Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 1, 97 – 115

K-дифференцируемость и K-экстремумы

Игорь В. Орлов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Исследуются свойства компактных экстремумов функционалов в локально выпуклом пространстве, в частности, интегральных функционалов. Рассмотрены примеры.

2000 MSC. 34A40, 49K27, 49K30.

Ключевые слова и фразы. Компактный экстремум, интегральный функционал, локально выпуклое пространство, пространство Соболева.

Введение

Экстремальные задачи вообще, и задачи об экстремумах интегральных функционалов в особенности, играют важную роль в современном анализе и его приложениях. Для решения таких задач используются различные методы (см., например, [1–3]). Одна из главных трудностей, возникающих в этом вопросе, состоит в отсутствии (за исключением тривиального случая) второй сильной производной у интегральных функционалов Эйлера–Лагранжа [1, 4]. Другая сторона проблемы состоит в том, что экстремумы интегральных функционалов разыскиваются, как правило, на некотором компактном множестве. Это исключает применение классических условий экстремума по сильной производной и приводит, как правило, к исследованию в рамках тех или иных обобщений вариационного исчисления [2, 5].

Подход, принятый в настоящей работе (см. также [6–8]), ближе к некоторому ослаблению сильного дифференцирования. Он позволяет применить обобщённые условия Фреше экстремумов функционалов, и в особенности функционала Эйлера–Лагранжа, достигаемых на компактных подмножествах локально выпуклых пространств (ЛВП).

Статья поступила в редакцию 10.05.2004

ISSN 1810 – 3200.

Работа состоит из пяти разделов. В первом разделе вводится нормальная и компактно-нормальная дифференцируемость (K-дифференцируемость) функционалов в ЛВП и исследуется соотношение между ними. По сравнению с [8], определения существенно упрощены и не требуют языка шкал пространств. Во втором разделе изучаются положительно определённые и K-положительно определенные квадратичные формы в ЛВП. Найдены критерии положительной и K-положительной определенности, связь этих понятий.

На этой базе в третьем разделе получены условия экстремума и K-экстремума функционалов в ЛВП в терминах, соответственно, нормальных производных и K-производных. Построен пример K-экстремума, который не является локальным экстремумом. В четвертом разделе работы полученные результаты применены к функционалу Эйлера–Лагранжа $\Phi(y)$. Доказана повторная K-дифференцируемость $\Phi(y)$ в пространстве Соболева, найдены достаточные условия K-экстремума $\Phi(y)$. Наконец, в пятом разделе построен пример функционала Эйлера–Лагранжа, имеющего K-экстремум, который не является локальным экстремумом. В заключении обсуждаются общие принципы и перспективы предложенного подхода.

Всюду далее под λ-топологией [9] в топологическом сопряженном E^* к некоторому ЛВП E понимается топология индуктивного предела банаховых пространств $E^*_t = \{f \in E^* \mid \|f\|^t = \sup_{\|x\|_t \le 1} |f(x)| < \infty\}$, где $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$ — определяющая система полунорм в E.

1. Нормальная и компактно-нормальная дифференцируемость функционалов и форм

Определим вначале нормальную дифференцируемость функционалов.

Определение 1.1. *Пусть E — вещественное ЛВП с определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$, $f : E \to \mathbb{R}$. Назовем функционал f нормально дифференцируемым в точке $x \in E$, если найдется такой индекс $t \in T$, что f дифференцируем в точке x по Фреше относительно полунормы $\|\cdot\|_t$, т. е.*

$$f(x+h) - f(x) = f^{'}(x)h + o(\|h\|_t), \tag{1.1}$$

где $f^{'}(x) \in E^*$, $h \to 0$ в E. Будем говорить, что f непрерывно нормально дифференцируем в точке x, или $f \in C^1(x)$, если отображение $f^{'} : U(x) \to E^*$ непрерывно в λ-топологии E^* (см. введение), где $U(x)$ — некоторая окрестность точки x в E.

Перейдем к компактно-нормальной дифференцируемости.

Определение 1.2. *Пусть C — абсолютно выпуклый компакт в E. Положим $E_C := \operatorname{span} C$ и введем в E_C норму*

$$\|h\|_C := p_C(h), \tag{1.2}$$

где p_C — функционал Минковского множества C.

В обозначениях определения 1.2 скажем, что f компактно-нормально дифференцируем (K-дифференцируем) в точке $x \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта C в E ($C = C(0)$) сужение $f|_{x+E_C}$ дифференцируемо по Фреше в точке x относительно нормы $\|\cdot\|_C$, т. е.

$$f(x+h) - f(x) = f_C^{'}(x)h + o(\|h\|_C), \tag{1.3}$$

где $f_C^{'}(x) \in E_C^*$, $h \in E_C$. Линейный функционал в E (непрерывный на каждом E_C), определяемый равенством

$$f_K^{'}(x)h := f_C^{'}(x)h, \quad h \in E_C \tag{1.4}$$

при всех $C = C(0)$, назовем компактно-нормальной производной (K-производной) функционала f в точке x. Обозначим также E_K^* множество линейных функционалов в E, непрерывных на каждом E_C ($E_K^* \supset E^*$).

Замечание 1.1. Если C_1 и C_2 абсолютно выпуклые компакты, то взяв в (1.3) $C_3 = \operatorname{conv}(C_1 \cup C_2)$, приходим к равенству $f_{C_1}^{'} = f_{C_2}^{'}$ на $E_{C_1} \cap E_{C_2}$; таким образом, определение K-производной (1.4) корректно. Отметим, что близкое по духу понятие малости относительно компактных полунорм давно и плодотворно используется в теории монотонных операторов [1, 2].

