Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 1, 46 – 63

Сильные сферические средние и сходимость в L кратных тригонометрических рядов

Ольга И. Кузнецова

(*Представлена В. П. Моторным*)

Аннотация. Найден точный при любом $p \geq 1$ порядок роста норм p-сильных средних сферических частичных сумм Фурье в пространстве измеримых ограниченных почти всюду на m-мерном ($m \geq 3$) торе $T^m = [-\pi, \pi)^m$ функций. Доказаны неулучшаемые оценки интегральных норм линейных средних сферических ядер Дирихле через коэффициенты этих средних (неравенства типа неравенства Сидона). Для кратных тригонометрических рядов с радиальной симметрией коэффициентов получены условия, при выполнении которых рассматриваемые ряды являются рядами Фурье, и необходимые и достаточные условия сходимости таких рядов по сферам в $L(T^m)$. В частности, для рядов

$$\sum_{k \in Z^m} \frac{b(|k|)}{|k|^\alpha} e^{ikx},$$

где $\alpha > 0, b(t)$ — медленно меняющаяся (по Зигмунду) функция, доказан критерий сходимости по сферам в $L(T^m)$.

2000 MSC. 42B08, 42B15.

Ключевые слова и фразы. Сферические частичные суммы, сильные средние, сходимость в среднем.

1. Основные определения и результаты

Пусть Z^m — целочисленная решетка в m-мерном евклидовом пространстве R^m, элементы Z^m будем обозначать через $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, $kx = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m$ при $x \in R^m, |k| = (k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2)^{1/2}$. Пусть функция f принадлежит пространству $L_\infty(T^m)$ измеримых ограниченных почти всюду на m-мерном торе $T^m = [-\pi, \pi)^m$ функций,

$$\sum_{k \in Z^m} \hat{f}(k) e^{ikx} - \tag{1.1}$$

Статья поступила в редакцию 21.02.2005

ISSN 1810 – 3200.

ее ряд Фурье с коэффициентами Фурье

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{T^m} f(u) e^{-iku}\, du.$$

Сферическая частичная сумма $S_R(f,x)$ ряда (1.1) определяется числом $R > 0$ и имеет вид

$$S_R(f,x) = \sum_{|k| \le R} \hat{f}(k) e^{ikx}. \tag{1.2}$$

Пусть $p > 0, n \in N$. Назовем p-сильными сферическими средними ряда (1.2) следующие величины:

$$H_{n,p}(f,x) := \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |S_j(f,x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

При $m = 1$ ограниченность по n последовательности

$$H_{n,p} := \sup_{|f| \le 1} H_{n,p}(f,x) = \sup_{|f| \le 1} H_{n,p}(f,0) = \sup_{|f| \le 1} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |S_j(f,0)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

равносильна p-сильной суммируемости рядов Фурье непрерывных периодических функций ([1, стр. 488]): при любом $p > 0$ для любой функции $f \in C(T)$ равномерно по x

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |S_j(f,x) - f(x)|^p \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

При $m = 2$ и $0 < p \le 2$ вопрос об ограниченности последовательности $H_{n,p}$ открыт, известна лишь оценка сверху [2] ([3] при $p = 1$)

$$H_{n,p} \le c\sqrt{\ln(n+1)}, \tag{1.4}$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

При $m = 2$ и $p > 2$ в [4] доказано, что

$$H_{n,p} \le c(p) n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, \tag{1.4.1}$$

где постоянная $c(p) \to \infty$ при $p \to 2 + 0$. Там же показано, что снизу имеет место противоположное неравенство

$$H_{n,p} \ge c_1 n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

с абсолютной постоянной c_1.

При $m > 2$ последовательность $H_{n,p}$ заведомо неограничена. Справедлив следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть $m \geq 3, p \geq 1$. Тогда*

$$H_{n,p} \asymp n^{\frac{m-1}{2} - \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\right)}. \tag{1.5}$$

Константы, входящие в знак $\asymp$, зависят лишь от m.

