Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 1, 64 – 96

Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних рівнянь з гладкими символами

Владислав А. Літовченко

(*Представлена С. Д. Івасишеним*)

Анотація. Для одного класу псевдодиференціальних рівнянь з гладкими символами, залежними від часу, досліджено властивості фундаментальних розв'язків; сформульовано достатні, а для окремих рівнянь і необхідні умови коректної розв'язності задачі Коші з узагальненими початковими даними та встановлено принцип локалізації їх розв'язків. При цьому побудовано простори основних функцій, які є узагальненням певних класичних просторів.

2000 MSC. 35G10, 35S30.

Ключові слова та фрази. Задача Коші, псевдодиференціальні рівняння, гладкі символи, узагальнені функції, принцип локалізації, мультиплікатор.

1. Вступ

Теорія просторів типу S, розвинена Гельфандом І. М. і Шиловим Г. Є. у 50-х роках минулого століття, відіграла важливу роль при дослідженні задачі Коші для систем рівнянь у згортках, таких, що коефіцієнти у відповідних двоїстих за Фур'є системах є цілими аналітичними функціями за просторовою змінною (частковим випадком таких систем є диференціальні та диференціально-різницеві системи з неперервними коефіцієнтами, залежними від часу). Зокрема, у термінах цих просторів вдалося описати класи єдиності та класи коректної розв'язності задачі Коші. При цьому з'ясувалося, що чим краще себе поводить з функціональної точки зору фундаментальна матриця розв'язків системи, тим слабші умови задовольняють початкові дані, тобто тим ширші її класи єдиності та коректної розв'язності [1–3].

Стаття надійшла в редакцію 11.11.2004

ISSN 1810 – 3200.

Природнє розвинення теорії просторів типу S здійснив Гуревич Б. Л., ввівши так звані простори типу W [4, 5]. Дані простори дозволили точніше описати класи єдиності задачі Коші для зазначених систем.

Бурхливий розвиток теорії псевдодиференціальних операторів спонукає до постановки і дослідження задачі Коші для псевдодиференціальних рівнянь (систем), символи диференціювання яких характеризуються різним ступенем гладкості (не обов'язково цілі аналітичні функції) та зростають на нескінченності не лише степеневим чином.

Для таких рівнянь точний опис властивостей фундаментальних розв'язків завдяки просторам типу S та W не завжди є можливим. Справді, для рівняння

$$\begin{gathered}\partial_t u(t,x) + \int\limits_{-\infty}^{\gamma} \big((aE - \partial_x^2)^{\frac{\tau}{2}} u\big)(t,x)\, d\tau = 0,\\ \gamma > 0, \quad a > 0, \quad (t,x) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R},\end{gathered} \tag{1.1}$$

де E — одиничний оператор, фундаментальний розв'язок $G_t(\cdot)$ збігається з оберненим перетворенням Фур'є функції $\theta_t(\cdot) = \exp\big\{-2t\frac{(a+(\cdot)^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+(\cdot)^2)}\big\}$, $t > 0$. Однак [6], серед S_α^β, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (тобто просторів типу S) не існує найвужчого простору, куди б при кожному фіксованому $t > 0$ потрапляла $\theta_t(\cdot)$. Більш того, $\theta_t(\cdot)$, $t > 0$ не належить жодному з просторів W_M^Ω (просторів типу W), оскільки ця функція не є цілою аналітичною.

Таким чином, виникає потреба у поширенні теорії Гельфанда І. М., Шилова Г. Є. і Гуревича Б. Л. на випадок задач Коші для псевдодиференціальних рівнянь (систем), символи яких характеризуються обмеженим ступенем гладкості у комплексному просторі.

Доречно зазначити, що дослідженням задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь і систем з гладкими символами займалися японські математики [7–10]. Ними описано клас нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ символів, залежних від просторової змінної; наведено достатні умови гіпоеліптичності псевдодиференціальних операторів з такими символами, побудовано фундаментальні розв'язки відповідних задач Коші та розвинено методику дослідження їх властивостей. Проте, і у цьому випадку символи псевдодиференціювання мають степеневу поведінку на безмежності.

У даній роботі описується клас псевдодиференціальних рівнянь з гладкими, але не обов'язково цілими аналітичними символами з часовим параметром, поведінка яких у околі нескінченно віддалених точок характеризується завдяки опуклим функціям. Досліджуються властивості фундаментальних розв'язків таких рівнянь. Згідно з цими властивостями, будуються простори основних і узагальнених функцій, які є певним узагальненням просторів типу S та W; описується їх топологічна структура, з'ясовується питання взаємодвоїстості за Фур'є та формулюються достатні умови аналітичності й квазіаналітичності елементів у цих просторах. Також доводяться критерії мультиплікатора й встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для таких рівнянь у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями. Для окремих рівнянь описуються максимальні класи узагальнених початкових даних, при яких відповідна задача Коші не тільки коректно розв'язна, а й її розв'язок володіє тими властивостями гладкості та поведінкою у околі нескінченно віддалених точок, що і фундаментальний розв'язок.

Вивчається питання локального підсилення збіжності розв'язку задачі Коші при наближенні його до початкової гіперплощини. Наводяться приклади.

2. Простори основних і узагальнених функцій

Нехай $\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел; $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – його елементи (вектори), $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, $C^\infty(L)$ — простір усіх нескінченно диференційовних функцій, визначених на множині L; $\widehat{C}(L)$ — сукупність усіх обмежених за модулем функцій на L; S — простір Л. Шварца [11], а $\omega_j(\cdot)$ — зростаюча, неперервна функція на $[0; +\infty)$, причому $\omega_j(0) = 0$ і $\lim_{x\to+\infty} \omega_j(x) = +\infty$, $j = \overline{1, n}$. Для $x \geq 0$ покладемо $\overline{\Omega}_j(x) = \int_0^x \omega_j(\xi)\, d\xi$, $j = \overline{1, n}$. При кожному $j \in \{1, \ldots, n\}$ функція $\overline{\Omega}_j(\cdot)$ володіє такими властивостями [2, 12]: 1) вона диференційовна, зростаюча на $[0; +\infty)$; 2) $\overline{\Omega}_j(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \overline{\Omega}_j(x) = +\infty$; 3) $\overline{\Omega}_j(\cdot)$ — опукла функція, тобто: а) $\forall \{x_1; x_2\} \subset [0; +\infty)$: $\overline{\Omega}_j(x_1) + \overline{\Omega}_j(x_2) \leq \overline{\Omega}_j(x_1 + x_2)$; б) $\forall \delta \geq 1$ $\forall x \in [0; +\infty)$: $\overline{\Omega}_j(\delta x) \geq \delta \overline{\Omega}_j(x)$; в) $\forall \delta \in (0; 1)$ $\forall x \in [0; +\infty)$: $\overline{\Omega}_j(\delta x) \leq \delta \overline{\Omega}_j(x)$. Довизначимо $\overline{\Omega}_j(\cdot)$, $j = \overline{1, n}$, на $(-\infty; 0)$ парним чином і нехай $\overrightarrow{\Omega}(x) \overset{\text{def}}{=} \{\overline{\Omega}_1(x_1), \ldots, \overline{\Omega}_n(x_n)\}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Поруч з $\overrightarrow{\Omega}(\cdot)$ розглянемо функцію $\overrightarrow{M}(x) = \{\overline{M}_1(x_1); \ldots; \overline{M}_n(x_n)\}$, де $\overline{M}_j(\cdot)$ — функція, аналогічна до $\overline{\Omega}_j(\cdot)$, побудована за $\mu_j(\cdot)$, яка має такі ж властивості, що і функція $\omega_j(\cdot)$.

Далі, говоритимемо, що послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\} \subset \mathbb{R}^n$ задовольняє умову А), якщо для кожного $\nu \in \{1, \ldots, n\}$: 1) $0 < \alpha_{\nu, k_\nu} < \alpha_{\nu, k_\nu + 1}$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$; 2) $\lim_{k_\nu\to\infty} \alpha_{\nu, k_\nu} = +\infty$; 3) $\exists\, c_\nu > 0$ $\exists\, A_\nu > 0$

$\forall\, k_\nu \in \mathbb{Z}_+$: $\frac{\alpha_{\nu,k_\nu+2}}{\alpha_{\nu,k_\nu}} \le c_\nu A_\nu^{k_\nu}$; 4) $\exists\, L_\nu > 0\ \forall\,\{k_\nu; m_\nu\} \subset \mathbb{Z}_+$: $\alpha_{\nu,k_\nu}\alpha_{\nu,m_\nu} \le L_\nu^{k_\nu+m_\nu}\alpha_{\nu,(k_\nu+m_\nu)}$. Прикладом такої послідовності є послідовність із загальним членом $\alpha_k = (k_1^{\beta_1 k_1}, \dots, k_n^{\beta_n k_n})$, $\beta_\nu > 0$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = \overline{1,n}$.

За вектор-функцією $\overrightarrow{\Omega}(\cdot)$ й послідовністю $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ побудуємо клас $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}(L)$, який складається з усіх функцій $\Omega_j(t,x)$: $L \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, таких, що: 1) $\Omega_j(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(\forall\, t \in L)$; 2) $D_x^k \Omega_j(t,x)$ — неперервна функція по t на L при кожному x з $\mathbb{R}^n$ і $k \in \mathbb{Z}_+^n$; 3) $\exists\, b_j(\cdot) \in \widehat{C}(L)$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$: $|D_x^k \Omega_j(t,x)| \le |b_j(t)||A_j(k,x)|$, причому функція $A_j(k,\cdot)$ така, що для всіх $\overrightarrow{\delta} = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, $0 < \delta_\nu \ll 1$, $\nu = \overline{1,n}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{|A_j(k,x)|e^{-(\overrightarrow{\delta},\overrightarrow{\Omega}(x))}\} \le c_j B_j^{|k|} \prod_{\nu=1}^n \frac{\alpha_{\nu,k_\nu}}{\sqrt[n]{\delta_\nu}},$$

де c_j, B_j — додатні сталі, незалежні від k і $\overrightarrow{\delta}$, а $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Покладемо

$$W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} = \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \exists\, c > 0\ \exists\, A > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n : \\ |D_x^k \varphi(x)| \le cA^{|k|}\,\widehat{\alpha_k}\exp\Big\{-\sum_{\nu=1}^n \overline{\Omega}_\nu(\delta x_\nu)\Big\}\Big\};$$

$$W_{\{\alpha_k\}}^{\overrightarrow{M}} = \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n) \;\Big|\; \exists\, c > 0\ \exists\, B > 0\ \exists\, b > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \\ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}^n : \quad |x^k \varphi(z)| \le cB^{|k|}\,\widehat{\alpha_k}\exp\Big\{\sum_{\nu=1}^n \overline{M}_\nu(by_\nu)\Big\}\Big\},$$

$$\widehat{\alpha_k} \overset{\text{def}}{=} \prod_{\nu=1}^n \alpha_{\nu,k_\nu}.$$

Через $W_{\overrightarrow{\Omega},a}^{\{\alpha_k\},A}$ і $W_{\{\alpha_k\},B}^{\overrightarrow{M},b}$ позначимо сукупності усіх тих функцій φ з $W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ і, відповідно ψ з $W_{\{\alpha_k\}}^{\overrightarrow{M}}$, для яких правильні нерівності:

$$|D_x^k \varphi(x)| \le c\hat{A}^{|k|}\,\widehat{\alpha_k}\exp\Big\{-\sum_{\nu=1}^n \overline{\Omega}_\nu(\hat{a}x_\nu)\Big\}, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

$$|x^k \psi(z)| \le c\check{B}^{|k|}\,\widehat{\alpha_k}\exp\Big\{\sum_{\nu=1}^n \overline{M}_\nu(\check{b}y_\nu)\Big\}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^n,$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$, де $\hat{A} \geq A$, $\hat{a} \leq a$, $\check{B} \geq B$ та $\check{b} \geq b$ — деякі додатні сталі. Якщо для $\varphi \in W_{\vec{\Omega},a}^{\{\alpha_k\},A}$ та $\psi \in W_{\{\alpha_k\},B}^{\vec{M},b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} \left\{ |D_x^k\varphi(x)| \Big/ \left((A+\delta)^{|k|}\,\widehat{\alpha_k}\exp\left\{ -\sum_{\nu=1}^{n} \overline{\Omega}_\nu(a(1-\rho)x_\nu) \right\} \right) \right\},$$

$$\|\psi\|_{\delta\rho} = \sup_{\substack{z=x+iy\in\mathbb{C}^n\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} \left\{ |x^k\psi(z)| \Big/ \left((B+\delta)^{|k|}\,\widehat{\alpha_k}\exp\left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \overline{M}_\nu(b(1+\rho)y_\nu) \right\} \right) \right\},$$

$$\{\delta,\rho\} \subset \{1/n; n\geq 2\},$$

то міркуючи, як і у випадку просторів типу S та W [1, 2] за умови, що послідовність α_k, $k \in \mathbb{Z}_+^n$ задовольняє умову A), не важко переконатися, що з цими нормами простори $W_{\vec{\Omega},a}^{\{\alpha_k\},A}$ і $W_{\{\alpha_k\},B}^{\vec{M},b}$ є повними, досконалими, зліченно нормованими; $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} = \bigcup_{A,a>0} W_{\vec{\Omega},a}^{\{\alpha_k\},A}$, $W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}} = \bigcup_{B,b>0} W_{\{\alpha_k\},B}^{\vec{M},b}$, причому послідовність $\{\varphi_\nu, \nu\geq 1\} \subset W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ збігається до $\varphi \in W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ при $\nu \to +\infty$ у цьому просторі (позначатимемо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}} \varphi$) тоді і тільки тоді, коли: а) $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ — правильно збіжна на $\mathbb{R}^n$ (тобто для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n$ послідовність $D_x^k\varphi_\nu(x)$ збігається до $D_x^k\varphi(x)$ при $\nu \to +\infty$ рівномірно по x на кожному компакті з $\mathbb{R}^n$); б) вона обмежена у $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$. А $\psi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}}} \psi$, де $\{\psi; \psi_\nu, \nu \geq 1\} \subset W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}}$, лише тоді, коли: а) функції ψ_ν рівномірно збігаються до ψ в кожній обмеженій області з $\mathbb{C}^n$; б) $\{\psi_n, n \geq 1\}$ — обмежена у $W_{\vec{M}}^{\{\alpha_k\}}$.