Нетрудно видеть, что нормальная дифференцируемость сильнее, вообще говоря, K-дифференцируемости.

Предложение 1.1. *Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ нормально дифференцируем в точке $x \in E$, то f K-дифференцируем в точке x, и $f_K^{'}(x) = f(x)$.*

Доказательство. Пусть C — абсолютно выпуклый компакт в E. Так как C ограничен относительно каждой полунормы $\|\cdot\|_t$, то из (1.2) следует $\|\cdot\|_t \le M_t \cdot \|\cdot\|_C$ в E_C при всех $t \in T$, для некоторых констант $M_t < \infty$. Следовательно, $o(\|\cdot\|_t) = o(\|\cdot\|_C)$ при всех $t \in T$, и каждое сужение $f^{'}(x)|_{E_C}$ непрерывно относительно $\|\cdot\|_C$. Таким образом, из (1.1) следует (1.3) при $f_C^{'}(x) = f^{'}(x)|_{E_C}$, т. е. f K-дифференцируем в точке x. □

Перейдем к производным второго порядка.

Определение 1.3. *Пусть E и F — ЛВП с соответствующими определяющими системами полунорм $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$ и $\{\|\cdot\|^s\}_{s\in S}$, $g : E \to F^*$. Назовем g нормально дифференцируемым в точке $x \in E$, если найдутся такие индексы $t \in T$, $s \in S$ и такая билинейная непрерывная на $E \times F$ форма $g^{'}(x) \in (E, F)^*$, что*

$$(g(x+h) - g(x)) \cdot k = g'(x)(h,k) + o(\|h\|_t \cdot \|k\|^s)$$

при $h \to 0$, $k \to 0$ в F. В частности, назовем функционал $f : E \to \mathbb{R}$ дважды нормально дифференцируемым в точке $x \in E$, если f нормально дифференцируем в некоторой окрестности $U(x)$ точки x, и его нормальная производная $f' : E \supset U(x) \to E^*$ нормально дифференцируема в точке x. В этом случае обозначим $f''(x) := (f')'(x)$. Будем говорить, что f непрерывно дважды нормально дифференцируем в точке x, или $f \in C^2(x)$, если отображение $f'' : U(x) \to (E, E)^*$ непрерывно в точке x относительно λ-топологии $(E, E)^*$.

Определение 1.4. *В обозначениях предыдущего определения, назовем отображение $g : E \to F^*$ компактно-нормально дифференцируемым (K-дифференцируемым) в точке $x \in E$, если для любых абсолютно выпуклых компактов C_1 в E и C_2 в F найдется такая билинейная непрерывная на $E_{C_1} \times F_{C_2}$ форма ${g'}_{C_1C_2}(x) \in (E_{C_1}, F_{C_2})^*$, что*

$$(g(x+h) - g(x)) \cdot k = {g'}_{C_1C_2}(x)(h,k) + o(\|h\|_{C_1} \cdot \|k\|_{C_2})$$

при $h \to 0$ в E, $k \to 0$ в F. Билинейную форму в $E \times F$ (непрерывную на каждом $E_{C_1} \times F_{C_2}$), определяемую равенством

$$g'_K(x)(h,k) = g^{'}_{C_1C_2}(x)(h,k) \qquad (h \in E_{C_1}, k \in F_{C_2})$$

при всех $C_1 = C_1(0)$ в E и $C_2 = C_2(0)$ в F, назовем компактно-нормальной производной (K-производной) отображения g в точке x.

В частности, назовем функционал $f : E \to \mathbb{R}$ дважды K-дифференцируемым в точке $x \in E$, если f K-дифференцируем в некоторой окрестности $U(x)$ точки x, и его K-производная ${f'}_K : E \supset U(x) \to E^*_K$ K-дифференцируема в точке x. В этом случае обозначим ${f''}_K(x) := ({f'}_K)'_K(x)$.

По аналогии с предложением 1.1 легко проверить следующее

Предложение 1.2. *Если отображение $g : E \to F^*$ нормально дифференцируемо в точке $x \in E$, то g K-дифференцируемо в точке x,* *и* $g'_K(x) = g'(x)$. *В частности, для функционалов* $f : E \to \mathbb{R}$ *верны равенства:*

$$f''_K(x) = f''(x) \quad \textit{и} \quad f''_K(x) = (f')'_K(x)$$

при наличии соответствующих нормальных производных.

Рассмотрим соотношение компактной и нормальной дифференцируемости в случае слабой топологии.

Пример 1.1. Пусть E — рефлексивное вещественное банахово пространство. Перейдем к слабой топологии $\sigma(E)$ в E. Нетрудно убедиться, что определение нормальной дифференцируемости функционала $f : E \to \mathbb{R}$ приводится к следующему: для некоторого разложения в прямую сумму

$$E = E_1 \oplus E_2, \qquad \operatorname{codim} E_1 = \dim E_2 < \infty, \quad h = h_1 + h_2,$$

верно

$$f(x + h_1 + h_2) - f(x) = f'(x)(h_1 + h_2) + o(\|h_2\|), \quad h_2 \in E_2.$$

В частности $f(x + h_1) - f(x) = f'(x)h_1$, и, таким образом, нормальная дифференцируемость в E_σ строго сильнее дифференцируемости по Фреше в E. В то же время, ввиду слабой компактности единичного шара в E и ограниченности всех слабых компактов в E, K-дифференцируемость в E_σ совпадает с дифференцируемостью по Фреше в E. Следовательно, нормальная дифференцируемость в E_σ строго сильнее K-дифференцируемости. То же верно в случае отображений $g : E \to F^*$ при переходе к слабым топологиям в E и F.

