \leqslant \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r \Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big)\Big\}.$$

Покажем, что в рассматриваемом нами пространстве $L_2[-1,1]$ имеет место своеобразный аналог неравенства С. Н. Бернштейна для алгебраических полиномов. Пусть π_n — произвольный полином n-той степени, имеющий следующее разложение в ряд по многочленам Лежандра

$$\pi_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(\pi_n)\mathbb{P}_k(x)\ .$$

Учитывая линейность оператора дифференцирования $\mathcal{D}^r$ и равенство (3.12), запишем

$$\mathcal{D}^r\pi_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k(k+1)}{2}\Big)^r a_k(\pi_n)\mathbb{P}_k(x). \tag{6.2}$$

Используя равенство Парсеваля и соотношение (6.2), имеем

$$\|\mathcal{D}^r\pi_n\| = \left\{\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k(k+1)}{2}\Big)^{2r}\ \frac{2a_k^2(\pi_n)}{2k+1}\right\}^{1/2} \leqslant \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r \|\pi_n\|. \tag{6.3}$$

Из приведенного в п. 2 определения мажоранты Ψ, следует, что для произвольных $0<\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant 2$ выполнено неравенство

$$\frac{\Psi(\tau_1)}{\Psi(\tau_2)} \geqslant \frac{\tau_1}{\tau_2}. \tag{6.4}$$

Покажем справедливость включения $B_{n+1}\subset W^r(K_s,\Psi)$. Для этого необходимо убедиться в том, что для произвольного полинома $\pi_n\in B_{n+1}$ имеет место неравенство

$$K_s(\mathcal{D}^r\pi_n,\tau)\leqslant\Psi(\tau) \qquad \forall\,\tau\in(0,2]. \tag{6.5}$$

Рассмотрим два случая: $0<\tau\leqslant\big(\frac{2}{n(n+1)}\big)^s$ и $\big(\frac{2}{n(n+1)}\big)^s\leqslant\tau\leqslant 2$. Пусть сперва $0<\tau\leqslant\big(\frac{2}{n(n+1)}\big)^s$. Используя формулы (3.4), (6.3) и (6.4), где $\tau_1=\tau$ и $\tau_2=\big(\frac{2}{n(n+1)}\big)^s$, для любого элемента $\pi_n\in B_{n+1}$ получим

$$\begin{aligned} K_s(\mathcal{D}^r\pi_n,\tau) &\leqslant \tau\|\mathcal{D}^{r+s}\pi_n\| \leqslant \tau\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^{r+s}\|\pi_n\| \\ &\leqslant \tau\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^{s}\Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big) \leqslant \Psi(\tau). \end{aligned}$$

Воспользовавшись в случае $\big(\frac{2}{n(n+1)}\big)^s\leqslant\tau\leqslant 2$ неравенствами (4.3), (6.3) и тем, что мажоранта Ψ есть неубывающая функция, для произвольного полинома $\pi_n\in B_{n+1}$ запишем

$$K_s(\mathcal{D}^r\pi_n,\tau)\leqslant\|\mathcal{D}^r\pi_n\|\leqslant\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^r\|\pi_n\|\leqslant\Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big)\leqslant\Psi(\tau).$$

Следовательно, соотношение (6.5) имеет место. Используя определение бернштейновского n-поперечника и формулу (2.9), запишем

$$\begin{aligned} p_n\Big(W^r(K_s,\Psi);L_2[-1,1]\Big) &\geqslant b_n\Big(W^r(K_s,\Psi);L_2[-1,1]\Big) \\ &\geqslant b_n\Big(B_{n+1};L_2[-1,1]\Big)\geqslant\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r\Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Сопоставив оценки сверху (6.1) и оценки снизу (6.6), получаем равенства (2.10), чем и завершим доказательство теоремы 2.3.

7. Некоторые следствия из теорем 2.3 и 5.1

Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций действительного переменного рассматривали, например, А. В. Ефимов, А. Ф. Тиман, Н. П. Корнейчук, В. И. Бердышев, С. Милорадович, С. А. Теляковский, А. И. Степанец и другие. С нашей точки зрения подобная задача представляет определенный интерес и в рассматриваемом здесь случае.