Виконання умови A) для $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ гарантує існування та неперервність операцій додавання, віднімання, множення, диференціювання, а також зсуву у просторах $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$, $W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}}$. Більш того, оскільки зазначені простори досконалі, то операція зсуву у них не лише неперервна, а й нескінченно диференційовна [1].

Очевидно, що для $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, які задовольняють умову A) і такі, що

$$\alpha_{\nu,k_\nu} \leq \beta_{\nu,k_\nu}, \qquad k_\nu \in \mathbb{Z}_+,\ \nu = \overline{1,n},$$

правильні наступні вкладення:

$$W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} \subset W_{\vec{\Omega}}^{\{\beta_k\}} \subset W_{\vec{\Omega}} \subset S \subset W_{\vec{\Omega}}' \subset \big(W_{\vec{\Omega}}^{\{\beta_k\}}\big)' \subset \big(W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}\big)';$$

$$W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}} \subset W^{\overrightarrow{M}}_{\{\beta_k\}} \subset W^{\overrightarrow{M}} \subset S \subset \big(W^{\overrightarrow{M}}\big)' \subset \big(W^{\overrightarrow{M}}_{\{\beta_k\}}\big)' \subset \big(W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}\big)',$$

де $W_{\overrightarrow{\Omega}}$, $W^{\overrightarrow{M}}$, $W^{\overrightarrow{M}}_{\overrightarrow{\Omega}}$ — простори типу W, побудовані Б. Л. Гуревичем у [2, 4, 5] (тут через Φ' позначено простір, топологічно спряжений до Φ).

Слід зазначити, що у $W^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}$, в залежності від $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$, можуть міститися не лише цілі функції, як це вимагається для простору $W^{\overrightarrow{M}}_{\overrightarrow{\Omega}}$, а $\inf_{k_\nu \in \mathbb{Z}_+}\big\{\frac{cB^{k_\nu}\alpha_{\nu,k_\nu}}{|z_\nu|^{k_\nu}}\big\}$ не завжди є функцією з властивостями функції $e^{-\overline{\Omega}_\nu(z_\nu)}$, $\nu = \overline{1,n}$, що є обов'язковим для простору $W^{\overrightarrow{\Omega}}_{\overrightarrow{M}}$. Зауважимо також, що якщо $\overline{M}_\nu(\cdot) = |\cdot|^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а $\alpha_{\nu,k_\nu} = k_\nu^{\beta k_\nu}$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = \overline{1,n}$, $\beta > 0$, то $W^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{M}} = S^\beta_\alpha$, де S^β_α — простір типу S [1].

Має місце

Теорема 2.1. *Якщо функції $\overline{M}_\nu(\cdot)$ і $\overline{\Omega}_\nu(\cdot)$, $\nu = \overline{1,n}$, взаємодвоїсті за Юнгом (у сенсі [2]), а послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$ задовольняє умову A), то*

$$F[W^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}] = W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}, \quad F[W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}] = W^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}},$$

причому оператор Фур'є F на цих просторах є неперервним і взаємооднозначним.

У правильності зазначеної теореми не важко переконатися, якщо діяти аналогічним чином, як і при її доведенні у випадку просторів типу S та W (див. [1,2]).

Теорема 2.2. *Нехай послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$ задовольняє умову A) і є такою, що для всіх $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ $\lim_{k_\nu \to +\infty} \frac{\sqrt[k_\nu]{\alpha_{\nu,k_\nu}}}{k_\nu} = L_\nu < +\infty$, тоді всі елементи з $W^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}$ є аналітичними функціями, причому цілими, якщо $L_\nu \equiv 0$. У випадку, коли для кожного $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ існує $\beta > 1$ таке, що $\lim_{k_\nu \to +\infty} \frac{\sqrt[k_\nu]{\alpha_{\nu,k_\nu}}}{k_\nu^\beta} = +\infty$, то серед елементів простору $W^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}$ є вже фінітні функції.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли $n = 1$. Зафіксуємо довільним чином елемент f з простору $W^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}$ і оцінимо його залишковий член з розкладу у формулі Тейлора:

$$\left|\frac{h^q}{q!} D^q_x f(x + \theta h)\right| \le c_1 \frac{|h|^q}{q!} A^q \alpha_{1,q}, \quad q \in \mathbb{Z}_+, \{x; h\} \subset \mathbb{R},\ 0 < \theta < 1.$$

Звідси, зважаючи на те, що:

1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, q_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, q > q_0$: $\alpha_{1,q} < (\varepsilon + L_1)^q q^q$;

2) $q! = q^{q+\frac{1}{2}} e^{-q} \sqrt{2\pi} E_q$, $E_q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
(див. формулу Стірлінга), одержуємо прямування до нуля залишкового члена при $q \to +\infty$, для всіх $|h| < \frac{1}{AL_1 e}$, $L_1 \geq 0$.

Отже, у відповідному околі точки x, функція f розвивається у збіжний до неї ряд Тейлора:

$$f(x+h) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{h^q}{q!} D_x^q f(x).$$

Оскільки цей ряд є збіжний і для комплексних значень h таких, що $|h| < \frac{1}{AL_1 e}$, то приходимо до висновку, що функція f допускає аналітичне продовження у смугу $|y| < \frac{1}{AL_1 e}$, $L_1 \geq 0$ комплексної площини $z = x + iy$.

Умова $\lim_{k_1\to+\infty} \frac{\sqrt[k_1]{\alpha_{1,k_1}}}{k_1^{\beta}} = +\infty$ (при деякому $\beta > 1$) забезпечує існування таких додатніх сталих c і δ, що

$$\Gamma(r) \overset{\text{def}}{=} \max_{k_1} \left\{ \frac{r^{k_1}}{\alpha_{1,k_1}} \right\} \leq c e^{\delta r^{1/\beta}}, \quad r \geq 1.$$

Тоді

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln \Gamma(r)}{r^2}\, dr \leq c_1 \int_1^{\infty} r^{1/\beta - 2}\, dr < +\infty.$$

І, згідно з теоремою Карлемана–Островського [13], серед елементів простору $W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ є фінітні нескінченно диференційовні функції.

У випадку, коли $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, твердження цієї теореми доводиться аналогічно. Теорему доведено. $\square$

Далі дамо таке означення: послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ називається узгодженою з $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, якщо існує така додатна стала B_ν, що для всіх i_ν, j_ν, ..., h_ν-цілочисельних невід'ємних розв'язків рівняння $k_\nu = 1 \cdot i_\nu + 2 \cdot j_\nu + \dots + L_\nu \cdot h_\nu$, $\{L_\nu, k_\nu\} \subset \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\left(\frac{\alpha_{\nu,1}}{1!}\right)^{i_\nu} \left(\frac{\alpha_{\nu,2}}{2!}\right)^{j_\nu} \cdots \left(\frac{\alpha_{\nu,L_\nu}}{L_\nu!}\right)^{h_\nu} \leq B_\nu^{k_\nu} \frac{\alpha_{\nu,k_\nu}}{k_\nu!}, \quad k_\nu \in \mathbb{Z}_+,\ \nu \in \{1, \dots, n\}.$$

Наступне твердження характеризує елементи простору $W_{\{\alpha_k\}}^{\overrightarrow{M}}$ на множині $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.3. *Якщо послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову A) і узгоджена з $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, то функція f з $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ належатиме* *простору* $W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\begin{gathered}\exists\, c>0\ \exists\, A>0\ \exists\, B>0\ \forall\, k\in\mathbb{Z}^n_+\\ \exists\,\rho_k=\{\rho_{k_1},\rho_{k_2},\dots,\rho_{k_n}\},\ \rho_{k_\nu}\in[0,k_\nu),\ \nu=\overline{1,n}\\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n:\ \ |D^k_x f(x)|\le cA^{|k|}k!\prod_{\nu=1}^n\left(\frac{e^{\overline{M}_\nu(\rho_{k_\nu})}}{\rho_{k_\nu}^{k_\nu}}\cdot\inf_{m\ge0}\left\{\frac{B^m\alpha_{\nu,m}}{|x_\nu|^m}\right\}\right),\end{gathered}\tag{2.1}$$

де ρ_{k_ν} *— розв'язок рівняння* $\rho\mu_\nu(\rho)=k_\nu$, $k_\nu\in\mathbb{Z}_+$, $\nu=\overline{1,n}$.

Доведення. Нехай $f\in W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}$. Покажемо, що для f виконуються умови (2.1).

Згідно з теоремою 1 $f(\cdot)=F^{-1}[\tilde f(\xi)](\cdot)$, де $\tilde f(\cdot)=F[f](\cdot)$ — елемент з $W^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}$, а $\overrightarrow{\Omega}$ — двоїста за Юнгом до $\overrightarrow{M}$ вектор-функція. Отже, для всіх $\{k,m\}\subset\mathbb{Z}^n_+$, $x\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}|x^mD^k_xf(x)|&\le c\int_{\mathbb{R}^n}|D^m_\xi(\xi^k\tilde f(\xi))|\,d\xi\\ &\le c_1\sum_{|l|=0}^{|m|}C^l_m\frac{k!}{(k-l)!}A^{|m-l|}\left(\prod_{\nu=1}^n\left(\int_{\mathbb{R}}|\xi_\nu|^{k_\nu-l_\nu}e^{-\overline{\Omega}_\nu(a\xi_\nu)}\,d\xi_\nu\right)\alpha_{\nu,m_\nu-l_\nu}\right).\end{aligned}$$

Скористаємося тепер нерівністю Юнга [2]:

$$\xi_\nu y_\nu\le\overline{\Omega}_\nu(\xi_\nu)+\overline{M}_\nu(y_\nu),\quad \xi_\nu\ge0,\ y_\nu\ge0,$$

завдяки якій

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}|\xi_\nu|^{l_\nu}e^{-\overline{\Omega}_\nu(a\xi_\nu)}\,d\xi_\nu\\ &\qquad\le\int_{\mathbb{R}}|\xi_\nu|^{l_\nu}e^{-|\xi_\nu|y_\nu}\exp\left\{-\overline{\Omega}_\nu\Big(\frac{a}{2}\xi_\nu\Big)+\overline{M}_\nu\Big(\frac{2}{a}y_\nu\Big)\right\}d\xi_\nu\\ &\qquad\qquad\le c_0l_\nu!e^{\overline{M}_\nu(\frac{2}{a}y_\nu)}/y_\nu^{l_\nu},\quad l_\nu\in\mathbb{Z}_+,\ y_\nu\ge0.\end{aligned}$$

Оскільки $y_\nu\ge0$ — довільне, то

$$\int_{\mathbb{R}}|\xi_\nu|^{l_\nu}e^{-\overline{\Omega}_\nu(a\xi_\nu)}d\xi_\nu\le c_0l_\nu!(\frac{2}{a})^{l_\nu}\inf_{y_\nu\ge0}\left\{e^{\overline{M}_\nu(y_\nu)}/y_\nu^{l_\nu}\right\},\quad l_\nu\in\mathbb{Z}_+.$$

Традиційними засобами математичного аналізу переконуємося у тому, що

$$\inf_{y_\nu\ge0}\left\{e^{\overline{M}_\nu(y_\nu)}/y_\nu^{l_\nu}\right\}=e^{\overline{M}_\nu(\rho_{l_\nu})}/\rho_{l_\nu}^{l_\nu},\tag{2.2}$$

де ρ_{l_ν} — розв'язок рівняння $\rho\mu_\nu(\rho) = l_\nu$, $l_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = \overline{1,n}$, причому якщо $l_\nu = 0$, то $\rho_0 = 0$.

Звідси вже приходимо до

$$|x^m D_x^k f(x)| \leq c_2 2^{|k|} A_1^{|m|} \sum_{|l|=0}^{|m|} \Big(\prod_{\nu=1}^{n} \Big(l_\nu! \alpha_{\nu, m_\nu - l_\nu} (\frac{2}{a})^{k_\nu - l_\nu} (k_\nu - l_\nu)! \frac{e^{\overline{M}_\nu(\rho_{k_\nu - l_\nu})}}{\rho_{k_\nu - l_\nu}^{k_\nu - l_\nu}} \Big) \Big),$$
$$x \in R^n, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+^n \quad (2.3)$$

(тут c_2, A_1 — додатні сталі, незалежні від x, k і m).