Напомним, что $\varphi(n) \asymp \psi(n)$ означает, что существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n, что $c_1\varphi(n) \leq \psi(n) \leq c_2\varphi(n)$.

Так как $H_{n,p}$ не убывает с ростом p, верхняя оценка в (1.5) справедлива и при $0 < p < 1$. В предельном случае $p = \infty$ из верхней оценки в (1.5) получаем верхнюю оценку в хорошо известном двустороннем неравенстве для констант Лебега сферических частичных сумм [5] ([6], оценка снизу)

$$\sup_{|f| \leq 1} \|S_R(f)\|_\infty = \sup_{|f| \leq 1} |S_R(f, 0)| \asymp R^{\frac{m-1}{2}}. \tag{1.6}$$

Прямым следствием теоремы 1.1 является аналог неравенства Сидона [7] для сферических ядер Дирихле

$$D_R(x) = \sum_{|k| \leq R} e^{ikx}.$$

Теорема 1.2. *Пусть $m \geq 3, n \in N$. Для любого набора действительных чисел $a_j, j = 0, 1, \ldots, n$, справедливо неравенство*

$$\int\limits_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j D_j(u) \right| du \leq c(m) n^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Точность данного неравенства, невозможность замены в нем $\|\{a_j\}\|_{l_2}$ на норму $\|\{a_j\}\|_{l_q}$ при $q > 2$ следует из теоремы 1.1. Кроме того, при любом n существуют наборы $\{a_j\}_{j=0}^n$, для которых имеет место противоположное (1.7) неравенство. Достаточно положить, например, $a_j = 0, j = 0, \ldots, n-1, a_n \neq 0$.

При $m = 2$ имеет место оценка [2]

$$\int\limits_{T^2} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j D_j(u) \right| du \leq c n^{\frac{1}{2}} \sqrt{\ln(n+1)} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.8}$$

c — абсолютная постоянная.

Неравенства (1.7) и (1.8) используются при исследовании условий интегрирования и сходимости m-кратных тригонометрических рядов

$$\sum_{k \in Z^m} c_k e^{ikx} \tag{1.9}$$

с радиальными, т.е. зависящими только от $|k|$, коэффициентами в пространстве $L(T^m)$, $m \geq 2$, интегрируемых по Лебегу на T^m функций.

Тригонометрический ряд (1.9) сходится по сферам в $L(T^m)$, если существует функция $f \in L(T^m)$ такая, что

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{T^m} |S_R(x) - f(x)|\, dx = 0,$$

где $S_R(x)$ — сферическая частичная сумма ряда (1.9), определяемая подобно (1.2).

Пусть λ_n — сходящаяся к нулю последовательность действительных чисел. Рассмотрим сначала тригонометрический ряд

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{l-1<|k|\leq l} e^{ikx}. \tag{1.10}$$

Полагаем $\Delta\lambda_l = \lambda_l - \lambda_{l+1}$, $l = 1, 2, \ldots$

Теорема 1.3. *Если последовательность λ_n, определяющая коэффициенты ряда* (1.10) *сходится к нулю и, кроме того, удовлетворяет условию*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{l+1} \left[2^l \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} (\Delta\lambda_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \quad \text{\textit{при} } m = 2 \tag{1.11}$$

или условию

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}l} \left[\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} (\Delta\lambda_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \quad \text{\textit{при} } m \geq 3, \tag{1.12}$$

то ряд (1.10) *есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L(T^m)$, который сходится по сферам к f в $L(T^m)$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n n^{\frac{m-1}{2}} = 0. \tag{1.13}$$

Данная теорема есть один из m-мерных аналогов хорошо известной теоремы Фомина [8].

Из теоремы 1.3 легко получить следующий результат для более общих тригонометрических рядов.