Замечание 1.2. По аналогии с предыдущими определениями можно сформулировать определения нормальной дифференцируемости и K-дифференцируемости в случае отображений E в $(F_1, \ldots, F_n)^*$ и $(F_1, \ldots, F_n)^*_K$, значениями которых являются, соответственно, n-линейные непрерывные и n-линейные K-непрерывные формы на $F_1 \times \cdots \times F_n$.

Отметим также, что общая конструкция нормального дифференцирования для отображений из ЛВП в ЛВП рассмотрена в [8] и основана на разложении операторных пространств в индуктивные шкалы ЛВП. В случае функционалов возможно существенное упрощение конструкции, изложенное в данном разделе.

2. Положительно определенные и K-положительно определенные квадратичные формы в ЛВП

Результаты этого раздела послужат базой для получения достаточных условий экстремумов и K-экстремумов в терминах нормальных производных и K-производных (см. также [6–8]).

Определение 2.1. *Пусть φ — непрерывная квадратичная форма в отделимом вещественном ЛВП E, порожденная билинейной непрерывной формой g в E^2. Назовем форму φ невырожденной, если отображение*

$$g_1 : E \ni h \to g(h, \cdot) \in E^*$$

является изоморфизмом E в E^* относительно λ-топологии в E^*. Если φ невырожденна и $\varphi \geq 0$, то назовем φ положительно определенной формой: $\varphi \gg 0$.

Замечание 2.1. Отметим, что даже в банаховом случае определение 2.1 шире классического [10], поскольку речь идет лишь об изоморфном вложении $E \hookrightarrow E^*$, типичном в теории обобщенных функций.

Предложение 2.1. *Пусть $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$ — определяющая система полунорм в E. Квадратичная форма φ в E положительно определена в том и только том случае, если для любого $t_1 \in T$ найдутся такие $t_2 \in T$ и $C > 0$, что при всех $h \in E$:*

$$\|h\|_{t_1} \leq C \cdot \|g(h, \cdot)\|^{t_2}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Согласно теореме о каноническом изоморфизме между линейными и билинейными операторами в ЛВП [11], g можно рассматривать (с сохранением ко-норм) как непрерывный линейный оператор g_1 из E в E^*. Остается проверить непрерывность обратного оператора $g_1^{-1} : g_1^{-1}(E) \to E$.

Если условие (2.1) выполнено, то

$$(h \neq 0) \Rightarrow (\exists\, t_1 \in T : \|h\|_{t_1} \neq 0) \Rightarrow (\exists\, t_2 \in T : \|g_1(h)\|^{t_2} = \|g(h, \cdot)\|^{t_2} > 0),$$

т.е. оператор g_1 инъективен. Полагая $f = g(h, \cdot)$ перепишем (2.1) в виде:

$$\forall\, t_1 \in T\ \exists\, t_2 \in T\ \exists\, C > 0\ \forall\, f \in g_1(E) :\ \|g_1^{-1}(f)\|_{t_1} \leq C\|f\|^{t_2}, \tag{2.2}$$

что в точности означает непрерывность оператора g_1^{-1}.

Обратно, если g_1^{-1} непрерывен, то подстановка в (2.2) $g(h, \cdot) = f$ приводит к условию (2.1). $\square$

Основным является следующий критерий.

Теорема 2.1. *Квадратичная форма φ в отделимом вещественном ЛВП E положительно определена тогда и только тогда, если для любого $t \in T$ найдется такое $k_t > 0$, что при всех $h \in E$:*

$$\varphi(h) \geq k_t \cdot \|h\|_t^2. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \gg 0$. Зафиксируем $h \in E$, $t \in T$, и выберем, в силу (2.1), такие $t' \in T$ и $h' \in E$, чтобы $\|h'\|_{t'} \leq 1$ и

$$|g(h,h')| \geq \frac{1}{2}\|g(h,\cdot)\|^{t'}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) и (2.1) следует:

$$\|h\|_t \leq 2C \cdot |g(h,h')|. \tag{2.5}$$

Из (2.5) и неравенства Шварца $g(x,y)^2 \leq \varphi(x)\varphi(y)$ получаем:

$$\|h\|_t^2 \leq 4C^2 \cdot \varphi(h)\varphi(h'). \tag{2.6}$$

Наконец, учитывая ограниченность $\varphi(h')$, $|\varphi(h')| \leq M$, из (2.6) находим:

$$\|h\|_t^2 \leq 4C^2 \cdot M \cdot \varphi(h),$$

откуда следует (2.3).

Обратно, если (2.3) выполнено, то при любых $h \in E$, $h' \in E$ и $t' \in T$:

$$|g(h,h')| \leq \|g(h,\cdot)\|^{t'} \cdot \|h'\|_{t'},$$

в частности,

$$\varphi(h) \leq \|g(h,\cdot)\|^{t'} \cdot \|h\|_{t'}. \tag{2.7}$$

Из (2.7) и (2.3) получаем:

$$\|g(h,\cdot)\|^{t'} \cdot \|h'\|_{t'} \geq k_t \cdot \|h\|_t^2. \tag{2.8}$$

Пусть $t' \preceq t$, тогда $\|\cdot\|_{t'} \leq K \cdot \|\cdot\|_t$, и из (2.8) находим:

$$\|h\|_t \leq \frac{K}{k_t}\|g(h,\cdot)\|^{t'},$$

откуда, в силу предложения 2.3, следует положительная определенность φ. □

Перейдем к K-положительно определенным формам.