Зазначимо, що ρ_k — корінь рівняння $\rho\mu_\nu(\rho) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тому зі збільшенням k зростатиме також і $\rho_k\mu_\nu(\rho_k)$. Оскільки $\mu_\nu(\cdot)$ — монотонно зростаюча функція така, що $\lim_{\rho\to+\infty} \mu_\nu(\rho) = +\infty$, то таке зростання $\rho_k\mu_\nu(\rho_k)$ можливе лише завдяки зростанню ρ_k, причому $\lim_{k\to+\infty} \rho_k = +\infty$. Отже,

$$(\frac{2}{a})^{k-l}(k-l)! e^{\overline{M}_\nu(\rho_{k-l})}/\rho_{k-l}^{k-l} \leq B^k e^{\overline{M}_\nu(\rho_k)} \frac{(k-l)!}{\rho_{k-l}^{k-l}} \leq B^k e^{\overline{M}_\nu(\rho_k)} \Big(\frac{\rho_{k-l}\mu_\nu(\rho_{k-l})}{\rho_{k-l}} \Big)^{k-l}$$
$$\leq B_1^k k! \frac{e^{\overline{M}_\nu(\rho_k)}}{\rho_k^k} \frac{(\mu_\nu(\rho_{k-l}))^{k-l}}{(\mu_\nu(\rho_k))^k} \leq B_1^k k! e^{\overline{M}_\nu(\rho_k)}/\rho_k^k,$$
$$\{l, k\} \subset \mathbb{Z}_+, \ l \leq k, \ \nu = \overline{1,n}, \quad (2.4)$$

де B_1 — додатна стала, незалежна від k і l.

Далі, з того, що $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову А) й узгоджена з $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, дістанемо:

$$l_\nu! \alpha_{\nu,(m_\nu - l_\nu)} = \frac{l_\nu!}{\alpha_{\nu,l_\nu}} \alpha_{\nu,(m_\nu - l_\nu)} \alpha_{\nu,l_\nu} \leq \overline{c}\overline{B}^{m_\nu} \alpha_{\nu,m_\nu}, \quad l_\nu \leq m_\nu, \ \nu = \overline{1,n}. \quad (2.5)$$

Враховуючи оцінки (2.4), (2.5) з (2.3) прийдемо до умови (2.1).

Доведемо тепер зворотнє. Нехай f з $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умову (2.1). Тоді цю функцію можна аналітично продовжити на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, залишковий член з розкладу у формулі Тейлора допускає оцінку

$$\Big| \frac{h^q}{q!} D_x^q f(x + \theta h) \Big| \leq c A^{|q|} \prod_{\nu=1}^{n} \Big(\frac{e^{\overline{M}_\nu(\rho_{q_\nu})}}{\rho_{q_\nu}^{q_\nu}} |h_\nu|^{q_\nu} \cdot \inf_{m \geq 0} \Big\{ \frac{B^m \alpha_{\nu,m}}{|x + \theta h|^m} \Big\} \Big),$$
$$q \in \mathbb{Z}_+^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \theta_\nu \in (0,1), \quad \nu = \overline{1,n}$$

(тут $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$).

Оскільки $\overline{M}_\nu(\rho_l) = \int_0^{\rho_l} \mu_\nu(\xi)\, d\xi$, $l \in \mathbb{N}$, то згідно з теоремою про середнє значення інтеграла, для кожного l з $\mathbb{N}$ знайдеться $\xi_l \in (0; \rho_l)$ таке, що $\overline{M}_\nu(\rho_l) = \rho_l \mu_\nu(\xi_l)$ (у випадку, коли $l = 0$, то $\overline{M}_\nu(\rho_0) = 0$, оскільки $\rho_0 = 0$). Звідси, зваживши на монотонне зростання функції $\mu_\nu(\cdot)$, одержуємо, що $\overline{M}_\nu(\rho_l) \le \rho_l \mu_\nu(\rho_l) = l$, $l \in \mathbb{N}$. А відтак

$$\Big(\frac{A|h_\nu|}{\rho_{q_\nu}}\Big)^{q_\nu} e^{\overline{M}_\nu(\rho_{q_\nu})} \le \Big(\frac{A|h_\nu|e}{\rho_{q_\nu}}\Big)^{q_\nu}.$$

І, оскільки $\rho_{q_\nu} \to +\infty$ при $q_\nu \to +\infty$, то

$$\prod_{\nu=1}^{n} \Big(\frac{A|h_\nu|}{\rho_{q_\nu}}\Big)^{q_\nu} e^{\overline{M}_\nu(\rho_{q_\nu})} \underset{|q|\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

для всіх $|h_\nu| \in [0; +\infty)$. Отже, залишковий член $\dfrac{h^q}{q!} D_x^q f(x+\theta h)$ прямує до нуля при $|q| \to +\infty$ для всіх $h \in \mathbb{R}^n$, тобто функція f допускає аналітичне продовження на $\mathbb{C}^n$:

$$f(x+iy) = \sum_{|q|=0}^{\infty} \frac{D_x^q f(x)}{q!} (iy)^q, \quad z = x+iy \in \mathbb{C}^n.$$

Далі, з співвідношень (2.1), (2.2) для всіх $z = x+iy \in \mathbb{C}^n$ і $k \in \mathbb{Z}_+^n$ дістанемо:

$$\begin{aligned}
|x^k f(z)| &\le \sum_{|q|=0}^{\infty} \frac{|x^k D_x^q f(x)|}{q!} |y|^q \\
&\le c \sum_{|q|=0}^{\infty} \Bigg(\prod_{\nu=1}^{n} |Ay_\nu|^{q_\nu} |x_\nu|^{k_\nu} \frac{e^{\overline{M}_\nu(\rho_{q_\nu})}}{\rho_{q_\nu}^{q_\nu}} \inf_{m\ge0} \Big\{ \frac{B^m \alpha_{\nu,m}}{|x_\nu|^m} \Big\} \Bigg) \\
&\le c \sum_{|q|=0}^{\infty} \Bigg(\prod_{\nu=1}^{n} B^{k_\nu} \alpha_{\nu,k_\nu} |Ay_\nu|^{q_\nu} \inf_{\rho\ge0} \Big\{ \frac{e^{\overline{M}_\nu(\rho)}}{\rho^{q_\nu}} \Big\} \Bigg) \\
&\le cB^{|k|} \Bigg(\prod_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu,k_\nu} e^{\overline{M}_\nu(2Ay_\nu)} \Bigg) \sum_{|q|=0}^{\infty} \frac{1}{2^{|q|}} \\
&= cB^{|k|} \,\widehat{\alpha}_k\, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \overline{M}_\nu(2Ay_\nu)}
\end{aligned}$$

(тут $|y|^q = \prod_{\nu=1}^n |y_\nu|^{q_\nu}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{Z}_+^n$). Теорему доведено. □

3. Задача Коші

Розглянемо рівняння

$$\partial_t U(t,x) = \sum_{j=1}^{m} (A_{\Omega_j} U)(t,x) + \widehat{b}(t) U(t,x), \quad (t,x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

де $m \in \mathbb{N}$, T — фіксована величина з $(0;+\infty]$, $\widehat{b}(\cdot)$ — обмежена функція на $[0;T]$; A_{Ω_j} — псевдодиференціальний оператор, побудований за символом Ω_j з класу $\mathcal{L}^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}((0;T])$ (тобто оператор, дія якого на достатньо "хороших" елементах f задається рівністю

$$A_{\Omega_j} f = F^{-1}[\Omega_j(t,\xi) F[f]]$$

(тут F, F^{-1} — відповідно пряме та обернене перетворення Фур'є [14])).

Припустимо, що для рівняння (3.1) виконується аналог рівномірної за t умови параболічності:

$$\mathrm{Re} \left(\sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t,\xi) \right) \leq -(\overrightarrow{\delta^*}, \overrightarrow{\Omega}(\xi)) + c_1^*, \quad (t,\xi) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n, \quad (3.2)$$

де $\overrightarrow{\delta^*}$ — фіксований n-вимірний вектор з додатними компонентами (надалі позначатимемо $\overrightarrow{\delta^*} > 0$), а c_1^* — довільна стала, які не залежать від t і ξ.

Фундаментальний розв'язок рівняння (3.1) позначимо через $G_t(x)$, $(t,x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n$. Зазначимо, що $G_t(\cdot) = F^{-1}[\theta_t(\xi)](\cdot)$, $t \in (0;T]$, де $\theta_t(\cdot) \overset{\mathrm{def}}{=} \exp\left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \Omega_j(\tau,\cdot)\, d\tau + \int_0^t \widehat{b}(\tau)\, d\tau \right\}$.

Властивість функції $\theta_t(\cdot)$ за просторовою змінною характеризує наступне твердження.

Лема 3.1. *Нехай послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову A) й узгоджена з $\{k!,\ k \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Тоді функція $\theta_t(\cdot)$ визначена і нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n$ при кожному фіксованому t з $(0;T]$, причому*

$$\begin{gathered} \exists\, \overrightarrow{\delta} \in \mathbb{R}^n,\ \overrightarrow{\delta} > 0\ \exists\, c > 0\ \exists\, B > 0\ \forall\, t \in (0;T]\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n : \\ |D_\xi^k \theta_t(\xi)| \leq c B^{|k|}\, \widehat{\alpha_k}\, e^{-t((\overrightarrow{\delta}, \overrightarrow{\Omega}(\xi)) - c_1^*)} e^{\int_0^t \widehat{b}(\tau)\, d\tau}. \end{gathered} \quad (3.3)$$

Доведення. Задля уникнення громіздких викладок доведення проведемо у випадку $n = 1$.

Нескінченна диференційовність $\theta_t(\cdot)$ за просторовою змінною випливає зі структури цієї функції і того, що $\Omega_j \in \mathcal{L}^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}((0;T])$, $j = \overline{1,m}$.

Доведемо виконання умови (3.3). Для цього скористаємося відомою формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції [15]

$$D_x^k f(\varphi(x)) = \sum_p^k \frac{k!}{i!j!\cdots h!}\frac{d^p f(\varphi)}{d\varphi^p}\left(\frac{d\varphi(x)}{1!dx}\right)^i\left(\frac{d^2\varphi(x)}{2!dx^2}\right)^j\cdots\left(\frac{d^L\varphi(x)}{L!dx^L}\right)^h, \quad k\in\mathbb{Z}_+, \quad x\in\mathbb{R}$$

(тут знак суми поширюється на всі цілочисельні невід'ємні розв'язки рівняння $k = i+2j+\cdots+Lh$, а число $p = i+j+\cdots+h$) та умовою параболічності (3.2). Одержимо, що

$$|D_\xi^k\theta_t(\xi)| \le e^{\int_0^t \widehat{b}(\tau)d\tau} \times \sum_p^k \frac{k!}{i!j!\cdots h!}e^{-t(\delta_1^*\overline{\Omega}_1(\xi)-c_1^*)}\left|\frac{dP(t,\xi)}{1!d\xi}\right|^i\left|\frac{d^2P(t,\xi)}{2!d\xi^2}\right|^j\cdots\left|\frac{d^LP(t,\xi)}{L!d\xi^L}\right|^h, \quad t\in(0;T],\ \xi\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}_+, \tag{3.4}$$

де $P(t,\xi) = \sum_{l=1}^m \int_0^t \Omega_l(\tau,\xi)\,d\tau$. Оскільки $\Omega_l \in \mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}((0;T])$, то

$$e^{-\frac{1}{2^L}\delta_1^* t\overline{\Omega}_1(\xi)}\left|\frac{d^LP(t,\xi)}{d\xi^L}\right|^h \le \left(\sum_{l=1}^m\int_0^t |b_l(\tau)|\,d\tau \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left\{|A_l(L,\xi)|e^{-\frac{1}{h2^L}\delta_1^* t\overline{\Omega}_1(\xi)}\right\}\right)^h \le (cB^L\alpha_{1,L}h)^h, \quad t\in(0;T],\ \xi\in\mathbb{R},\ \{L;h\}\subset\mathbb{Z}_+, \tag{3.5}$$

де c, B — додатні сталі, незалежні від t, x, L і h.

Далі, скориставшись тим, що $1 = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}$ й $\frac{i^i j^j\cdots h^h}{i!j!\cdots h!} \le 2^k$, де $k = i+2j+\cdots+Lh$, з нерівності (3.4) дістанемо

$$|D_\xi^k\theta_t(\xi)| \le c_1B_1^k e^{-t(\frac{\delta_1^*}{2}\overline{\Omega}_1(\xi)-c_1^*)}\left(\sum_p^k k!\left(\frac{\alpha_{1,1}}{1!}\right)^i\left(\frac{\alpha_{1,2}}{2!}\right)^j\cdots\left(\frac{\alpha_{1,L}}{L!}\right)^h\right)e^{\int_0^t\widehat{b}(\tau)d\tau}, \quad t\in(0;T],\ \xi\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}_+$$

(тут c_1, B_1 — додатні сталі, незалежні від t, x і k, а δ_1^*, c_1^* — величини з умови параболічності (3.2)). Звідси, зважаючи на узгодженість $\{\alpha_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$ з послідовністю $\{k!, k\in\mathbb{Z}_+\}$ та на нерівність

$\sum_p^k 1 \leq (2e)^k$, де $p = i + j + \cdots + h$, а знак суми поширюється на всі невід'ємні цілочисельні розв'язки рівняння $k = i + 2j + \cdots + Lh$, приходимо до твердження даної леми.