Пусть функция $\lambda(t)$ определена при $t \geq 0$. Ее колебание $\omega_t(\lambda)$ на отрезке $[l-1, l]$ есть

$$\omega_l(\lambda) = \sup_{l-1\leq t_1,\, t_2\leq l} |\lambda(t_1) - \lambda(t_2)|.$$

По функции $\lambda(t)$ определим тригонометрический ряд

$$\sum_{k\in Z^m} \lambda(|k|)e^{ikx}. \tag{1.14}$$

Теорема 1.4. *Если функция $\lambda(t)$, определяющая коэффициенты ряда* (1.14), *стремится к нулю при $t\to\infty$ и выполнено условие*

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{l+1}\Big[2^l\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1}\omega_j^2(\lambda)\Big]^{\frac12}<\infty \quad \text{при } m=2 \tag{1.15}$$

или условие

$$\sum_{l=0}^{\infty}2^{\frac{m-1}{2}l}\Big[\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1}\omega_j^2(\lambda)\Big]^{\frac12} \quad \text{при } m\ge 3, \tag{1.16}$$

то ряд (1.14) *есть ряд Фурье некоторой функции $f\in L(T^m)$, сходящийся по сферам к f в $L(T^m)$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)t^{\frac{m-1}{2}}=0. \tag{1.17}$$

Одно из возможных применений теоремы 1.4 есть доказательство критерия сходимости по сферам в $L(T^m)$ рядов

$$\sum_{k\ne 0}\frac{b(|k|)}{|k|^\alpha}e^{ikx}, \tag{1.18}$$

где $\alpha>0$, а $b(u)$ — медленно меняющаяся (по Зигмунду) функция, т.е. положительная функция, определенная при $u>0$, и такая, что при любом $\delta>0$ функция $b(u)u^\delta$ при достаточно больших u возрастает, а $b(u)u^{-\delta}$ убывает. Одномерную теорию таких рядов см. в [9, гл. 5], m-мерную при более узком классе бесконечно дифференцируемых функций $b(u)$ — в [10].

Из результатов работы [5] следует, что ряд

$$\sum_{k\ne 0}\frac{e^{ikx}}{|k|^\alpha},$$

$(b(u)\equiv 1)$ расходится по сферам в $L(T^m)$, если $\alpha<\frac{m-1}{2}$. Очевидно, что при $\alpha>\frac{m}{2}$ ряд (1.18) сходится в $L_2(T^m)$, следовательно, и в $L(T^m)$. Другие случаи сходимости или расходимости рядов данного вида нам не были известны.

Теорема 1.5. *Для того чтобы ряд* (1.18) *сходился по сферам в $L(T^m)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{u\to\infty}b(u)u^{\frac{m-1}{2}-\alpha}=0.$$

2. Оценки сильных средних

В этом пункте приведем доказательство теоремы 1.1 и некоторые следствия. Нам потребуется следующий результат Э. С. Белинского ([12, теорема 1, верхняя оценка]).

Пусть $\Lambda(x)$ — измеримая ограниченная функция на R^m, имеющая компактный носитель. Рассмотрим последовательность линейных операторов $(n \in N)$

$$L_n^\Lambda : f \to \sum_{k\in Z^m} \Lambda\left(\frac{k}{n}\right) \hat{f}(k)e^{ikx}.$$

Теорема A.

$$\begin{aligned}\|L_n^\Lambda\|_{L_1(T^m)\to L_1(T^m)} &= \|L_n^\Lambda\|_{L_\infty(T^m)\to L_\infty(T^m)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{T^m}\left|\sum_k \Lambda\left(\frac{k}{n}\right)e^{-ikx}\right|dx \le \int\limits_{nT^m}\prod_{i=1}^m \frac{x_i}{2n\sin\frac{x_i}{2n}}|\tilde{\Lambda}(x)|\,dx \\ &\quad + c(m)\int\limits_{\frac{1}{2\pi}T^m}\left[\sum_k\left|\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)-\Lambda\left(\frac{k+u}{n}\right)\right|^2\right]^{\frac12}du,\end{aligned}$$

где

$$\tilde{\Lambda}(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{R^m}\Lambda(u)e^{-iux}\,du \text{ —}$$

преобразование Фурье функции $\Lambda(x)$.