Определение 2.2. *Пусть φ — квадратичная форма в вещественном отделимом ЛВП E, порожденная билинейной формой g на E^2. Назовем форму φ компактно-невырожденной (K-невырожденной), если для любого абсолютно выпуклого компакта C в E сужение $\varphi|_{E_C}$ — невырожденная квадратичная форма относительно $\|\cdot\|_C$, т.е., в соответствии с определением 2.1, отображение*

$$g_1^C : E_C \ni h \to g^C(h, \cdot) \in E_C^*$$

является изоморфизмом E_C в E_C^* (здесь g^C — сужение g на E_C^2).

Если φ K-невырождена и $\varphi \gg 0$, то назовем φ компактно положительно определенной (K-положительно определенной) формой:

$$\varphi \gg 0 \, (\mathrm{mod}\, K).$$

Получим аналоги утверждений 2.3 и 2.4.

Предложение 2.2. *Квадратичная форма φ в отделимом вещественном ЛВП E K-положительно определена в том и только том случае, если для любого абсолютно выпуклого компакта C в E найдется такое $M_C > 0$, что при всех $h \in E_C$:*

$$\|h\|_C \leq M_C \cdot \|g^C(h, \cdot)\|^C.$$

Доказательство. Достаточно к каждому подпространству E_C и сужению $\varphi|_{E_C}$ применить предложение 2.1 (при этом λ-топология в E_C^* порождается ко-нормой $\|\cdot\|^C$). □

Теорема 2.2. *Квадратичная форма φ в отделимом вещественном ЛВП E K-положительно определена в том и только том случае, если для любого абсолютно выпуклого компакта C в E найдется такое $k_C > 0$, что при всех $h \in E_C$:*

$$\varphi(h) \geq k_C \cdot \|h\|_C^2.$$

Доказательство. Достаточно к каждому подпространству E_C и сужению $\varphi|_{E_C}$ применить предложение 2.1. □

Установим, наконец, связь положительной определенности и K-положительной определенности.

Теорема 2.3. *Если $\varphi \gg 0$, то $\varphi \gg 0$ $(\mathrm{mod}\, K)$.*

Доказательство. Пусть C — абсолютно выпуклый компакт в E, ∂C — граница C в E_C. Для каждого $h \in \partial C$ выберем такой индекс $t = t(h) \in T$, что $\|h\|_t > 0$; тогда, по непрерывности, $\|\cdot\|_t > 0$ в некоторой открытой окрестности $U(h)$ в E_C. Выберем из покрытия $\{U_t(h)\}_{h\in\partial C}$ конечное: $\partial C \subset U_{t_1}(h_1) \cup \ldots \cup U_{t_n}(h_n)$ и индекс $t^0 \in T$, такой, что $t_1, \ldots, t_n \preceq t^0$. Тогда $\|h\|_{t_0} > 0$ при всех $h \in \partial C$, откуда, ввиду компактности ∂C , $\|h\|_{t_0} \geq m > 0$ при всех $h \in \partial C$. Поскольку $\|h\|_C = 1$ при $h \in \partial C$, то приходим к неравенству

$$\|h\|_{t_0} \geq m \cdot \|h\|_C$$

при $h \in \partial C$, а значит, и при всех $h \in E_C$ (в частности, это означает, что нормы $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_{t_0}$ в E_C эквивалентны). Отсюда и из неравенства (2.3) получаем:

$$\varphi(h) \geq k_{t_0} \cdot \|h\|_{t_0}^2 \geq (k_{t_0} \cdot m^2) \cdot \|h\|_C,$$

и остается применить теорему 2.2. □

Пример K-положительно определенной формы, которая не является положительно определенной, будет рассмотрен ниже.

3. Экстремумы и K-экстремумы в ЛВП

Приведем вначале полученные в [8] условия локального экстремума в ЛВП в терминах нормальных производных, обобщающие классические условия экстремума в банаховом пространстве.

Предложение 3.1. *Пусть E — отделимое ЛВП. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ имеет локальный экстремум в точке $x \in E$ и нормально дифференцируем в точке x, то $f'(x) = 0$. Если при этом f дважды нормально дифференцируем в точке x, то $f''(x) \geq 0$.*

Предложение 3.2. *Пусть E — отделимое ЛВП. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ дважды нормально дифференцируем в точке $x \in E$, $f'(x) = 0$ и $f''(x) \gg 0$ ($f''(x) \ll 0$), то f имеет строгий минимум (максимум) в точке x.*

Перейдем к компактным экстремумам.

Определение 3.1. *Пусть E — ЛВП, $f : E \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f имеет компактный экстремум (K-экстремум) в точке $x \in E$, если для всякого абсолютного выпуклого компакта C в E сужение $f|_{x+E_C}$ имеет локальный экстремум в точке x относительно $\|\cdot\|_C$ (т.е. значение f в точке x — экстремальное на некотором множестве $x + \varepsilon C$, $\varepsilon > 0$).*

Отметим, что экстремумы интегральных функционалов, как правило, разыскиваются на некотором компакте. Легко видеть, что K-экстремум — более слабое понятие, чем локальный экстремум.

Предложение 3.3. *Если f имеет локальный экстремум в точке $x \in E$, то f имеет и K-экстремум в точке x.*

Доказательство. Пусть $f(x') \geq f(x)$ в некоторой окрестности $U(x)$ точки x, C – абсолютно выпуклый компакт в E. Так как C ограничено, то, при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $x + \varepsilon C \subset U(x)$, откуда $f(x') \geq f(x)$ при $x' \in x + \varepsilon C$, т.е. f имеет K-минимум в точке x. $\square$

В частности, условия предложения 3.2 достаточны для K-экстремума. Приведем аналоги предложений 3.1–3.2 для K-экстремумов в терминах K-производных.