У випадку довільного n з $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ доведення леми здійснюється за вищенаведеною аналогією.

Лему доведено. $\square$

Наслідок 3.1. *Нехай функції $\overline{M}_\nu(\cdot)$, $\overline{\Omega}_\nu(\cdot)$ — взаємодвоїсті за Юнгом ($\forall\, \nu \in \{1, \dots, n\}$), а послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову A) і є узгодженою з $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Тоді при кожному фіксованому t з $(0; T]$ фундаментальний розв'язок $G_t(\cdot)$ рівняння (3.1) належить простору $W_{\{\alpha_k\}}^{\overrightarrow{M}}$.*

Далі, нехай $\Phi \in \{W_{\overrightarrow{\Omega}}; W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\beta_k\}}, \{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\} \geq \{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}\}$, а послідовності $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ узгоджені з $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ і такі, що для них виконується умова A). Наступні допоміжні твердження характеризують властивості функції $\theta_t(\cdot)$ за змінною t.

Лема 3.2.

$$\theta_t(\cdot)\varphi(\cdot) \xrightarrow[t \to +0]{\Phi} \varphi(\cdot) \quad (\forall \varphi \in \Phi).$$

Доведення. Нехай $n = 1$, а $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\beta_k\}}$, тоді досить перевірити, чи виконуються такі умови:

1) $D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x)) \underset{t \to +0}{\longrightarrow} D_x^k \varphi(x)$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}$ $(\forall k \in \mathbb{Z}_+)$;

2) $\exists\, \delta_1 > 0\ \exists\, c_1 > 0\ \exists\, B_1 > 0\ \forall\, 0 < t \ll 1\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, x \in \mathbb{R}$: $|D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x))| \leq c_1 B_1^k \beta_{1,k} e^{-\overline{\Omega}_1(\delta_1 x)}$.

Зазначимо, що

$$D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x)) = \theta_t(x) D_x^k \varphi(x) + \sum_{l=1}^{k} C_k^l D_x^l \theta_t(x) D_x^{k-l} \varphi(x),$$
$$k \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

і оскільки для кожної компактної множини $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}$ й $l \in \{1; \dots; k\}$

$$D_x^l \theta_t(x) D_x^{k-l} \varphi(x) \underset{t \to +0}{\longrightarrow} 0, \theta_t(x) \underset{t \to +0}{\longrightarrow} 1$$

рівномірно по $x \in \mathbb{K}$, то умова 1) виконується.

Доведемо виконання умови 2). Позаяк $\varphi \in \Phi$, а послідовність $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову A), то зваживши на (3.3), з (3.6) одержуємо оцінку

$$
\begin{aligned}
&|D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x))| \\
&\leq c2^k \sum_{l=0}^{k} \left(B^l \alpha_{1,l} e^{-t\delta \overline{\Omega}_1(x)} \exp\left\{ tc_1^* + \int_0^t \widehat{b}(\tau)\, d\tau \right\} \right) \left(B_1^{k-l} \beta_{1,(k-l)} e^{-\overline{\Omega}_1(\delta_1 x)} \right) \\
&\qquad \leq c_1 \max_{t\in(0;T]} \left\{ \exp\left\{ tc_1^* + \int_0^t \widehat{b}(\tau)\, d\tau \right\} \right\} B_2^k \beta_{1,k} e^{-\overline{\Omega}_1(\delta_1 x)}, \\
&\qquad\qquad k \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R},\ t \in (0;T],
\end{aligned}
$$

де c_1, B_2, δ_1 — додатні сталі, незалежні від k, x і t , а c_1^* — константа з умови (3.2). Таким чином, умова 2) також виконується.

У випадку, коли $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}$ та $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, твердження леми 3.2 доводиться аналогічно. Лему доведено. □

Лема 3.3. *Функція $\theta_t(\cdot)$ диференційовна по $t \in (0;T]$ у розумінні топології простору Φ.*

Доведення. Аби уникнути громіздких викладок, доведення леми проведемо при $n = 1$ (загальний випадок здійснюється аналогічно).

Для доведення досить переконатися у тому, що граничне співвідношення

$$
\Psi_{\Delta t}(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Delta t}(\theta_{(t+\Delta t)}(x) - \theta_t(x)) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \left(\widehat{b}(t) + \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t,x) \right) \theta_t(x)
$$

виконується у сенсі збіжності у просторі Φ, тобто: 1) $D_x^k \Psi_{\Delta t}(t,x) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}$ $D_x^k\big(\big(\widehat{b}(t) + \sum_{j=1}^m \Omega_j(t,x)\big)\theta_t(x)\big)$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $t \in (0;T]$; 2) $\forall\, t \in (0;T]\ \exists\, c > 0\ \exists\, B > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+$ $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, \Delta t \in (-1;1)$, $|\Delta t| \leq \frac{t}{2}$: $|D_x^k \Psi_{\Delta t}(t,x)| \leq cB^k \alpha_{1,k} e^{-\overline{\Omega}_1(\delta x)}$, якщо $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$.

Функція $\theta_t(\cdot)$ диференційовна по $t \in (0;T]$ у звичайному розумінні, отже

$$
\Psi_{\Delta t}(t,x) = \theta_{(t+\eta\Delta t)}(x) \left(\widehat{b}(t+\eta\Delta t) + \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t+\eta\Delta t, x) \right),
$$
$$
\{t; (t+\eta\Delta t)\} \subset (0;T],\ \eta \in (0;1),\ x \in \mathbb{R}.
$$

Таким чином, для $k \in \mathbb{Z}_+$ і $x \in \mathbb{R}$

$$D_x^k \Psi_{\Delta t}(t,x)$$
$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l \biggl(D_x^l \biggl(\widehat{b}(t+\eta\Delta t) + \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t+\eta\Delta t, x) \biggr) \biggr) \bigl(D_x^{k-l} \theta_{(t+\eta\Delta t)}(x) \bigr),$$
$$\{t; (t+\eta\Delta t)\} \subset (0;T],\ \eta \in (0;1). \quad (3.7)$$

Оскільки

$$D_x^l \biggl(\widehat{b}(t+\eta\Delta t) + \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t+\eta\Delta t, x) \biggr) D_x^{k-l} \theta_{(t+\eta\Delta t)}(x)$$
$$\underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D_x^l \biggl(\widehat{b}(t) + \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t,x) \biggr) D_x^{k-l} \theta_t(x)$$

рівномірно по x на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}$, то з (3.7) приходимо до умови 1).

Виконання умови 2) стає очевидним, виходячи з (3.7) та оцінок типу (3.3), (3.5).

У випадку, коли $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}$, твердження леми 3.3 доводиться аналогічно. Лему доведено. $\square$

Зважаючи на те, що оператор оберненого перетворення Фур'є F^{-1} є неперервним у просторі Φ (див. [2] та теорему 2.1) з твердження леми 3.3 приходимо до такого наслідку.

Наслідок 3.2.

$$F^{-1}[\partial_t \theta_t(\cdot)] = \partial_t F^{-1}[\theta_t(\cdot)] \quad (\forall\, t \in (0;T]).$$

Твердження леми 3.2 підказує, що граничними значеннями рівняння (3.1) при $t \to +0$ можуть бути елементи з простору $\widetilde{\Phi}'$, де $\widetilde{\Phi} = \{F[\varphi](\cdot), \varphi \in \Phi\}$, причому початкову умову для (3.1)

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad (3.8)$$

слід розуміти як $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\widetilde{\Phi}'} f$ (тобто як слабку збіжність у просторі $\widetilde{\Phi}'$).

Таким чином, під розв'язком задачі Коші (3.1), (3.8) розумітимемо гладку функцію u, яка задовольняє рівняння (3.1) у звичайному розумінні, а початкову умову (3.8) у тому сенсі, що $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\widetilde{\Phi}'} f$.

Наступне твердження характеризує розв'язність задачі Коші (3.1), (3.8).

Теорема 3.1. *Нехай* $\overline{M}_\nu(\cdot)$ *— функція, разом з якою* $\overline{\Omega}_\nu(\cdot)$ *є взаємодвоїстими за Юнгом* ($\nu \in \{1,\dots,n\}$)*; послідовності* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *узгоджені з* $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, *для яких виконується умова А), а* f *з* $\widetilde{\Phi}'$ *такий, що* $F[f]$ *— мультиплікатор у просторі* Φ. *Тоді задача Коші* (3.1), (3.8) *коректно розв'язна* (*тобто, існує єдиний розв'язок* u *цієї задачі, який неперервно залежить від початкових даних*), *причому для всіх* t *з* $(0;T]$: 1) $u(t,\cdot) \in \widetilde{\Phi}$; 2) $F[\partial_t u(t,\cdot)] = \partial_t(F[u(t,\cdot)])$; 3) $u(t,\cdot) = \langle f, G_t(\cdot - \xi)\rangle$.

Доведення. Оскільки нас цікавлять розв'язки рівняння (3.1), які при кожному фіксованому t з $(0;T]$ є елементами простору $\widetilde{\Phi}$ і по t задовольняють умову 2) даної теореми, то зваживши на те, що відображення
$$F(F^{-1}) : W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} \to W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}},\ F(F^{-1}) : W_{\overrightarrow{\Omega}} \to W^{\overrightarrow{M}}$$
є взаємооднозначними і неперервними (див. [2] і теорему 2.1), одержуємо рівносильність рівняння (3.1) з рівнянням

$$\partial_t \widetilde{u}(t,\xi) = \left(\sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t,\xi) + \widehat{b}(t)\right)\widetilde{u}(t,\xi), \quad t \in (0;T],\ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.9}$$

(тут і надалі $\widetilde{Y} = F[Y]$), причому початкова умова (3.8) виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли

$$\widetilde{u}(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\Phi'} \widetilde{f}. \tag{3.10}$$

Отже, питання про коректну розв'язність задачі Коші (3.1), (3.8) у просторі $\widetilde{\Phi}'$ рівносильне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (3.9), (3.10) у просторі Φ'.

Зазначимо, що рівняння (3.9) — звичайне диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, загальний розв'язок якого

$$\widetilde{u}(t,\xi) = c(\xi)\theta_t(\xi), \quad (t,\xi) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

Звідси та з початкової умови (3.10) одержуємо, що $\widetilde{u}(t,\cdot) = \widetilde{f}(\cdot) \times \theta_t(\cdot)$, $t \in (0;T]$. Оскільки $\widetilde{f}$ — мультиплікатор у просторі Φ, а функція $\theta_t(\cdot)$ належить до Φ при кожному t з $(0;T]$ (див. лему 3.1), то $\widetilde{u}(t,\cdot) \in \Phi$, $t \in (0;T]$.

У тому, що розв'язок задачі Коші (3.9), (3.10) єдиний, переконуємося традиційно — методом від протилежного.

Щодо умови 2) цієї теореми, то виконання її стає очевидним, якщо взяти до уваги наслідок 3.2.

Нарешті, зваживши на те, що

$$u(t,\cdot) = F^{-1}[\widetilde{u}(t,\xi)](t,\cdot) = F^{-1}[\widetilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)](t,\cdot), \quad t \in (0;T]$$

та на твердження теореми 2.1 з [16], приходимо до висновку, що $u(t,\cdot) = f * G_t(\cdot)$, $t \in (0;T]$ (і оскільки у просторі $\tilde{\Phi}$ операція зсуву нескінченно диференційовна, а f — згортувач у $\tilde{\Phi}$, то $(f * G_t)(\cdot) = \langle f, G_t(\cdot - \xi)\rangle$ [1]).

Розв'язок u задачі Коші (3.1), (3.8) неперервно залежить від початкових даних задачі, оскільки відповідний розв'язок $\widetilde{u}$ володіє такою властивістю, а F^{-1} є неперервним оператором з Φ у $\widetilde{\Phi}$. Теорему доведено. $\square$

Зазначимо, що при деяких додаткових припущеннях на рівняння (3.1) та вектор функцію $\overrightarrow{\Omega}$, сформульовані умови в теоремі 3.1 є не лише достатніми, але й необхідними для коректної розв'язності задачі Коші (3.1), (3.8). Опишемо ці припущення: B) функції $\overline{\Omega}_j(\cdot)$, $j = \overline{1,n}$, окрім раніше описаних властивостей, володіють ще і такою:

$$\overline{\Omega}_j(\delta x) \geq \widehat{f}_{1j}(\delta)\overline{\Omega}_j(x) + \widehat{f}_{2j}(\delta), \quad \delta \in (0;1),\ x \in \mathbb{R},$$

де $\widehat{f}_{1j}(\cdot)$ — додатні, а $\widehat{f}_{2j}(\cdot)$ — довільні функції, обмежені на $(0;1)$; C) рівняння (3.1) задовольняє не лише умову (3.2), а є таким, що

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t,\xi)\right) \geq -(\overrightarrow{\delta_0^*}, \overrightarrow{\Omega}(\xi)) + c_0^*, \quad (t,\xi) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n,$$

де $\overrightarrow{\delta_0^*} > 0$, а $c_0^* \in \mathbb{R}$ — фіксовані величини, незалежні від t і ξ.