Доказательство теоремы 1.1 *Оценка снизу.* При $p \ge 2$ достаточно в правой части (1.3) оставить одно слагаемое $(n+1)^{\frac{1}{p}}|S_n(f,x)|$ и применить нижнюю оценку из двустороннего неравенства (1.6). При $p = 1$ воспользуемся приемом Салема [13]. Пусть $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_j\}_0^n, \varepsilon_j = \pm 1$. Тогда

$$\begin{aligned}H_{n,1} &= \sup_{|f|\le 1}\sup_{\{\varepsilon\}}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j S_j(f,0)\right| \\ &= \sup_{\{\varepsilon\}}\frac{1}{n+1}\int\limits_{T^m}\left|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j D_j(u)\right|du \\ &\ge \frac{1}{n+1}\int\limits_{T^m}\int\limits_0^1\left|\sum_{j=0}^n r_j(t)D_j(u)\right|dt\,du, \qquad (2.1)\end{aligned}$$

где $r_j(t) = \text{sign}\,\sin 2^{j+1}\pi t$ — функции Радемахера. В силу известного соотношения ([1, стр. 314])

$$8\int\limits_0^1 \left|\sum_{j=1}^n c_j r_j(t)\right| dt \ge \left(\sum_{j=1}^n c_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ справедливого для любых } c_j,$$

получаем, что

$$\int\limits_0^1 \left|\sum_{j=0}^n r_j(t) D_j(u)\right| dt \gg \left(\sum_{j=0}^n |D_j(u)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=0}^n |D_j(u)|.$$

Тогда из (2.1) и нижней оценки в (1.6) следует, что

$$H_{n,1} \gg \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=[\frac{n}{2}]}^n \int\limits_{T^m} |D_j(u)|\, du \gg n^{\frac{m-2}{2}}.$$

Так как $H_{n,p}$ монотонна по p, при $1 < p < 2$ имеем ту же оценку $H_{n,p} \gg n^{\frac{m-2}{2}}$.

Оценка сверху. Верхнюю оценку достаточно доказать для $p \ge 2$.

$$\begin{aligned} H_{n,p} &= (n+1)^{-\frac{1}{p}} \sup_{|f|\le 1} \sup_{\{\varepsilon\}} \left|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j S_j(f,0)\right| \\ &\ll (n+1)^{-\frac{1}{p}} \sup_{\{\varepsilon\}} \int\limits_{T^m} \left|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j D_j(u)\right| du, \qquad (2.2) \end{aligned}$$

где supremum берется по всевозможным наборам $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_j\}_0^n$ действительных чисел ε_j, удовлетворяющих условию $\sum_{j=0}^n |\varepsilon_j|^q \le 1,\ q = \frac{p}{p-1}$ — показатель, сопряженный к p. Преобразуем сумму под знаком интеграла в (2.2). Пусть

$$\lambda_l = (n+1)^{-\frac{1}{p}} \sum_{j=l}^n \varepsilon_j \text{ при } 0 \le l \le n, \quad \lambda_{n+1} = 0.$$

Тогда ($\Delta\lambda_l = \lambda_l - \lambda_{l+1}$)

$$\begin{aligned} H_{n,p} &\ll \sup_{\{\varepsilon\}} \int\limits_{T^m} \left|\sum_{j=0}^n \Delta\lambda_j \sum_{|k|\le j} e^{iku}\right| du \\ &= \sup_{\{\varepsilon\}} \int\limits_{T^m} \left|\lambda_0 + \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{l-1<|k|\le l} e^{iku}\right| du. \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Определим, исходя из последовательности λ_l, непрерывную на отрезке $[0, n+1]$ функцию $\varphi_n(t)$ следующим образом:

$$\varphi_n(0) = \lambda_0, \quad \varphi_n(1) = \lambda_1, \quad \varphi_n(t) = \lambda_l$$