Предложение 3.4. *Пусть E — отделимое ЛВП. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ имеет K-экстремум в точке $x \in E$ и K-дифференцируем в точке x, то $f'_K(x) = 0$. Если при этом f дважды K-дифференцируем, то $f''_K(x) \geq 0$.*

Доказательство. Достаточно к каждому сужению $f|_{x+E_C}$, где C — абсолютно выпуклый компакт в E, применить предложение 3.1. $\square$

Предложение 3.5. *Пусть E — отделимое ЛВП. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ дважды K-дифференцируем в точке $x \in E$, $f'_K(x) = 0$ и $f''_K(x) \gg 0 \ (\mathrm{mod}\, K)$ ($f''_K(x) \ll 0 \ (\mathrm{mod}\, K)$), то f имеет строгий K-минимум (K-максимум) в точке x.*

Доказательство. Поскольку для любого абсолютно выпуклого компакта C в E верно $f'_K(x) = (f|_{x+E_C})'(x)$ и $f''_K(x) = (f|_{x+E_C})''(x)$, то применяя к каждому сужению $f|_{x+E_C}$ предложение 3.2, приходим к требуемому результату. $\square$

Наиболее полезным в дальнейшем послужит следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть E — отделимое ЛВП. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ дважды K-дифференцируем в точке $x \in E$, $f'_K(x) = 0$ и $f''_K(x) \gg 0$ ($f''_K(x) \ll 0$), то f имеет строгий K-минимум (K-максимум) в точке x.*

Доказательство. В силу теоремы 2.3, из условия $f''_K(x) \gg 0$ следует $f''_K(x) \gg 0 \ (\mathrm{mod} K)$, что позволяет применить предложение 3.5. $\square$

В заключении этого раздела приведем простой пример K-экстремума, который не является локальным экстремумом.

Пример 3.1. Пусть B — замкнутый единичный шар в рефлексивном банаховом пространстве E. Перейдем к слабой топологии $\sigma(E, E^*)$ в E; тогда множество B компактно в E_σ. При этом, поскольку [9] любой, и, в частности, абсолютно выпуклый компакт C в E_σ ограничен в E, то $B \supset \varepsilon C$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|, & x \in B; \\ 1 - \|x\|, & x \notin B. \end{cases}$$

Тогда из определения 3.3 следует, что функционал f (непрерывный в E) имеет строгий K-минимум в нуле, поскольку сужения $f|_{\varepsilon C} > 0$ при $x \neq 0$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Однако f не имеет локального экстремума в нуле (в E_σ), поскольку любая окрестность нуля в E_σ пересекается как с $B \backslash \{0\}$, так и с $E \backslash 2B$.

Отметим, что в рассматриваемой ситуации любой K-экстремум в E_σ является локальным экстремумом в E; при этом, как отмечалось в примере 1.1, K-дифференцируемость в E_σ является сильной дифференцируемостью в E; K-положительная определенность в E_σ также совпадает с положительной определенностью в E. Таким образом, в этом случае классическая теория экстремумов является частным случаем теории K-экстремумов.

4. Повторная K-дифференцируемость и K-экстремумы функционала Эйлера–Лагранжа

Как известно [1], уже в вещественном случае функционал Эйлера–Лагранжа

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx; \qquad y \in \mathrm{W}_2^1([a,b], \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

не является, за исключением вырожденного случая, дважды дифференцируемым по Фреше. Мы покажем, что (даже в случае отображений $y(\cdot)$ в ЛВП) функционал Φ дважды K-дифференцируем. Вначале обобщим понятие пространства Соболева W_2^1 на случай отображений со значениями в ЛВП.

Определение 4.1. *Пусть E — полное вещественное ЛВП с определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$. Определим пространство*

$\mathrm{W}_2^1([a,b],E)$ *как пополнение пространства* $C^1([a,b],E)$ *относительно определяющей системы полунорм*

$$\|y\|_t^{W_2^1} = \left(\int_a^b \|y(x)\|_t^2\, dx + \int_a^b \|y'(x)\|_t^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad t \in T.$$

Замечание 4.1. Аналогичным образом можно ввести пространство $L_2([a,b],E)$ (с полунормами $\|y\|_t^{L_2}$); при этом, очевидно, сохраняется плотное вложение

$$\mathrm{W}_2^1([a,b],E) \hookrightarrow L_2([a,b],E).$$

В [8] доказан следующий результат, обобщаюший известное свойство однократной дифференцируемости по Фреше функционала Эйлера–Лагранжа.

Предложение 4.1. *Пусть* E *— полное вещественное ЛВП. Если вещественная функция* $u = f(x,y,z)$ *непрерывно дифференцируема на* $[a;b] \times E \times E$, *то функционал Эйлера–Лагранжа* (4.1) *непрерывно нормально дифференцируем на* $\mathrm{W}_2^1([a,b],E)$, *причем*

$$\Phi'(y)h = \int_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,y')h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'(x) \Big]\, dx.$$

Следствие 4.1. *В условиях предложения* 4.1, *равенство* $\Phi'(y) = 0$ *выполняется тогда и только тогда, когда экстремаль* $y(\cdot)$ *служит решением вариационного уравнения Эйлера–Лагранжа*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\Big[\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\Big] = 0. \tag{4.2}$$

Базой для доказательства повторной K-дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа служит следующее утверждение [8].

Лемма 4.1. *Пусть* E *и* F *— отделимые ЛВП с определяющими системами полунорм* $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$ *и* $\{\|\cdot\|^s\}_{s\in S}$ *соответственно. Если отображение* $g : E \to F^*$ *непрерывно дифференцируемо на выпуклом компакте* $C \subset E$, *то для всякого* $s \in S$ *найдется такой индекс* $t \in T$, *что* $\sup_{x\in C} \|g(x+h) - g(x) - g'(x)h\|^s = o(\|h\|_t)$ *при* $h \to 0$ *в* E.