Правильне таке допоміжне твердження.

Лема 3.4. *Нехай виконуються припущення B), C), а послідовності $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ узгоджені з $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ і задовольняють умову A). Тоді*

$$\forall\, \varphi \in \Phi\ \exists\, \delta_0 \in (0;1)\ \forall\, \delta \in (0;\delta_0) : \widehat{\theta}_\delta(\cdot)\varphi(\cdot) \in \Phi,$$

де $\widehat{\theta}_\delta(\cdot) \overset{\text{def}}{=} \exp\{-\sum_{j=1}^m \int_0^\delta \Omega_j(\tau,\cdot)\,d\tau - \int_0^\delta \widehat{b}(\tau)\,d\tau\}$.

Доведення. Покладемо спочатку $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\beta_k\}}$ і $n = 1$. Для довільного $l \in \mathbb{Z}_+$

$$|D_\xi^l(\widehat{\theta}_\delta(\xi)\varphi(\xi))| \leq \sum_{k=0}^{l} C_l^k |D_\xi^k \widehat{\theta}_\delta(\xi)|\ |D_\xi^{l-k}\varphi(\xi)|, \quad \delta \in (0;T],\ \xi \in \mathbb{R}$$

і, оскільки $\varphi \in \Phi$, то існують такі додатні сталі c, B і $\delta_1 \in (0;1)$, що

$$|D^l_\xi(\widehat{\theta}_\delta(\xi)\varphi(\xi))| \leq cB^l \sum_{k=0}^{l} \beta_{1,(l-k)} e^{-\overline{\Omega}_1(\delta_1\xi)} |D^k_\xi \widehat{\theta}_\delta(\xi)|. \tag{3.12}$$

Міркуючи так само, як і при встановленні нерівностей (3.4), (3.5), використовуючи при цьому припущення B), C), одержимо

$$e^{-\overline{\Omega}_1(\delta_1\xi)} |D^k_\xi \widehat{\theta}_\delta(\xi)| \\ \leq c_2 B^k_2 \beta_{1,k} \exp\left\{ -\Big(\frac{1}{2}\widehat{f}_{11}(\delta_1) - \delta\delta^*_0\Big)\overline{\Omega}_1(\xi) - \int_0^\delta \widehat{b}(\tau)\, d\tau \right\}, \\ \delta \in (0;T],\ \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

де c_2, B_2 — додатні сталі, незалежні від k і ξ.

Звідси вже, при $\delta \in (0;T]$ таких, що $\delta < \frac{\widehat{f}_{11}(\delta_1)}{2\delta^*_0}$, а також з нерівності (3.12), приходимо до належності $\widehat{\theta}_\delta(\cdot)\varphi(\cdot)$ простору Φ.

Аналогічним чином переконуємося у тому, що дане твердження справджується й у випадку $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}$ та довільному натуральному n. Лему доведено. □

Наступне твердження характеризує мультиплікатори у просторі Φ.

Теорема 3.2 (критерій мультиплікатора). *Нехай виконуються всі умови з леми 3.4. Тоді для того, щоб функція $\mu(\cdot)$ була мультиплікатором у просторі Φ, необхідно і достатньо, щоб для кожного δ, $0 < \delta \ll 1$, добуток $\mu(\cdot)\theta_\delta(\cdot)$ належав Φ.*

Доведення. Необхідність очевидна. Доведемо достатність, тобто виконання таких умов: 1) $\mu(\cdot)\varphi(\cdot) \in \Phi$ $(\forall\, \varphi \in \Phi)$; 2) $\forall\, \{\varphi_\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}_+\} \subset \Phi$, $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\Phi} 0$: $\mu(\cdot)\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\Phi} 0$.

Згідно з твердженням леми 3.4

$$\forall\, \varphi \in \Phi\ \exists\, \delta_0 \in (0;1)\ \forall\, \delta \in (0;\delta_0) : \mu(\cdot)\varphi(\cdot) = (\mu(\cdot)\theta_\delta(\cdot))(\widehat{\theta}_\delta(\cdot)\varphi(\cdot)) \in \Phi$$

як добуток функцій з Φ. Отже, умова 1) виконується.

Для доведення 2) у випадку, коли $\Phi = W^{\{\beta_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}$, досить показати, що:

I) $|D^k_\xi(\mu(\xi)\varphi_\nu(\xi))| \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ рівномірно по ξ на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}^n$, для всіх $k \in \mathbb{Z}^n_+$;

II) $\exists\,\delta > 0\ \exists\, c_1 > 0\ \exists\, B_1 > 0\ \forall\,\nu \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall\,\xi \in \mathbb{R}^n$: $|D_\xi^k(\mu(\xi)\varphi_\nu(\xi))| \le c_1 B_1^{|k|}\,\widehat{\alpha_k}\exp\big\{-\sum_{j=1}^n \overline{\Omega}_j(\delta\xi_j)\big\}$.

Зазначимо, що умова I) виконується, бо

$$|D_\xi^k(\mu(\xi)\varphi_\nu(\xi))| \le \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \Big(\sup_{\xi\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}\{|D_\xi^l\mu(\xi)|\}\Big)|D_\xi^{k-l}\varphi_\nu(\xi)|\underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

рівномірно по ξ на кожному компакті $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{Z}_+^n$ (тут враховано те, що $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\Phi} 0$).

Доведемо виконання умови II) при $n=1$ (загальний випадок доводиться аналогічним чином). Завдяки умові б) з критерію збіжності $\{\varphi_\nu, \nu\in\mathbb{Z}_+\}$ у просторі $W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\beta_k\}}$ та міркуванням, проведеним при доведенні леми 3.4, одержимо

$$|D_\xi^l(\widehat{\theta}_\delta(\xi)\varphi_\nu(\xi))| \le c_2 B_2^l \beta_{1,l}\exp\left\{-\Big(\frac{1}{2}\widehat{f}_{11}(\delta_1) - \delta\delta_0^*\Big)\overline{\Omega}_1(\xi) - \int_0^\delta \widehat{b}(\tau)\,d\tau\right\},$$

де c_2, B_2 — додатні сталі, які не залежать від $\{\nu;l\}\subset\mathbb{Z}_+$ і $\xi\in\mathbb{R}$, а $0<\delta\ll\dfrac{\widehat{f}_{11}(\delta_1)}{2\delta_0^*}$.

Звідси, зважаючи на те, що $\mu(\cdot)\theta_\delta(\cdot)\in\Phi$, $0<\delta\ll 1$, прийдемо до оцінки:

$$\begin{aligned}|D_\xi^k(\mu(\xi)\varphi_\nu(\xi))| &\le \sum_{l=0}^k C_k^l |D_\xi^{k-l}(\mu(\xi)\theta_\delta(\xi))|\,|D_\xi^l\big(\widehat{\theta}_\delta(\xi)\varphi_\nu(\xi)\big)| \\ &\le c_3 B_3^k \beta_{1,k}\exp\{-\overline{\Omega}_1(\delta_3\xi)\} \quad (\forall\,\{\nu;k\}\subset\mathbb{Z}_+\ \forall\,\xi\in R),\end{aligned}$$

де c_3, B_3, δ_3 — додатні сталі, незалежні від ν, k і ξ. Отже, виконання умови II) доведено.

У випадку, коли $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}$ виконання умови II) доводиться аналогічно. Теорему доведено. $\square$

З попередньої теореми одержуємо очевидний

Наслідок 3.3. *Нехай виконуються всі умови з леми 3.4. Тоді для того, щоб функція $\mu(\cdot)$ з $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ була мультиплікатором у просторі Φ необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall\, 0<\delta\ll 1\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+^n\ \exists\, c_{\delta,k}>0\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n:$$
$$|D_\xi^k\mu(\xi)| \le c_{\delta,k}\exp\left\{\sum_{j=1}^n \overline{\Omega}_j(\delta\xi_j)\right\},$$

причому $c_{\delta,k} = c_\delta B_\delta^{|k|}\,\widehat{\beta_k}$ *у випадку* $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\beta_k\}}$, *де* c_δ *і* B_δ *— додатні сталі, залежні лише від* δ.

Правильне таке твердження.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються всі умови з леми 3.4 і* $\Omega_j \in \mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}((0;T])$. *Тоді при кожному фіксованому* t *з* $(0;T]$ *функція* $\Omega_j(t,\cdot)$ *є мультиплікатором у просторі* Φ.

Доведення. Згідно з умовою 3) з опису елементів класу $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}((0;T])$ одержуємо, що

$$\begin{aligned} &|D_x^k\Omega_j(t,x)| \\ &\qquad \le |b_j(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{|A_j(k,x)|e^{-(\overrightarrow{\delta},\overrightarrow{\Omega}(x))}\right\}e^{(\overrightarrow{\delta},\overrightarrow{\Omega}(x))} \\ &\qquad\qquad \le c_j|b_j(t)|B_j^{|k|}\,\widehat{\alpha_k}\,e^{(\overrightarrow{\delta},\overrightarrow{\Omega}(x))} \end{aligned}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $0 < \delta_\nu \ll 1$, $\nu = \overline{1,n}$ і t з $(0;T]$. Звідси вже, зважаючи на наслідок 3.3, приходимо до твердження теореми 3.3. Теорему доведено. □

З цієї теореми одержуємо, що якщо символ $\Omega_j(\cdot,\cdot)$ належить класу $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}((0;T])$, то при кожному фіксованому t з $(0;T]$:

1) псевдодиференціальний оператор A_{Ω_j} неперервно відображає простір $\widetilde{\Phi}$ в себе;

2) перетворення Фур'є символу $\Omega_j(t,\cdot)$ (позначатимемо $\widetilde{\Omega}_j(t,\cdot)$) є згортувачем у $\widetilde{\Phi}$;

3) $A_{\Omega_j}f = \widetilde{\Omega}_j * f$, $f \in \widetilde{\Phi}$.

Зазначимо, що трактування псевдодиференціального оператора A_{Ω_j} як оператора згортки, дозволяє здійснити продовження його з простору $\widetilde{\Phi}$ (досить "хороших" функцій) на простір $\widetilde{\Phi}'$ (узагальнених функцій). Причому таке продовження $\widehat{A}_{\Omega_j}$ оператора A_{Ω_j} є коректним. Дійсно, оскільки

$$\widehat{A}_{\Omega_j}f = \widetilde{\Omega}_j * f, \quad f \in \widetilde{\Phi}',$$

а $(A_{\Omega_j}\varphi) \in \widetilde{\Phi}$ для всіх $\varphi \in \widetilde{\Phi}$, то

$$\langle \widehat{A}_{\Omega_j}f, \varphi\rangle = \langle \widetilde{\Omega}_j * f, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\Omega}_j * \varphi\rangle = \langle f, A_{\Omega_j}\varphi\rangle.$$

Отже, якщо виконуються всі умови з леми 3.4 і $\Omega_j \in \mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}((0;T])$, то

$$\widehat{A}_{\Omega_j} : \widetilde{\Phi}' \to \widetilde{\Phi}',$$

причому правильна така рівність:

$$\langle \widehat{A}_{\Omega_j} f, \varphi\rangle = \langle f, A_{\Omega_j}\varphi\rangle \quad (\forall\, \varphi \in \widetilde{\Phi}).$$

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються припущення* B), C)*; послідовності* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняють умову* A) *і узгоджені з* $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, *а функції* $\overline{M}_j(\cdot)$ *і* $\overline{\Omega}_j(\cdot)$, $j = \overline{1,n}$, *взаємодвоїсті за Юнгом. Тоді для того, щоб задача Коші* (3.1), (3.8) *була коректно розв'язною і:* 1) *її розв'язок* $u(t,\cdot)$ *при кожному фіксованому* $t \in (0;T]$ *належав простору* $\widetilde{\Phi} \in \{W^{\overrightarrow{M}}; W^{\overrightarrow{M}}_{\{\beta_k\}}, \{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\} \geq \{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}\}$*;* 2) $\partial_t F[u] = F[\partial_t u]$, $t \in (0;T]$, *необхідно і достатньо, щоб* $F[f]$ *був мультиплікатором у просторі* Φ. *При цьому завжди виконуватиметься рівність* $u(t,x) = \langle f, G_t(x-\xi)\rangle$, $(t,x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n$.

Доведення. Достатність одержується з теореми 3.1. Доведемо необхідність. Для цього досить показати, що якщо задача Коші (3.9), (3.10) коректно розв'язна, то $\widetilde{f}$ — мультиплікатор у Φ.