при $l - 1 + \frac{1}{2(n+1)} \le t \le l,\ 2 \le l \le n+1$, и линейная на оставшихся промежутках. По функции $\varphi_n(t)$ определим функцию $\lambda_n(t)$, полагая $\lambda_n\big(\frac{t}{n+1}\big) = \varphi_n(t)$. Функция $\lambda_n(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[0,1],\ \lambda_n(1) = 0$.

Пусть $\Lambda_n(x)$ — радиальная функция, заданная на единичном шаре $|x| \le 1$ в R^m равенством $\Lambda_n(x) = \lambda_n(|x|)$ и равная нулю вне этого шара.

Если точка $k \in Z^m$ принадлежит шаровому слою $l < |x| \le l+1$ и $1 \le l \le n$, то $|k| - l > \frac{1}{2(l+1)} \ge \frac{1}{2(n+1)}$. Это означает, что шаровые слои $l < |x| \le l + \frac{1}{2(n+1)}, 1 \le l \le n$, не содержат точек из Z^m. Поэтому можно записать, учитывая (2.3) и определение функции $\Lambda_n(x)$, что

$$H_{n,p} \ll \sup_{\{\varepsilon\}} \int\limits_{T^m} \Big| \sum_{|k| \le n+1} \Lambda_n\Big(\frac{k}{n+1}\Big) e^{iku} \Big| \, du. \tag{2.4}$$

Для оценки интеграла в правой части (2.4) применим теорему А.

$$\begin{aligned} H_{n,p} \ll \sup_{\{\varepsilon\}} \Bigg\{ &\int\limits_{(n+1)T^m} |\tilde{\Lambda}_n(u)| \, du \\ &+ \int\limits_{\frac{1}{2\pi}T^m} \bigg[\sum_k \Big| \Lambda_n\Big(\frac{k}{n+1}\Big) - \Lambda_n\Big(\frac{k+u}{n+1}\Big) \Big|^2 \bigg]^{1/2} du \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Оценим сначала второй интеграл.

$$\begin{aligned} &\bigg[\sum_k \Big| \Lambda_n\Big(\frac{k}{n+1}\Big) - \Lambda_n\Big(\frac{k+u}{n+1}\Big) \Big|^2 \bigg]^{1/2} \\ &= \bigg[\sum_k \Big| \lambda_n\Big(\frac{|k|}{k+1}\Big) - \lambda_n\Big(\frac{|k+u|}{n+1}\Big) \Big|^2 \bigg]^{1/2} = \bigg\{ \Big[\lambda_n(0) - \lambda_n\Big(\frac{|u|}{n+1}\Big) \Big]^2 \\ &\qquad + \sum_{l=1}^{n} \sum_{l-1 < |k| \le l} \Big[\lambda_n\Big(\frac{|k|}{n+1}\Big) - \lambda_n\Big(\frac{|k+u|}{n+1}\Big) \Big]^2 \bigg\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

При $l - 1 < |k| \le l \quad \lambda_n\big(\frac{|k|}{n+1}\big) = \lambda_l$. Так как $|u| \le \frac{\sqrt{m}}{2}$ при $u \in \frac{1}{2\pi}T^m$, то при некотором натуральном $p = p(m)$ и $l-1 < |k| \le l$

$$\left|\lambda_n\Big(\frac{|k|}{n+1}\Big) - \lambda_n\Big(\frac{|k+u|}{n+1}\Big)\right| \le \frac{1}{(n+1)^{1/p}} \sum_{j=(l-p)_+}^{l+p} |\varepsilon_j|$$
$$\ll \frac{1}{(n+1)^{1/p}} \Bigg(\sum_{j=(l-p)_+}^{l+p} |\varepsilon_j|^2\Bigg)^{1/2}, \quad (2.7)$$

где $a_+ = a$ при $a \ge 0$ и нулю при $a < 0$.