Теорема 4.1. *Пусть* E *— полное отделимое вещественное ЛВП. Если вещественная функция* $u = f(x,y,z)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[a,b] \times E \times E$, *то функционал Эйлера–Лагранжа* (4.1) *дважды непрерывно* K*-дифференцируем на* $\mathrm{W}_2^1([a,b],E)$, *причем*

$$\Phi''_K(y)(h,k) = \int\limits_a^b \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,y')(h,k) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')((h',k)+(h,k')) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')(h',k')\Big]\,dx. \quad (4.3)$$

Доказательство. Непосредственное вычисление показывает:

$$(\Phi'(y+h)-\Phi'(y))\cdot k = \int\limits_a^b \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,y')(h(x),k(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,y')((h(x),k'(x)) + (h'(x),k(x))) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')(h'(x),k'(x))\Big]\,dx + \int\limits_a^b \big[r_x^y(h(x),h'(x))\cdot k(x) + r_x^z(h(x),h'(x))\cdot k'(x)\big]\,dx, \quad (4.4)$$

где r_x^y и r_x^z — остаточные члены приращений, соответственно, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ в точке $(x, y(x), y'(x))$.

Пусть C — произвольный абсолютно выпуклый компакт в $F = \mathrm{W}_2^1([a,b],E)$. Тогда, очевидно, множества

$$K = \{y \in y([a,b]) \mid y(\cdot) \in C\} \quad \text{и} \quad K_1 = \{z \in y'([a,b]) \mid y(\cdot) \in C\} \text{ —}$$

абсолютно выпуклые компакты в E. Поскольку $\frac{\partial f}{\partial y} \in C^1$ и $\frac{\partial f}{\partial z} \in C^1$ на выпуклом компакте $[a,b]\times K \times K_1$, то применяя лемму 4.1 к r_x^y и r_x^z, получаем:

$$\frac{\|r_x^y(h(x),h'(x))\|^t}{\|h(x)\|_t + \|h'(x)\|_t} \rightrightarrows 0 \quad \text{и} \quad \frac{\|r_x^z(h(x),h'(x))\|^t}{\|h(x)\|_t + \|h'(x)\|_t} \rightrightarrows 0$$

при $x \in [a,b]$, некотором $t \in T$, $(h(x),h'(x)) \to 0$ в E^2. Учитывая оценки

$$|r_x^y(h(x),h'(x))\cdot k(x)| \le \|r_x^y(h(x),h'(x))\|^t \cdot \|k(x)\|_t,$$

$$|r_x^z(h(x),h'(x))\cdot k'(x)| \le \|r_x^z(h(x),h'(x))\|^t \cdot \|k'(x)\|_t,$$

и обозначая через $R_y(h)k$ общий остаточный член в (4.4), нетрудно получить

$$R_y(h)k = o(\|h\|^t \cdot \|k\|^t)$$

при $h, k \to 0$ в $\mathrm{W}_2^1([a,b],E)$. Отсюда, поскольку $\|\cdot\|^t \le M \cdot \|\cdot\|_C$ в F_C, следует

$$R_y(h)k = o(\|h\|_C \cdot \|k\|_C),$$

т. е. $R_y(h) = o(\|h\|_C)$ и оператор $\Phi' : F \to F^*$ K-дифференцируем в точке $y(\cdot)$. Непрерывность Φ''_K, очевидно, следует из равенства (4.3). □

Предложение 4.2. *Если, в условиях теоремы* 4.1, *в некоторой точке* $y(\cdot) \in \mathrm{W}_2^1([a,b],E)$ *выполнено уравнение* (4.2), *и* $\Phi''_K(y) \gg 0(\mathrm{mod}\ K)$, *то функционал Эйлера–Лагранжа* (4.1) *имеет строгий K-минимум в точке $y(\cdot)$.*

Доказательство. Так как, в силу следствия 4.1, $\Phi'_K(y) = \Phi'(y) = 0$, то остается применить предложение 3.5. □

Теорема 4.2. *Если, в условиях теоремы* 4.1, *в некоторой точке* $y(\cdot) \in \mathrm{W}_2^1([a,b],E)$ *выполнено уравнение* (4.2), *и при любом фиксированном $x \in [a,b]$ квадратичная форма $f''(x,y(x),y'(x))$ положительно определена, то функционал Эйлера–Лагранжа* (4.1) *имеет K-минимум в точке $y(\cdot)$.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 2.1, для каждого $x \in [a,b]$ и $t \in T$ найдется такое $k(t,x) > 0$, что

$$\begin{aligned} &f''(x,y(x),y'(x)) \cdot ((h_1(x),h_2(x)),(h_1(x),h_2(x))) \\ &\quad = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h_1(x),h_1(x)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(h_1(x),h_2(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(h_2(x),h_2(x)) \\ &\qquad\qquad \ge k(t,x)(\|h_1(x)\|_t^2 + \|h_2(x)\|_t^2) \end{aligned}$$

при всех $(h_1(x),h_2(x)) \in E^2$. Используя компактность $[a;b]$, аналогично доказательству теоремы 2.3, можно выбрать в последней оценке $k_t > 0$, не зависящее от x. В частности,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(x),h(x)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(h(x),h'(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(h'(x),h'(x)) \\ &\qquad\qquad \ge k_t(\|h(x)\|_t^2 + \|h'(x)\|_t^2) \end{aligned}$$

для всех $x \in [a,b]$ и $h(\cdot) \in \mathrm{W}_2^1([a,b],E)$. Отсюда, используя (4.3), получаем:

$$\Phi''_K(y)(h,h) \ge k_t \left[\int\limits_a^b \|h(x)\|_t^2\,dx + \int\limits_a^b \|h'(x)\|_t^2\,dx \right] = k_t \cdot \|h\|_t^2,$$

т. е., согласно теореме 2.1, $\Phi''_K(y) \gg 0$. Отсюда, в силу теоремы 3.1, Φ имеет строгий K-минимум в точке $y(\cdot)$. □

В случае, когда E — ядерное ЛВП, в [7] получено достаточное условие K-экстремума функционала Эйлера–Лагранжа в терминах частных производных подинтегральной функции.