Оскільки $\widetilde{u}(t,\cdot) = c(\cdot)\theta_t(\cdot) \in \Phi$ при кожному фіксованому t з $(0;T]$ (див. (3.11)), то згідно з теоремою 3.2, функція $c(\cdot)$ — мультиплікатор у просторі Φ. Зважаючи на твердження леми 3.2, з умови (3.10) одержуємо, що

$$\langle c(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle = \langle \widetilde{f}(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle \quad (\forall\, \varphi \in \Phi).$$

Звідси, на підставі єдиності розв'язку задачі Коші (3.9), (3.10), переконуємося у тому, що $\widetilde{f}$ — регулярний функціонал, породжений мультиплікатором у просторі Φ. Теорему доведено. □

Далі розглянемо наступні приклади.

Приклад 3.1. Нехай $n = 1$, $m = 1$, $\widehat{b}(t) = 0$, $\Omega_1(t,\xi) = -2\frac{(a+\xi^2)^{\frac{\gamma}{2}}}{\ln(a+\xi^2)}$, $t > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\gamma > 0$, причому a і γ — такі, що $-\Omega_1(t,\cdot) + \Omega_1(t,0)$ є опуклою на $[0;+\infty)$ функцією. Тоді рівняння (3.1) набуде вигляду (1.1).

Зазначимо, що у цьому випадку $\overline{\Omega}_1(\cdot) = -\Omega_1(t,\cdot) + \Omega_1(t,0)$. І, як доведено в [12]: 1) для функції $\overline{\Omega}_1(\cdot)$ виконується припущення B); 2) $\alpha_{1,k} = k!$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Щодо припущення C), то виконання його очевидне, оскільки

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t,\xi)\right) = \Omega_1(t,\xi) = -\overline{\Omega}_1(\xi) + \Omega_1(t,0), \quad \xi \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

а $\Omega_1(t,0)$ — константа, незалежна від t і ξ.

Приклад 3.2. Покладемо $\Sigma(t)\overset{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^{l} a_j t^{\gamma_j}$, $t \geq 0$, де $l \in \mathbb{N}$, $\gamma_j > 0$, $a_j \geq 0$, $j = \overline{1,l}$; $\gamma_k = \max_{1\leq j\leq l}\{\gamma_j\}$, $\gamma_s = \min_{1\leq j\leq l}\{\gamma_j\}$ і вважатимемо, що $a_i \neq 0$, $i \in \{k; s\}$, $\gamma \equiv \gamma_k$.

Розглянемо додатно визначену невід'ємну функцію $P_\alpha(\cdot)$, $\alpha > 0$ таку, що: 1) $P_\alpha(\cdot) \in C^\infty((0;+\infty))$; 2) $\exists\, c_0 > 0\ \exists\, c_0' > 0\ \forall\, x \in (0;+\infty)$: $c_0 x^\alpha \leq P_\alpha(x) \leq c_0' x^\alpha$; 3) $\exists\, c_\alpha > 0\ \exists\, A_\alpha > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in (0;+\infty)$: $|D_x^k P_\alpha(x)| \leq c_\alpha A_\alpha^k k! x^{\alpha-k}$.

Нехай тепер $n = 1$, $m = 1$, $\hat{b}(t) \equiv 0$, $\Omega_1(t,\xi) = P_\alpha(\Sigma((a+\xi^2)^{1/2}))$, $a > 0$. Узгодимо параметри α і γ так, щоб функція Ω_1 була опуклою. Тоді рівняння (3.1) буде таким:

$$\partial_t u(t,x) + P_\alpha\big(\Sigma(aE - D_x^2)^{1/2}\big)u(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.13}$$

де $P_\alpha(\Sigma((aE - D_x^2)^{1/2}))$ — псевдодиференціальний оператор Поста з символом $P_\alpha(\Sigma)$, породжений оператором Бесселя дробового диференціювання з додатним параметром [14, 17].

У цьому випадку $\alpha_{1,k} = k!$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\overline{\Omega}_1(\cdot) = -\Omega_1(t,\cdot) + \Omega_1(t,0)$, причому виконуються припущення A), B) і C) [17]. Зазначимо також, що оскільки для $\Omega_1(t,\cdot)$ існують додатні сталі c_1, c_2 такі, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ і $t > 0$ виконується нерівність

$$c_1(a+\xi^2)^{\frac{\alpha\gamma}{2}} \leq \Omega_1(t,\xi) \leq c_2(a+\xi^2)^{\frac{\alpha\gamma}{2}},$$

то твердження теореми 3.4 для рівняння (3.13) справджується у просторі $\Phi \in \{S_{\frac{1}{\alpha\gamma}}; S^\beta_{\frac{1}{\alpha\gamma}}, \beta \geq 1\}$.

Задача Коші для простішого виду рівняння (3.13) (при $a = 1$, $P_\alpha(\cdot) = (\cdot)^1$; $\Sigma(\cdot) = (\cdot)^\gamma$, $\gamma > 0$) вивчалася В. В. Городецьким і О. М. Ленюком у [18]. Ними були встановлені слабші оцінки її фундаментального розв'язку: $G_t(\cdot) \in S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}$ (тут $[\,\cdot\,]$ — ціла частина числа) та доведено лише достатню умову коректної розв'язності цієї задачі (відповідно у вужчому класі початкових даних, бо $\big(S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}\big)' \subset (S_1^{1/\gamma})'$).

4. Принцип локалізації

Розв'язок задачі Коші (3.1), (3.8) при $t \to +0$ прямує до узагальненої функції f у слабкому розумінні збіжності. Однак може трапитися, що f збігається на деякій частині $\mathbb{R}^n$ з гладкою функцією. Виникає запитання, чи буде в цьому випадку відбуватися локальне підсилення збіжності вказаного розв'язку? Спробуємо з'ясувати це питання (хоча б частково).

Перед усім зауважимо, що поняття "збіжність узагальненої функції f на множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ з (деякою) функцією g" зазвичай вимагає наявності фінітних функцій у відповідному просторі основних функцій. Тому, оскільки $W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}$ складається лише з цілих аналітичних функцій, то простір $(W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}})'$ початкових даних задачі Коші (3.1), (3.8) потребує звуження, яке природно здійснити шляхом розширення простору $W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}$ основних функцій завдяки поповненню його гладкими фінітними функціями. Далі, зі структури розв'язку $u(t,\cdot) = \langle f, G_t(\cdot - \xi)\rangle$ задачі Коші (3.1), (3.8) стає зрозуміло, що проблема локалізації цього розв'язку тісно пов'язана з питанням обмеженості (у сенсі топології відповідного простору основних функцій) фундаментального розв'язку $G_t(\cdot)$ для достатньо малих значень $t > 0$. Проте не завжди простір, породжений визначальними властивостями (за просторовою змінною) фундаментального розв'язку задачі Коші, забезпечує таку обмеженість. Це добре прослідковується на прикладі фундаментального розв'язку класичного рівняння теплопровідності:

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

У цьому випадку $G_t(x) = (2\sqrt{t\pi})^{-1} e^{-x^2/t}$. І, як доведено у [1], фундаментальний розв'язок рівняння (4.1) належить простору $S^{1/2}_{1/2}$ при кожному фіксованому $t > 0$ (причому $S^{1/2}_{1/2}$ — найвужчий серед просторів типу S, куди потрапляє $G_t(\cdot)$). Однак функція $G_t(\cdot)$ необмежена по t для $0 < t \ll 1$ у просторі $S^{1/2}_{1/2}$, бо

$$|\partial_x^k G_t(x)| \le (ct^{-1/2})(At^{-1/2})^k k^{1/2k} e^{-\delta x^2/t}, \quad k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{4.2}$$

а величини $ct^{-1/2}$ та $At^{-1/2}$ необмежені на $(0;1)$ (тут c, A, δ — деякі додатні сталі, не залежні від t і x).

Отже, розширення простору $W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}$ повинно бути ще і таким, щоб у ньому був обмежений по t, $0 < t \ll 1$, фундаментальний розв'язок задачі Коші (3.1), (3.8).

Для вдалої побудови такого розширення простору основних функцій вважатимемо, що похідні фундаментального розв'язку рівняння (3.1) задовольняють нерівність

$$|\partial_x^k G_t(x)| \le \hat{B}(k; t, \frac{x}{g(t)}), \quad k \in \mathbb{Z}^n_+,\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \ll 1 \tag{4.3}$$

при деяких додатних функціях $\hat{B}(\cdot;\cdot,\cdot)$ і $g(\cdot)$ таких, що існує:

I) інтегрована на $\mathbb{R}^n$ функція $B(\cdot)$, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ і $0 < t \ll 1$

$$(g(t))^n \hat{B}(0; t, x) \le B(x);$$

II) послідовність γ_k, $k \in \mathbb{Z}_+^n$; функція $E(k,\rho)$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\rho \in [0;+\infty)$ та додатна на $(0;1)$, нескінченно мала у точці $t=0$ функція $\hat{g}(\cdot)$, що

$$\hat{B}(k;t,\frac{x}{g(t)}) \le cA^{|k|}\,\widehat{\gamma_k}\,\hat{g}(t)E(k,\|x\|),$$

$$k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad 0<t\ll 1, \quad \|x\| \ge \delta > 0 \quad (\forall\, \delta \in (0;1)),$$

де c, A — додатні сталі, залежні лише від δ. Також припускатимемо, що $E(k,\rho)$, окрім того, що додатна, монотонно спадна по ρ на $[0;+\infty)$ (при кожному фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+^n$) й інтегрована при $k=0$ на $[\delta;+\infty)$ $(\forall\,\delta>0)$ функція, задовольняє наступні умови:

1) $\exists\, A_1>0\ \forall\,\{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+^n\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n : E(k,\|x\|)E(m,\|x\|) \le A_1^{|k+m|} \times E(k+m,\|x\|)$;

2) $\forall\,\{\mathbb{K},\mathbb{K}_1\}\subset\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}\subset\mathbb{K}_1$, $\inf_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}_1\\ x\in\mathbb{K}}}\|x-\xi\| > 0\ \exists\,\{c_1,A_2\}\subset(0;+\infty)\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+^n\ \forall\, x\in\mathbb{K}\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}_1$: $E(k,\|x-\xi\|)\le c_1A_2^{|k|}E(k,\|\xi\|)$ (тут $\mathbb{K}$ і $\mathbb{K}_1$ — компактні множини); а послідовність γ_k, $k\in\mathbb{Z}_+^n$ така, що

$$\forall\,\{A,B\}\subset(0;+\infty)\ \exists\,\{c_1,A_1,\delta\}\subset(0;+\infty)\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+^n :$$
$$A^{|k|}k!\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{e^{\overline{M}_\nu(\rho_{k_\nu})}}{\rho_{k_\nu}^{k_\nu}}\cdot\inf_{m\ge 0}\left\{\frac{B^m\alpha_{\nu,m}}{|x_\nu|^m}\right\}\right)\le c_1A_1^{|k|}\,\widehat{\gamma_k}\,E(k,\delta\|x\|). \tag{4.4}$$

За послідовністю γ_k, $k\in\mathbb{Z}_+^n$ та функцією $E(\cdot,\cdot)$ побудуємо простір $\hat{W}_{\{\gamma_k\}}^E$:

$$\hat{W}_{\{\gamma_k\}}^E \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\ \Big|\ \exists\,\{c,A,\delta_1\}\subset(0;+\infty)\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+^n\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n :$$
$$|D_x^k\varphi(x)|\le cA^{|k|}\,\widehat{\gamma_k}\,E(k,\delta_1\|x\|)\}.$$

Поруч з $\hat{W}_{\{\gamma_k\}}^E$ розглянемо простір $\hat{W}_{\{\gamma_k\}}^{E;B,\delta}$, де B і δ — фіксовані додатні величини, елементами якого є всі ті функції φ з $\hat{W}_{\{\gamma_k\}}^E$, для яких оцінюючі константи A, δ_1 з нерівності (що у описі простору $\hat{W}_{\{\gamma_k\}}^E$) такі, що $A>B$ і $\delta_1<\delta$. У цьому просторі традиційним чином визначимо систему норм:

$$\|\varphi\|_{\rho,\eta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}}\left\{|D_x^k\varphi(x)|/((B+\rho)^{|k|}\,\widehat{\gamma_k}\,E(k,\delta(1-\eta)\|x\|))\right\},$$

$$\{\rho,\eta\}\subset\{1/n, n\ge 2\},$$

згідно з якою $\hat{W}_{\{\gamma_k\}}^{E;B,\delta}$ стає зліченно-нормованим простором; при цьому $\hat{W}_{\{\gamma_k\}}^E = \bigcup_{B,\delta>0}\hat{W}_{\{\gamma_k\}}^{E;B,\delta}$.