Поскольку в шаровом слое $l-1 < |k| \le l$ не более чем $c(m)l^{m-1}$ точек из Z^m, получаем, учитывая (2.6) и (2.7), что второй интеграл в (2.5) не превосходит

$$\frac{c_1(m)}{(n+1)^{1/p}} \Bigg(\sum_{j=0}^{p} |\varepsilon_j|^2 + \sum_{l=1}^{n} l^{m-1} \sum_{j=(l-p)_+}^{l+p} |\varepsilon_j|^2\Bigg)^{1/2}$$
$$\ll n^{\frac{m-1}{2}-\frac{1}{p}} \Bigg(\sum_{j=0}^{n} |\varepsilon_j|^2\Bigg)^{1/2} = O\Big(n^{\frac{m-1}{2}-\frac{1}{p}}\Big). \quad (2.8)$$

Оценим первый интеграл в (2.5). Обозначим его через $I_{n,p}$. По теореме Коши–Пуассона [14, стр. 263]

$$\tilde{\Lambda}_n(x) = \int\limits_{|u|\le 1} \Lambda_n(u) e^{-iux}\, du = \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{\alpha^{\frac{m-2}{2}}} \int\limits_0^1 \lambda_n(\rho)\rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m-2}{2}}(\alpha\rho)\, d\rho,$$

где $\alpha = |x|$, а $J_\nu(t)$ — функция Бесселя ν-го порядка. Увеличим область интегрирования в $I_{n,p}$ и перейдем к сферическим координатам. Получаем, что

$$I_{n,p} \ll \int\limits_0^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m}{2}} \left| \int\limits_0^1 \lambda_n(\rho)\rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m-2}{2}}(\alpha\rho)\, d\rho \right| d\alpha.$$

Проинтегрируем по частям во внутреннем интеграле, используя рекурентное соотношение для функций Бесселя ([15, п.7.2.8(50)])

$$\frac{d}{dz}(zJ_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z).$$

По построению $\lambda_n(1) = 0$, а ([15], п.7.2.1(2))

$$J_\nu(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + O(z^{\nu+2}) \quad \text{при } z \to 0,\ \nu \ge 0,$$

поэтому внеинтегральный член равен нулю. Тогда

$$I_{n,p} \ll \int\limits_0^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-2}{2}} \left| \int\limits_0^1 \lambda'(\rho)\rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\alpha\rho)\, d\rho \right| d\alpha$$

$$= \int\limits_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-2}{2}} \left| \int\limits_0^1 \lambda'(\rho)\rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\alpha\rho)\, d\rho \right| d\alpha + O(1),$$

т.к. полная вариация функции $\lambda_n(t)$

$$V(\lambda_n) = (n+1)^{-\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{n} |\varepsilon_j| \le \left(\sum_{j=0}^{n} |\varepsilon_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \le 1, \tag{2.9}$$

а $J_\nu(t)$ ограничены на каждом конечном промежутке. Кроме того, при $0 \le \rho \le \frac{1}{n+1}$ $\quad |\lambda'(\rho)| \le |\varepsilon_0|\,(n+1)^{1-\frac{1}{p}}$ и

$$\int\limits_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-2}{2}} \left| \int\limits_0^{\frac{1}{n+1}} \lambda_n'(\rho)\,\rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\alpha\rho) \right| d\rho \ll \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}},$$

следовательно,

$$I_{n,p} \ll \int\limits_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-2}{2}} \left| \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^1 \lambda'(\rho)\,\rho^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\alpha\rho)\, d\rho \right| d\alpha + O(1). \tag{2.10}$$

Для дальнейших оценок воспользуемся следующей формулой для $J_\nu(t),\ \nu \ge 0$,

$$J_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \quad \text{при } t \to \infty.$$