Теорема 4.3. *Пусть E — полное вещественное ядерное ЛВП, функция $u = f(x, y, z)$ дважды непрерывно нормально дифференцируема на $[a; b]\times E\times E$. Если в некоторой точке $y(\cdot) \in \mathrm{W}_2^1([a, b], E)$ выполнено уравнение* (4.2)*, и при любом фиксированном $x \in [a, b]$:*

1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x), y'(x)) \gg 0,$ *и коммутирует с* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y(x), y'(x))$ *и* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), y'(x))$;

2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x), y'(x)) \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), y'(x)) - \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y(x), y'(x))\Big)^2 \gg 0;$

то функционал Эйлера–Лагранжа (4.1) *имеет строгий K-минимум в точке $y(\cdot)$.*

5. Пример K-экстремума функционала Эйлера–Лагранжа, не являющегося локальным экстремумом

1. Выберем сначала вещественную функцию $\varphi \in C^2[0; +\infty]$ так, чтобы $\varphi(t) = t$ при $0 \le t \le 1 - \delta$, $\varphi(t) = 2 - t$ при $1 + \delta \le t < +\infty$ ($\delta > 0$ достаточно мало). Положим $f(x, y, z) = \varphi(y^2 + z^2)$ и рассмотрим функционал

$$\Phi(y) = \int_0^1 f(x, y, y')\, dx = \int_0^1 \varphi(y(x)^2 + y'(x)^2)\, dx = \int_0^1 \varphi(N(y)(x))\, dx,$$

где $N(y)(x) = y(x)^2 + y'(x)^2$, $y(\cdot) \in \mathrm{W}_2^1([a, b], \mathbb{R}) = F$.

Поскольку $f \in C^2([0; 1] \times \mathbb{R}^2)$, то $\Phi(y)$ непрерывно дифференцируем по Фреше в F. Вариационное уравнение Эйлера–Лагранжа (4.2) принимает вид:

$$\frac{d\varphi}{dt}(y - y'') - 2\frac{d^2\varphi}{dt^2}(y + y'')(y')^2 = 0. \tag{5.1}$$

Таким образом, функция $y_0(x) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (5.1), т.е. является экстремалью; при этом $\Phi(y_0) = 0$.

2. Покажем,что $\Phi(y)$ не имеет локального экстремума в точке $y_0(\cdot)$. Действительно, для любого $\varepsilon \in (0;\delta)$ при $y_1(x) \equiv \varepsilon$ имеем:

$$\|y_1\|^{W_2^1} = \varepsilon; \qquad \Phi(y_1) = \int\limits_0^1 \varphi(\varepsilon^2)\,dx = \varepsilon^2 > 0.$$

С другой стороны, полагая

$$y_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{\varepsilon}{2}; \\ 0, & \frac{\varepsilon}{2} < x \le 1; \end{cases}$$

легко подсчитать, что

$$\|y_2\|^{W_2^1} = \sqrt{2\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6}}; \qquad \Phi(y_2) = \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{2}} [2 - 4(x^2+1)]\,dx = -\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} < 0.$$

Таким образом, в произвольно малой окрестности y_0 (в F) $\Phi(y)$ принимает значения разного знака.

3. Проверим непосредственно, что $\Phi(y)$ имеет K-экстремум в нуле. Пусть $y \in F, y \neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$K = \int\limits_{\{x \mid y(x) \le 1-\delta\}} N(y)(x)\,dx > 0; \tag{5.2}$$

(иначе мы заменим y на $\lambda_0 y$ при достаточно малом $\lambda_0 > 0$). Выберем теперь $\lambda > 0$ так, чтобы:

$$\lambda < \frac{1-\delta}{1+\delta}; \tag{5.3}$$

$$\int\limits_{\{x|N(y)(x) \ge \frac{1-\delta}{\lambda}\}} N(y)(x)\,dx < \frac{K}{2}. \tag{5.4}$$

Из (5.2), (5.3) и (5.4) находим:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda y) &= \int\limits_0^1 \varphi(\lambda \cdot N(y)(x))\,dx \\ &= \int\limits_{\{x|N(y)(x) \le \frac{1-\delta}{\lambda}\}} \varphi(\lambda \cdot N(y)(x))\,dx + \int\limits_{\{x|N(y)(x) \ge \frac{1-\delta}{\lambda}\}} \varphi(\lambda \cdot N(y)(x))\,dx \\ &= \lambda \int\limits_{\{x|N(y)x \le \frac{1-\delta}{\lambda}\}} N(y)(x)\,dx + \int\limits_{\{x|N(y)x \ge \frac{1-\delta}{\lambda}\}} [2 - \lambda N(y)(x)]\,dx \end{aligned}$$

$$
\geq \lambda \int\limits_{\{x|N(y)(x)\leq 1-\delta\}} N(y)(x)\,dx + 2\,\mathrm{mes}\Big\{x|N(y)(x)\geq \frac{1-\delta}{\lambda}\Big\}
$$
$$
-\lambda \int\limits_{\{x|N(y)(x)\geq \frac{1-\delta}{\lambda}\}} N(y)(x)\,dx \geq \lambda\cdot K - \lambda\cdot\frac{K}{2} = \lambda\cdot\frac{K}{2} > 0.
$$

Таким образом, для всякого $y \in F$, $y \neq 0$, найдется такое $\lambda = \lambda(y) > 0$, что $\Phi(\lambda y) > 0$.