Зазначимо, що згідно з теоремою 2.3 та припущенням (4.4) правильні такі вкладення:

$$W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}} \subset \hat{W}^{E}_{\{\gamma_k\}} \subset \hat{W}^{E}_{\{\beta_k\}} \subset \big(\hat{W}^{E}_{\{\beta_k\}}\big)' \subset \big(\hat{W}^{E}_{\{\gamma_k\}}\big)' \subset \big(W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}\big)',$$
$$\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\} \geq \{\gamma_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}.$$

Принцип локалізації сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 4.1. *Нехай фундаментальний розв'язок $G_t(\cdot)$ рівняння* (3.1) *при кожному t з $(0;T]$ належить $W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}$; виконуються всі припущення, зроблені у цьому пункті, а послідовність $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\} \geq \{\gamma_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$, окрім того, що задовольняє умову А), така, що серед елементів простору $\hat{W}^{E}_{\{\beta_k\}}$ є фінітні функції. Тоді, якщо узагальнена функція f з $(\hat{W}^{E}_{\{\beta_k\}})'$ збігається на множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервною функцією g, то $\omega(t,\cdot) \overset{\text{def}}{=} \langle f, G_t(\cdot - \xi)\rangle$ прямує до g при $t \to +0$ рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $g(x) \equiv 0$ на Q. Нехай $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1 \subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ — деяка компактна в $\mathbb{R}^n$ множина така, що

$$\exists\, a_0 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{K}\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1 :\ \|x - \xi\| \geq a_0.$$

Побудуємо фінітну функцію $\eta_0 \in \hat{W}^{E}_{\{\beta_k\}}$ з носієм в Q так, щоб $\eta_0 = 1$ на $\mathbb{K}_1$.

Зазначимо, що завдяки припущенню 1) для функції $E(\cdot,\cdot)$ та умові А) для $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$, у просторі $\hat{W}^{E}_{\{\beta_k\}}$ визначена операція множення і, оскільки, при кожному фіксованому $t \in (0;T]$ $G_t(\cdot) \in W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}} \subset \hat{W}^{E}_{\{\beta_k\}}$, а у $W^{\overrightarrow{M}}_{\{\alpha_k\}}$ визначена операція зсуву, то $\{\eta_0(\cdot)G_t(\cdot - \xi);\ (1-\eta_0(\cdot))G_t(\cdot - \xi)\} \subset \hat{W}^{E}_{\{\beta_k\}}$. Отже,

$$\omega(t,x) = \langle f, \eta_0(\cdot)G_t(x - \cdot)\rangle + \langle f, \eta_1(\cdot)G_t(x - \cdot)\rangle,$$

де $\eta_1(\cdot) = 1 - \eta_0(\cdot)$. Зважаючи на те, що узагальнена функція f дорівнює нулеві в області Q, а $\operatorname{supp}(\eta_0(\cdot)G_t(x - \cdot)) \subset Q$, з попередньої рівності одержуємо

$$\omega(t,x) = \hat{g}(t)\langle f, (\hat{g}(t))^{-1}\eta_1(\cdot)G_t(x - \cdot)\rangle.$$

Для доведення теореми (у випадку $g(\cdot) \equiv 0$) досить установити, що сукупність функцій $\hat{\omega}_{t,x}(\xi) \overset{\text{def}}{=} (\hat{g}(t))^{-1}\eta_1(\xi)G_t(x-\xi)$ обмежена у просторі $\hat{W}^{E}_{\{\beta_k\}}$ рівномірно за змінними t (для достатньо малих значень), $x \in \mathbb{K}$ та $\xi \in \mathbb{R}^n$, тобто

$$|D^k_\xi \hat{\omega}_{t,x}(\xi)| \leq cA^{|k|}\, \widehat{\beta_k}\, E(k, \delta\|\xi\|), \quad k \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{4.5}$$

де сталі c, A, δ незалежні від t, x і ξ. Але оскільки $\hat{\omega}_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{K}_1$, то оцінку (4.5) досить встановити лише для $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1$.

Згідно з формулою Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, маємо

$$|D_\xi^k \hat{\omega}_{t,x}(\xi)| = (\hat{g}(t))^{-1} \Big| \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l D_\xi^l \eta_1(\xi) D_\xi^{k-l} G_t(x-\xi) \Big|$$

$$\leq (\hat{g}(t))^{-1} \Big(\big| D_\xi^k G_t(x-\xi) \big| + \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l |D_\xi^l \eta_0(\xi)| |D_\xi^{k-l} G_t(x-\xi)| \Big).$$

Тепер, зважаючи на нерівність (4.3), припущення II), 1), 2) (з цього пункту), а також на нерівність $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\} \geq \{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ та виконання умови A) для послідовності β_k, $k \in \mathbb{Z}_+^n$ і належність η_0 до $\hat{W}_{\{\beta_k\}}^E$, одержимо

$$|D_\xi^k \hat{\omega}_{t,x}(\xi)| \leq (\hat{g}(t))^{-1} \Big(c A^{|k|} \widehat{\gamma_k}\, \hat{g}(t) E(k, \|x-\xi\|)$$

$$+ \sum_{|l|=0}^{|k|} c_1 2^{|k|} A_1^{|l|} \widehat{\beta_l}\, E(l, \delta_1 \|\xi\|) c A^{|k-l|} \widehat{\gamma}_{k-l} \hat{g}(t) E(k-l, \|x-\xi\|) \Big)$$

$$\leq c_2 A_2^{|k|} \widehat{\beta_k} \Big(E(k, \|x-\xi\|)$$

$$+ \sum_{|l|=0}^{|k|} E(l, \delta_1 \|\xi\|) E(k-l, \|\xi\|) \Big(\frac{E(k-l; \|x-\xi\|)}{E(k-l; \|\xi\|)} \Big) \Big)$$

$$\leq c_3 A_3^{|k|} \widehat{\beta_k}\, E(k, \delta_2 \|\xi\|),$$

$$k \in \mathbb{Z}_+^n,\ 0 < t \ll 1,\ x \in \mathbb{K},\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1,$$

де $\delta_2 = \min\{1; \delta_1\}$, а c_3, A_3 — додатні сталі, незалежні від k, t, x і ξ.

Отже, оцінку (4.5) встановлено і тим самим доведено рівномірну по x на $\mathbb{K}$ збіжність $\omega(t,x)$ до нуля при $t \to +0$.

На підставі щойно встановленого факту, беручи до уваги те, що $f - g = 0$ на Q і $\eta_1 f = 0$ на $\mathbb{K}_1$, загальний випадок зводиться до доведення того, що

$$I_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-\xi)(\eta_0 g)(\xi)\, d\xi \underset{t\to+0}{\longrightarrow} (\eta_0 g)(x) \tag{4.6}$$

рівномірно по $x \in \mathbb{K} \subset Q$ (бо $\omega(t,x) = \langle \eta_0(f-g), G_t(x-\cdot)\rangle + \langle \eta_1 f, G_t(x-\cdot)\rangle + \langle \eta_0 g, G_t(x-\cdot)\rangle$, а $\eta_0 g$ — регулярний функціонал).

Оскільки згідно з властивістю оборотності перетворень Фур'є $\int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-\xi)\,d\xi = \theta_t(0)$, $t \in (0;T]$, то

$$\begin{aligned}
&|I_t(x) - (\eta_0 g)(x)| \\
&\quad = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_t(x-\xi)((\eta_0 g)(x) - (\eta_0 g)(\xi))\,d\xi + O(t)(\eta_0 g)(x) \right| \\
&\quad \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_t(\zeta)||(\eta_0 g)(x-\zeta) - (\eta_0 g)(x)|\,d\zeta + |O(t)|\,|(\eta_0 g)(x)|, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

де $O(t) \overset{\text{def}}{=} 1 - \theta_t(0) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 0$.

Функція $\eta_0 g$ є фінітною (з носієм в Q) і неперервною, тому: a) $\sup_{x\in\mathbb{K}} |(\eta_0 g)(x)| = N_1 < +\infty$; b) $\sup_{\substack{x\in\mathbb{K}\\ \zeta\in\mathbb{R}^n}} |(\eta_0 g)(x-\zeta) - (\eta_0 g)(x)| = N_2 < +\infty$; c) $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in \mathbb{K}\ \forall\,\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\|x - \zeta + x\| = \|\zeta\| < \delta$: $|(\eta_0 g)(x-\zeta) - (\eta_0 g)(x)| < \varepsilon$. Отже,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_t(\zeta)||(\eta_0 g)(x-\zeta) - (\eta_0 g)(x)|\,d\zeta \\
&\qquad\qquad \le \varepsilon \int\limits_{\|\zeta\|<\delta} |G_t(\zeta)|\,d\zeta + N_2 \int\limits_{\|\zeta\|\ge\delta} |G_t(\zeta)|\,d\zeta \\
&\qquad\qquad\qquad \le \varepsilon I_1(t) + N_2 I_2(t), \quad x \in \mathbb{K},\ t \in (0;1), \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

де

$$I_1(t) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_t(\zeta)|\,d\zeta, \qquad I_2(t) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\|\zeta\|\ge\delta} |G_t(\zeta)|\,d\zeta.$$

Згідно з нерівністю (4.3), припущеннями I), II), зробленими у цьому пункті, та інтегровністю $E(0,\rho)$ на кожному $[\delta;+\infty)$, $\delta > 0$, дістанемо, що

$$\begin{aligned}
&I_1(t) \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} B(\zeta)\,d\zeta = N_3 < +\infty, \quad N_3 \ne N_3(t); \\
&I_2(t) \le c_1 \hat{g}(t) \int\limits_{\|\zeta\|\ge\delta} E(0,\|\zeta\|)\,d\zeta = c_1 c_2(\delta)\hat{g}(t), \quad t \in (0,1),\ \delta > 0.
\end{aligned} \qquad (4.9)$$

Функція $c_2(\delta) = \int_{\|\zeta\|\ge\delta>0} E(0,\|\zeta\|)\,d\zeta$ — монотонно зростає при наближенні δ до нуля і не обов'язково обмежена на $(0;1)$. Оскільки

$\hat{g}(t)$ — додатна на множині $(0;1)$, нескінченно мала у точці $t=0$, то для кожного $\delta \in (0;1)$ знайдеться таке $t_0 \in (0;1)$, що для всіх t з $(0;t_0)$ виконується нерівність $c_2(\delta) \le (\sqrt{\hat{g}(t)})^{-1}$. Зваживши при цьому на оцінки (4.8), (4.9), з нерівності (4.7) одержимо, що

$$\forall\, \varepsilon \in (0;1)\ \exists\, t_0 \in (0;\varepsilon)\ \forall\, t \in (0;t_0):$$
$$\sup_{x\in\mathbb{K}} |I_t(x) - (\eta_0 g)(x)| \le \varepsilon N_1 + \sqrt{\hat{g}(\varepsilon)}c_1 N_2 + O_1(\varepsilon)N_1, \quad O_1(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0,$$

тобто виконання умови (4.6).

Звідси вже, враховуючи те, що $\eta_0 g = g$ на $\mathbb{K}$, приходимо до твердження даної теореми. Теорему доведено. $\square$

На завершення наведемо кілька прикладів.

Приклад 4.1. Прокоментуємо твердження теореми 4.1 у випадку розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності (4.1).

У [3] встановлено, що для кожного f з $(S_{1/2}^{1/2})'$ існує єдиний розв'язок u рівняння (4.1), диференційовний по t і нескінченно диференційовний по x, який задовольняє у слабкому розумінні початкову умову

$$u|_{t=0} = f$$

і такий, що $u(t,\cdot) = \langle f, G_t(\cdot - \xi)\rangle$, $t > 0$.

Як уже зазначалося, для похідних фундаментального розв'язку $G_t(\cdot)$ рівняння (4.1) виконуються оцінки (4.2), з яких одержуємо, що $\hat{B}(k;t,\frac{x}{g(t)}) = cA^k t^{-(k+1)/2} k^{k/2} e^{-\delta x^2/t}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, причому $g(\cdot) = \sqrt{(\cdot)}$, а $B(\cdot) = ce^{-\delta(\cdot)^2}$. Оскільки

$$e^{-p} \le \frac{m!}{p^m} \qquad (\forall\, m \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, p \in \mathbb{R}_+),$$

то

$$\hat{B}\Big(k;t,\frac{x}{g(t)}\Big) \le c_1 A_1^k t k^k e^{-\frac{\delta}{2}\cdot\frac{x^2}{t}}, \quad t>0,\ |x| \ge \delta > 0,\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже: $\hat{g}(t) = t$, $t > 0$; $E(k,|x|) = e^{-\frac{\delta}{2}x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а $\gamma_k = k^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Не важко переконатися, що для таким чином вибраних $\hat{g}(\cdot)$, $E(\cdot,\cdot)$ і γ_k виконуються всі необхідні припущення (цього пункту); простір $\hat{W}^E_{\{\gamma_k\}} = S^1_{1/2}$, причому правильні такі вкладення:

$$S_{1/2}^{1/2} \subset S_{1/2}^{1} \subset S_{1/2}^{\beta} \subset \big(S_{1/2}^{\beta}\big)' \subset \big(S_{1/2}^{1}\big)' \subset \big(S_{1/2}^{1/2}\big)', \quad \beta \ge 1.$$

Однак у $S^1_{1/2}$ не існує фінітних функцій, проте вони є у просторі $S^\beta_{1/2}$, $\beta > 1$ [1]. І, згідно з теоремою 4.1, принцип локалізації для розв'язку рівняння (4.1) справджується у просторі $(S^{\beta}_{1/2})'$, $\beta > 1$ початкових даних.

Зазначимо, що вперше принцип локалізації для розв'язків параболічних за Петровським рівнянь у просторі узагальнених функцій повільного зростання був встановлений Городецьким В. В. [3].

Приклад 4.2. Дослідимо властивість локалізації розв'язку задачі Коші для простішого випадку рівняння (3.13):

$$\partial_t u(t,x) + ((aE - D_x^2)^{\alpha/2} u)(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{4.10}$$

при $a > 0$ і $\alpha > 1$.