Следствие 7.1. *Для любого натурального числа n имеет место равенство*

$$\sup\Big\{|a_n(f)| : f \in W^r(K_s, \Psi)\Big\} = \frac{2^{r-1/2}(2n+1)^{1/2}}{(n(n+1))^r}\,\Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big). \quad (7.1)$$

Доказательство. Учитывая формулу (4.5), запишем

$$a_n(f) = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\Big[f(x) - S_{n-1}(f,x)\Big]\mathbb{P}_n(x)\,dx.$$

Применив далее неравенство Гельдера и используя соотношения (3.4) и (6.1), имеем оценку сверху

$$\sup\Big\{|a_n(f)| : f \in W^r(K_s, \Psi)\Big\} \leqslant \Big(\frac{2n+1}{2}\Big)^{1/2}\sup\Big\{E_{n-1}(f) : f \in W^r(K_s, \Psi)\Big\} \leqslant \frac{2^{r-1/2}(2n+1)^{1/2}}{(n(n+1))^r}\Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big). \quad (7.2)$$

Для получения оценки снизу введем функцию

$$f_2(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{2^{r-1/2}(2n+1)^{1/2}}{(n(n+1))^r}\,\Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big)\mathbb{P}_n(x).$$

Поскольку, с учетом (4.5), норма

$$\|f_2\| = \Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^r\Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big),$$

то очевидно, что полином f_2 принадлежит рассмотренному в ходе доказательства теоремы 2.3 шару B_{n+1}радиуса $\big(\frac{2}{n(n+1)}\big)^r\Psi\big(\big(\frac{2}{n(n+1)}\big)^s\big)$, а значит и классу $W^r(K_s, \Psi)$. Тогда

$$\sup\Big\{|a_n(f)| : f \in W^r(K_s, \Psi)\Big\}$$
$$\geqslant |a_n(f_2)| = \frac{2n+1}{2}\left|\int\limits_{-1}^{1} f_2(x)\mathbb{P}_n(x)\,dx\right|$$
$$= \frac{2^{r-1/2}(2n+1)^{1/2}}{(n(n+1))^r}\,\Psi\Big(\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^s\Big). \quad (7.3)$$

Равенство (7.1) следует из сопоставления соотношений (7.2) и (7.3), чем и завершается доказательство. □

Исходя из результатов [21–24], приведем примеры нескольких семейств функций, являющихся мажорантами. Одним из них служит множество функций

$$\Psi_\varphi(t) = \frac{1}{t^\mu}\int\limits_0^t \varphi(u)\,du \qquad (0 < t \leqslant 2). \quad (7.4)$$

Здесь $0 < \mu < 1$, а φ есть положительная интегрируемая по Риману функция, удовлетворяющая одному из следующих условий:

1. $\varphi(t)$ не убывает на отрезке $[0,2]$ и при любом $0 \leqslant t \leqslant 2$ для нее справедливо неравенство $\alpha\, t^\nu \leqslant \varphi(t) \leqslant \beta t^\nu$, где $0 < \nu \leqslant \mu$ и $0 < \beta/\alpha \leqslant (1+\mu)/(1+\nu)$;
2. $0 < q \leqslant \varphi(t) \leqslant Q$ для любого $0 \leqslant t \leqslant 2$, где $\max\{\mu; 1/(1+\mu)\} < q/Q \leqslant 1$.

Другим примером может служить семейство функций

$$\widetilde{\Psi}_\gamma(t) = \int\limits_0^t u^{-\alpha}\gamma(u)\,du + t\int\limits_t^2 u^{-(1+\alpha)}\gamma(u)\,du\ , \quad (7.5)$$

где $0 < \alpha < 1$, а γ есть произвольная положительная функция, определенная на сегменте $[0,2]$ и интегрируемая на нем по Риману.

И, наконец, в качестве мажоранты может выступать произвольный выпуклый вверх модуль непрерывности, поскольку для него условие (6.4) будет выполнено автоматически.

Используя формулировки теоремы 2.3 и следствия 7.1, а также вид мажорант (7.4) и (7.5), приведем еще одно

Следствие 7.2. *Для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$p_n\big(W^r(K_s, \Psi_\varphi); L_2[-1,1]\big)$$

$$= \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{1/2} \sup\big\{|a_n(f)| : f \in W^r(K_s, \Psi_\varphi)\big\}$$
$$= \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{r-s\mu} \int\limits_0^{(\frac{2}{n(n+1)})^s} \varphi(u)\,du;$$

$$p_n\big(W^r(K_s, \widetilde{\Psi}_\gamma); L_2[-1,1]\big)$$
$$= \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{1/2} \sup\big\{|a_n(f)| : f \in W^r(K_s, \widetilde{\Psi}_\gamma)\big\}$$
$$= \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{r} \int\limits_0^{(\frac{2}{n(n+1)})^s} u^{-\alpha}\gamma(u)\,du$$
$$+ \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{r+s} \int\limits_{(\frac{2}{n(n+1)})^s}^{2} u^{-(1+\alpha)}\gamma(u)\,du,$$

где $p_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников, перечисленных в п.* 2.