Подставим в (2.10). Остаточный член есть (см. (2.9))

$$\int\limits_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-5}{2}} \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^1 |\lambda'(\rho)|\, d\rho\, d\alpha = \begin{cases} O\left(n^{\frac{m-3}{2}}\right) & \text{при } m > 3, \\ O(\ln m), & \text{при } m = 3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$I_{n,p} \ll \int\limits_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-3}{2}} \left| \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^1 \lambda_n'(\rho)\,\rho^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) d\rho \right| d\alpha$$

$$+ O\left((n+1)^{\frac{m-2}{2}}\right).$$

Обозначим $q_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$. Производная $\lambda_n'(t)$ равна $-2\varepsilon_l(n+1)^{2-\frac{1}{p}}$ на интервале $\left(\frac{l}{n+1}, \frac{l}{n+1}+q_n\right)$, $1 \le l \le n$, и нулю на смежных интервалах. Поэтому

$$I_{n,p} \ll (n+1)^{2-\frac{1}{p}} \int\limits_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-3}{2}} \times \left| \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l \int\limits_{\frac{l}{n+1}}^{\frac{l}{n+1}+q_n} \rho^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) d\rho \right| d\alpha. \quad (2.11)$$

Заменим подынтегральную функцию в каждом внутреннем интеграле в (2.11) ее значением в левом конце промежутка интегрирования. При $\frac{l}{n+1} \le \rho \le \frac{l}{n+1} + q_n$

$$\left|\rho^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi m}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{l}{n+1}\right)^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\frac{\alpha l}{n+1} - \frac{\pi m}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \left[\left(\frac{l}{n+1} + q_n\right)^{\frac{m-1}{2}} - \left(\frac{l}{n+1}\right)^{\frac{m-1}{2}}\right] + 2\left(\frac{l}{n+1}\right)^{\frac{m-1}{2}} \sin\frac{\alpha q_n}{2} \ll q_n(1+\alpha) \ll q_n\alpha.$$

Поэтому погрешность такой замены не превосходит

$$q_n^2(n+1)^{\frac{m+5}{2}-\frac{1}{p}} = O\left((n+1)^{\frac{m-3}{2}}\right).$$

После замены имеем

$$I_{n,p} \ll \frac{1}{(n+1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{1}{p}}} \int\limits_1^{\pi\sqrt{m}(n+1)} \alpha^{\frac{m-3}{2}} \times \left| \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l l^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\frac{\alpha l}{n+1} - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\alpha + O\left(n^{\frac{m-2}{2}}\right)$$

или, заменяя $\alpha \to (n+1)\alpha$,

$$I_{n,p} \ll \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \int\limits_0^{\pi\sqrt{m}} \left| \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l e^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(l\alpha - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\alpha + O\left(n^{\frac{m-2}{2}}\right)$$

$$\ll \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l l^{\frac{m-1}{2}} \cos\left(l\alpha - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \right|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + O\left(n^{\frac{m-2}{2}}\right)$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\sum_{l=1}^{n} |\varepsilon_l|^2 l^{m-1} \right)^{\frac{1}{2}} + O\big(n^{\frac{m-2}{2}}\big) \ll n^{\frac{m-1}{2} - \frac{1}{p}}.$$

Верхняя оценка в (1.5) (см. (2.8)), а следовательно, и теорема 1.1 доказаны. □

Тем самым для любой $f \in L_\infty(T^m)$ и любого $p > 0$ доказано неравенство

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} |S_j(f)|^p \right\|_\infty \leq c(m,p)\, n^{p[\frac{m-1}{2} - \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{p})]} \, \|f\|_\infty^p. \tag{2.12}$$

Следующая аппроксимационная теорема доказывается хорошо известным методом, если есть оценки вида (2.12). Это аналог неравенства, доказанного впервые в [16] для случая $m = 1$.