Як було зазначено, задача Коші для (4.10) коректно розв'язна для початкових даних з $(S_1^{1/\alpha})'$, перетворення Фур'є яких є мультиплікатором у просторі $S^1_{1/\alpha}$. Функція $G_t(x) = F^{-1}[e^{-t(a+\xi^2)^{\alpha/2}}](t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ є фундаментальним розв'язком рівняння (4.10). З'ясуємо оцінки похідних $G_t(\cdot)$, $0 < t \ll 1$. Для цього здійснимо заміну змінної інтегрування у інтегралі

$$|D_x^k G_t(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}} \xi^k e^{-t(a+\xi^2)^{\alpha/2} + ix\xi}\, d\xi\right|, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

згідно з правилом $\zeta = t^{1/\alpha}\xi$. Поклавши $z = t^{-1/\alpha}x$ і зінтегрувавши частинами m разів, при $|z| > 0$, одержимо

$$|D_x^k G_t(x)| \le \frac{c}{|z|^m t^{(1+k)/\alpha}} \sum_{l=0}^{m} C_m^l \frac{k!}{(k-l)!} \int_{\mathbb{R}} |\zeta|^{k-l} \big|D_\zeta^{m-l} e^{-(t^{2/\alpha}a+\zeta^2)^{\alpha/2}}\big|\, d\zeta.$$

Безпосередньо переконуємося у тому, що

$$\big|D_\zeta^l e^{-(t^{2/\alpha}a+\zeta^2)^{\alpha/2}}\big| \le cA^l l! \big(t^{2/\alpha}a + \zeta^2\big)^{\frac{\alpha-l}{2}} e^{-\delta(t^{2/\alpha}a+\zeta^2)^{\alpha/2}},$$
$$l \in \mathbb{Z}_+,\ t > 0,\ \zeta \in \mathbb{R},$$

де c, A, δ — додатні сталі, незалежні від t, ζ і l.

Звідси дістаємо

$$|D_x^k G_t(x)| \le c_1 A_1^k B^m m! |z|^{-m} t^{-(1+k)/\alpha}$$
$$\times \int_{\mathbb{R}} \big(t^{2/\alpha}a + \zeta^2\big)^{(k+\alpha-m)/2} e^{-\delta(t^{2/\alpha}a+\zeta^2)^{\alpha/2}}\, d\zeta \tag{4.11}$$

(тут сталі c, A_1, B і δ — незалежні від $t > 0$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$ та $|z| > 0$).

Тепер оцінимо інтеграл

$$I(t;m,k)=\int\limits_{\mathbb{R}}(t^{2/\alpha}a+\zeta^2)^{(k+\alpha-m)/2}e^{-\delta(t^{2/\alpha}a+\zeta^2)^{\alpha/2}}\,d\zeta.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $m>k+\alpha$, тоді

$$I(t;m,k)\le(\sqrt{a}t^{1/\alpha})^{k+\alpha-m}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\delta|\zeta|^\alpha}\,d\zeta=c_0(\sqrt{a}t^{1/\alpha})^{k+\alpha-m},$$

$$c_0\ne c_0(t;m,k).$$

Якщо ж $m=k+\alpha$, то

$$I(t;m,k)\le\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\delta|\zeta|^\alpha}\,d\zeta=c_0.$$

При $m<k+\alpha$ маємо

$$I(t;m,k)\le\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{k+\alpha-m}{\alpha}}\sup_{p\ge0}\{p^{\frac{k+\alpha-m}{\alpha}}e^{-p}\}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\frac{\delta}{2}|\zeta|^2}\,d\zeta$$
$$\le c_2A_2^kB_1^m(k+\alpha-m)^{(k+\alpha-m)/\alpha},$$

де c_2, A_2, B_1 — додатні сталі, незалежні від t, m і k.

Аналізуючи одержані оцінки інтеграла $I(t;\cdot,\cdot)$, $t>0$, зважаючи при цьому на нерівність (4.11), а також — залежність змінної z від t, приходимо до висновку, що оцінюючий вираз з (4.11) є обмежений (у звичайному розумінні) по t на $(0;1)$ у випадку, коли $m\ge k+\alpha$ і необмежений при $0\le m\ll k+\alpha$. Тому надалі розглядатимемо лише натуральні $m\ge k+\alpha$. Для таких m з $\mathbb{N}$ одержимо, що

$$|D_x^kG_t(x)|\le c_3A_3^kB_3^mt^{\gamma(m)}m!|z|^{-m},\quad |z|>0,\ t>0,\ k\in\mathbb{Z}_+,\tag{4.12}$$

де c_3, A_3, B_3 — додатні сталі, незалежні від t, z, k і m, а

$$\gamma(m)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}-(1+k)/\alpha, & m=k+\alpha,\\ 1-(1+m)/\alpha, & m>k+\alpha.\end{cases}$$

Якщо ще зважити на те, що при $z=0$

$$|D_x^kG_t(x)|\le ct^{-(1+k)/\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}}|\zeta|^ke^{-(t^{2/\alpha}a+\zeta^2)^{\alpha/2}}\,d\zeta$$
$$\le c2^{k/\alpha}t^{-(1+k)/\alpha}\sup_{p\ge0}\{p^{k/\alpha}e^{-p}\}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{2}|\zeta|^\alpha}\,d\zeta$$
$$\le c_4A_4^kk^{k/\alpha}t^{-(1+k)/\alpha},\quad c_4\ne c_4(t,x,k),\ A_4\ne A_4(t,x,k),$$
$$k\in\mathbb{Z}_+,\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\tag{4.13}$$

то об'єднуючи (4.12), (4.13) дістанемо

$$|D_x^k G_t(x)| \le c_5 A_5^k B_5^m m^m t^{\gamma(m)} (1+|z|)^{-m}$$

для всіх $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$, $m \ge k+\alpha$, $|z| \ge 0$ і $t \in (0;1)$ (тут враховано те, що $m^m > k^{\frac{1}{\alpha}k}$, а $\gamma(m) \le -(1+k)/\alpha$). Звідси, повертаючись від z до x, остаточно одержимо

$$\begin{gathered} |D_x^k G_t(x)| \le c_5 A_5^k B_5^m m^m t^{1-1/\alpha} (t^{1/\alpha}+|x|)^{-m}, \\ m \ge k+\alpha,\ k \in \mathbb{Z}_+,\ t \in (0;1),\ x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Оцінку (4.14) можна записати компактніше шляхом виключення параметра m. Дійсно, оскільки (4.14) виконується для всіх $m \ge k+\alpha$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (або — теж саме, що $m = k+\alpha+\tau$, $\tau \in \mathbb{Z}_+$), то

$$\begin{aligned} |D_x^k G_t(x)| &\le c_5 A_5^k t^{1-1/\alpha} \inf_{m \ge k+\alpha} \Big\{ \frac{B_5^m m^m}{(t^{1/\alpha}+|x|)^m} \Big\} \\ &\le c_6 A_6^k \frac{t^{1-1/\alpha} k^k}{(t^{1/\alpha}+|x|)^{k+\alpha}} \inf_{\tau \in \mathbb{Z}_+} \Big\{ \Big(\frac{b\tau}{t^{1/\alpha}+|x|} \Big)^{\tau} \Big\}, \end{aligned}$$

де c_6, A_6 і b — додатні сталі, незалежні від t, x, k і τ.

Далі, скориставшись тим, що [1]

$$\inf_{\tau \in \mathbb{Z}_+} \Big\{ \Big(\frac{b\tau}{|y|} \Big)^{\tau} \Big\} \le \overline{c} \exp\Big\{ -\frac{1}{eb}|y| \Big\}, \quad y \in \mathbb{R},$$

одержимо

$$\begin{gathered} |D_x^k G_t(x)| \le \hat{c} A_6^k \frac{t^{1-1/\alpha} k^k}{(t^{1/\alpha}+|x|)^{k+\alpha}} e^{-\delta(t^{1/\alpha}+|x|)}, \\ x \in \mathbb{R},\ t \in (0;1),\ k \in \mathbb{Z}_+, \end{gathered} \tag{4.15}$$

де $\hat{c}$, A_6, δ — додатні сталі, незалежні від x, t і k.

Тепер перейдемо до опису простору узагальнених початкових даних, у якому, згідно з теоремою 4.1, виконується принцип локалізації розв'язку задачі Коші для рівняння (4.9). Для цього, виходячи з оцінки (4.15), покладемо

$$\hat{B}(k;t,\frac{|x|}{g(t)}) = \hat{c} A_6^k t^{1-1/1\alpha} k^k (t^{1/\alpha}+|x|)^{-(k+\alpha)} e^{-\delta(t^{1/\alpha}+|x|)}.$$

Якщо при цьому за $g(t)$ вибрати $t^{1/\alpha}$, то

$$g(t)\hat{B}(0;t,y) = \hat{c}(1+y)^{-\alpha} e^{-\delta t^{1/\alpha}(1+y)} \le \hat{c}(1+y)^{-\alpha} = B(y)$$

(зазначимо, що $(1+y)^{-\alpha}$ — інтегровна функція на $[0;+\infty)$).

Далі,

$$\hat{B}\Big(k;t,\frac{|x|}{g(t)}\Big) \le \hat{c}A_6^k t^{1-1/1\alpha} k^k |x|^{-(k+\alpha)} e^{-\delta|x|} \le \frac{\hat{c}}{\rho^\alpha}\Big(\frac{A_6}{\rho}\Big)^k t^{1-1/\alpha} k^k e^{-\delta|x|},$$
$$|x| \ge \rho \ (\forall\, \rho > 0).$$

Звідси одержуємо: послідовність $\gamma_k = k^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$; функція $\hat{g}(t) = t^{1-1/\alpha}$, $t \in (0;1)$; $E(k,|x|) = e^{-\delta|x|}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Не важко переконатися, що зазначені функції задовольняють усі припущення, зроблені на початку п. 4, при цьому $\hat{W}^E_{\{\gamma_k\}} = S_1^1$ і правильні такі вкладення:

$$S_1^{1/\alpha} \subset S_1^1 \subset S_1^\beta \subset \big(S_1^\beta\big)' \subset \big(S_1^1\big)' \subset \big(S_1^{1/\alpha}\big)', \quad \beta \ge 1.$$

Оскільки у просторі S_1^β, $\beta > 1$ містяться фінітні функції, то згідно з твердженням теореми 4.1 у просторі $(S_1^\beta)'$, $\beta > 1$ справджується принцип локалізації для розв'язків задачі Коші для рівняння (4.10).

Література

[1] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций.* М.: Физматгиз, 1958, 307 с.

[2] И. М. Гельфанд, Г.Е.Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.* М.: Физматгиз, 1958, 274 с.

[3] В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівняння параболічного типу.* Чернівці: Рута, 1998, 225 с.

[4] Б. Л. Гуревич, *Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для систем конечно-разностных уравнений* // Докл. АН СССР, **XCIX** (1954), N 6, 893–895.

[5] Б. Л. Гуревич, *Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для дифференциально-разностных уравнений* // Докл. АН СССР, **108** (1956), N 6, 1001–1003.

[6] В. А. Литовченко, *Корректная разрешимость задачи Коши для одного псевдодифференциального уравнения интегрального вида в пространствах типа S* // Нелинейные граничные задачи, Донецк, вып. **13** (2003), 105–113.

[7] M. Nagase, *On the Cauchy problem for parabolic pseudodifferential equations* // Osaka J. Math. **11** (1974), N 2, 239–264.

[8] R. Shinkai, *On symbols of fundamental solutions of parabolic systems* // Proc. Japan Acad. **50** (1974), N 5–6, 337–341.

[9] C. Tsutsumi, *The fundamental solutions for a degenerate parabolic pseudodifferential operator* // Proc. Japan Acad. **50** (1974), N 1, 11–15.

[10] C. Tsutsumi, *The fundamental solutions for a parabolic pseudo-differential operator and parametrices for degenerate operators* // Proc. Japan Acad. **51** (1975), N 2, 103–108.

[11] L. Schwartz, *Theorie des distributions* // Acra. sci industr. **1** (1950), N 1091.

[12] В. А. Літовченко, *Коректна розв'язність задачі Коші для одного рівняння інтегрального вигляду* // Укр. мат. журн. **56** (2004), N 2, 185–197.

[13] С. Мандельбройт, *Квазианалитические классы функций.* М.: Гостехиздат, 1937, 156 с.

[14] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987, 688 с.

[15] Э. Гурса, *Курс математического анализа.* М.: Гостехиздат, 1933, Т. 1, ч. 1, 368 с.

[16] В. М. Борок, *Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных* // Докл. АН СССР, **97** (1954), N 6, 949–952.

[17] В. А. Літовченко, *Повна розв'язність задачі Коші для одного псевдодиференціального рівняння у просторах типу S* // Математичні студії. Львів, **17** (2002), N 2, 189–198.

[18] В. В. Городецький, О. М. Ленюк, *Про дробове диференціювання у просторах типу S'* // Доп. НАН України, (1998), N 11, 20–24.

Відомості про авторів

Владислав Антонович Літовченко

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського 2,
58012, Чернівці
Україна
E-Mail: vladlit@chnu.cv.ua