Аналогично доказательству следствия 7.1 доказывается

Следствие 7.3. *Если для натурального числа* n *выполнено условие* $0 < H \leqslant 1 - t_n$*, то имеет место равенство*

$$\sup\big\{|a_n(f)| : f \in HW_s^r\big\} = \frac{2^{r-1/2}(2n+1)^{1/2}}{(n(n+1))^r} \left(\int\limits_0^H (1-\mathbb{P}_n(1-\tau))^s\,du\right)^{-1}.$$

Литература

[1] Н. И. Черных, *О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в* L_2 // Мат. заметки, **2** (1967), N 2, 513–522.

[2] Л. В. Тайков, *Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из* L_2 // Мат. заметки, **20** (1976), N 3, 433–438.

[3] В. И. Иванов, О. И. Смирнов, *Константы Джексона и константы Юнга в пространствах* L_p. Тула: Тульский ун-т, 1995.

[4] А. А. Лигун, *Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве* L_2 / Мат. заметки, **43** (1988), N 6, 757–769.

[5] В. А. Юдин, *Диофантовы приближения в экстремальных задачах* // Доклады АН СССР, **251** (1980), N 1, 54–57.

[6] А. Г. Бабенко, *О точной константе в неравенстве Джексона в* L_2 // Мат. заметки, **39** (1986), N 5, 651–664.

[7] А. Г. Бабенко, Н. И. Черных, В. Т. Шевалдин, *Неравенства Джексона–Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности* // Мат. заметки, **65** (1999), N 6, 928–932.

[8] М. Г. Есмаганбетов, *Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона* // Мат. заметки, **66** (1999), N 6, 816–820.

[9] С. Б. Вакарчук, *О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников* // Мат. заметки, **70** (2001), N 3, 334–345.

[10] С. Б. Вакарчук, *Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2* // Мат. заметки, **78** (2005), N 5, 792–796.

[11] А. Г. Бабенко, *Точное неравенство Джексона-Стечкина для L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах* // Известия РАН. Серия матем., **62** (1998), N 6, 27–52.

[12] P. L. Butzer, *Legendre transform methods in the solution of basic problems in algebraic approximation* // Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, Budapest, **35** (1980), (Functious, Series, Operators), 277–301.

[13] Г. Сеге, *Ортогональные многочлены.* Физматгиз, 1962.

[14] В. М. Бабич, Н. С. Григорьева, *Ортогональные разложения и метод Фурье.* ЛГУ, 1983.

[15] J. Peetre, *A Theory of interpolation of normed spaces.* Notes Universidade de Brasilia, 1963.

[16] Й. Берг, Й. Лёфстрем, *Интерполяционные пространства.* Мир, 1980.

[17] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств.* Мир, 1986.

[18] J. Peetre, *On the connection between the theory of interpolation spaces and approximation theory.* Colloqium on Constructive Function Theory, Budapest, 1969.

[19] R. A. DeVore, *Pointwise approximation by polinomials and splines,* Теория приближения функций (Труды Международной конференции по теории приближения функций, Калуга, 24–28 июня 1975 г.), Наука, 132–141.

[20] Г. В. Радзиевский, *Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени* // Мат. сборник, **189** (1998), N 4, 83–124.

[21] С. Б. Вакарчук, *О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций* // Мат. заметки, **65** (1999), N 2, 186–193.

[22] С. Б. Вакарчук, *K-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2* // Мат. заметки, **66** (1999), N 4, 494–499.

[23] S. B. Vakarchuk, *Widths of functional classes and extremal subspaces,* (Ninth Intern. Conf. of Approximation Theory. Nashville, Tennessee, USA, Jan. 3–6, 1998), Abstracts, 57–58.

[24] С. Б. Вакарчук, *О точных значениях n-поперечников функциональных классов в банаховых пространствах H_p* // Доклады НАН Украины, (2000), N 9, 7–10.

[25] С. Б. Вакарчук, *О K-функционалах и точных значениях n-поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$* // Мат. заметки, **71** (2002), N 4, 522–531.

[26] S. B. Vakarchuk, *On the exact values of widths for certain classes of functions of discrete variable in l_q^2* // East J. on Approxim., **9** (2003), N 3, 323–337.

[27] A. Pinkus, *n-Widths in approximation theory.* Springer, 1985.

[28] А. А. Абилов, *Оценка поперечника одного класса функций в пространтсве L_2* // Мат. заметки, **52** (1992), N 1, 3–8.

[29] И. А. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций.* Наукова думка, 1992.

[30] И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций.* ЛГУ, 1977.

[31] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены.* Наука, 1979.

Сведения об авторах

С. Б. Вакарчук

Академия таможенной службы Украины
ул. Дзержинского, 2/4,
49044, Днепропетровск
Украина
E-Mail: academy@amsu.dnp.ukrpack.net