Пусть C — произвольный абсолютно выпуклый компакт в F. Для любого $y(\cdot) \in C$ выберем $\lambda = \lambda(y) > 0$ такое, что $\Phi(\lambda y) > 0$. В силу непрерывности Φ, последнее неравенство сохраняется и в некоторой окрестности $U(y)$ данной точки. Выбрав из покрытия $\{U(y)|y \in C\}$, ввиду компактности C, конечное покрытие

$$
C \subset U_1(y_1) \cup \ldots \cup U_n(y_n),
$$

где $\Phi(\lambda_i y) > 0$ при $y \in U_i(y_i)$ $(i = \overline{1,n})$,, положим $\lambda = \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Тогда $\Phi(\lambda y) > 0$ при всех $y \in C$. Таким образом, при некотором $\lambda = \lambda(C) > 0$, сужение $\Phi|_{\lambda C}$ имеет строгий минимум в нуле, т. е., согласно определению 3.1, Φ имеет строгий K-минимум.

4. Покажем, что в нуле выполнено достаточное условие K-экстремума 4.3. Непосредственный подсчет показывает, что :

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt};
$$
$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\Big)^2 = 8\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}(y^2+z^2) + 4\Big(\frac{d\varphi}{dt}\Big)^2,
$$

откуда на экстремали $y_0 \equiv 0$:

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\Big)^2 = 4 > 0.
$$

Отметим, что простота построенного примера позволяет предположить, что именно компактные экстремумы (а не локальные) являются типичными для функционала Эйлера–Лагранжа.

6. Заключение

Обсудим общие принципы предложенного подхода. Вводя K-дифференцируемость и K-экстремумы, мы, по существу, построили разложение ЛВП E в индуктивную шкалу банаховых пространств

$$
\overrightarrow{E}_K := \{(E_C, \|\cdot\|_C)\}, \tag{6.1}
$$

где C — всевозможные абсолютно выпуклые компакты в E, $\|\cdot\|_C$ — их функционалы Минковского в $E_C = \mathrm{span}\,(C)$, порождающие в E_C топологию сильнее исходной.

При этом K-дифференцируемость в точке $x \in E$ есть сильная дифференцируемость всех сужений на $(x + E_C)$, K-экстремум в точке $x \in E$ есть локальный экстремум всех сужений на $(x + E_C)$. Такая конструкция оказалась хорошо приспособленной к интегральным функционалам.

Обобщая изложенный выше подход, рассмотрим произвольную систему $\beta = \{B\}$ замкнутых ограниченных абсолютно выпуклых подмножеств ЛВП E, направленную по включению (т. е. $(B_1, B_2 \in \beta) \Rightarrow (B_1, B_2 \subset B_3 \in \beta)$), и введем аналогичное (6.1) разложение E в индуктивную шкалу банаховых пространств

$$\overrightarrow{E}_\beta := \{(E_B, \|\cdot\|_B)\}_{B\in\beta}.$$

Здесь также $\|\cdot\|_B$ порождает в E_B топологию сильнее исходной. Вводя β-дифференцируемость и β-экстремумы в точке $x \in E$ как сильную дифференцируемость и локальные экстремумы всех сужений на $(x + E_B)$, нетрудно построить теорию β-экстремумов по аналогии с теорией K-экстремумов. При этом прослеживается и обратная связь: при переходе к слабой топологии в полурефлексивном ЛВП E K-экстремумы совпадают с β-экстремумами, где β — система *всех* абсолютно выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств E.

По-видимому, различным классам функционалов отвечают различные β-экстремумы (и повторная β-дифференцируемость). Перспектива описания таких классов представляется весьма интересной.

Литература

[1] И. В. Скрыпник, *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.* Наукова думка, Киев, 1973, 219 с.

[2] М. З. Згуровский, В. С. Мельник,, *Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами.* Наукова думка, Киев, 1999, 630 с.

[3] А. В. Угланов, *Вариационное исчисление в банаховых пространствах* // Математический сборник, **191** (2000), N 10, 105–118.

[4] М. М. Вайнберг, *Вариационные методы исследования нелинейных операторов.* Гостехиздат, Москва, 1956.

[5] В. С. Мельник, *О T-дифференцируемых функционалах* // Доклады Академии Наук (Россия), **324** (1992), N 5, 928–932.

[6] І. В. Орлов, *K-диференційовність функціоналу Ейлера-Лагранжа* // Доповіді НАН України, N 9, (2003), 29–33.

[7] I. V. Orlov, *Extreme Problems and Scales of the Operator Spaces* // Proceedings Lviv S. Banach Conference on Functional Analysis, 2002, in North-Holland Math. Studies, to appear.

[8] И. В. Орлов, *Нормальная дифференцируемость и экстремумы функционалов в локально выпуклом пространстве* // Кибернетика и системный анализ, (2002), N 4, 23–34.

[9] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения.* Мир, Москва, 1969, 1071 с.

[10] А. Картан, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* Мир, Москва, 1971, 392 с.

[11] И. В. Орлов, *Нормальные разложения операторных пространств над локально выпуклыми пространствами* // Функциональный анализ и его приложения, **36** (2002), N 4, 78–80.

Сведения об авторах

Игорь Владимирович Орлов

Таврический национальний университет
им. В. И. Вернадского,
ул. Ялтинская 4,
95007, Симферополь, Крым
Украина
E-Mail: `old@tnu.crimea.ua`