Пусть $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f в пространстве $C(T^m)$ тригонометрическими полиномами со спектром в шаре радиуса n:

$$E_n(f) = \inf_T \|f - T\|_\infty, \quad \text{где } T(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}.$$

Теорема 2.1. *Для любой $f \in C(T^m)$, $m \geq 3$, и любого $p > 0$*

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} |f - S_j(f)|^p \right\|_\infty \leq c(m,p) \sum_{j=0}^{n} j^{p[\frac{m-1}{2} - \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{p})]} \, E_j^p(f).$$

Применяя многомерную теорему Джексона (см., напр., [17, с. 113]), утверждающую, что при любом $l \in N$

$$E_n(f) \ll \omega_l\Big(f, \frac{1}{n}\Big),$$

где $\omega_l(f,t) = \sup_{h \in R^m, |h| \leq t} \| \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} f(\cdot + jh)\|_\infty$ — l-тый полный модуль гладкости функции f, получаем оценку скорости приближения f.

В двумерном случае аналогичное неравенство следует из оценок (1.4) и (1.4.1).

3. Неравенство Сидона

Неравенство (1.7) теоремы 1.2 легко следует из верхней оценки (1.5). В самом деле, пусть

$$I_n := \frac{1}{n+1} \int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j D_j(x) \right| dx = \sup_{|f| \leq 1} \frac{1}{n+1} \left| \sum_{j=0}^{n} S_j(f,0) a_j \right|.$$

Тогда

$$I_n \le \sup_{|f|\le 1}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}|S_j(f,0)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}|a_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

при любых $p,q\ge 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

При $p\le 2\quad I_n \ll (n+1)^{\frac{m-2}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}|a_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ и правая часть минимальна при $q=2$.

При $p\ge 2\quad I_n \ll n^{\frac{m-1}{2}-1}\left(\sum_{j=0}^{n}|a_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ и minimum также при $q=2$. Неравенство (1.7) доказано.

Если бы при некотором $q>2$ для любых наборов $\{a_j\}_0^n$ имело место неравенство

$$\int\limits_{T^m}\left|\sum_{j=0}^{n}a_jD_j(x)\right|dx \le c(m)n^{\frac{m-1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{n}|a_j|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

то, полагая $a_j=\operatorname{sign}S_j(f,0)$ для любой функции f с условием $|f|\le 1$, имели бы

$$\sum_{j=0}^{n}|S_j(f,0)| \ll n^{\frac{m-1}{2}+\frac{1}{q}} = n^{\frac{m+1}{2}-\frac{1}{p}}$$

при некотором $p<2$, что противоречит нижней оценке в (1.5). $\square$

Следствие 3.1. *Пусть $m\ge 3,\ l\in N$. Для любого набора действительных чисел $\{a_j\}$*

$$\int\limits_{T^m}\left|\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1}a_jD_j(u)\right|du \ll \left(\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1}j^{m-1}a_l^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1}$$

Для доказательства этого неравенства достаточно в (1.7) положить $n=2^{l+1}-1$ и $a_0=a_1=\dots=a_{2^l-1}=0$.

Аналогичным образом при $m=2$ из (1.8) получаем

$$\int\limits_{T^m}\left|\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1}a_jD_j(x)\right|dx \ll \sqrt{l+1}\left(\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1}ja_j^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

4. Интегрирование тригонометрических рядов

Пусть

$$S_n(x)=\lambda_0+\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\sum_{l-1<|k|\le l}e^{ikx} -$$

n-ая, $n\in N$, сферическая частичная сумма ряда (1.10).

Доказательство теоремы 1.3. Покажем сначала сходимость в $L(T^m)$ ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Delta\lambda_j D_j(x). \tag{4.1}$$

Из условия (1.12) (или (1.11) при $m = 2$) и неравенства (3.1) (соответственно, (3.2)) следует сходимость ряда из норм

$$\sum_{l=0}^{\infty} \int\limits_{T^m} \left| \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta\lambda_j D_j(x) \right| dx < \infty,$$

а следовательно, в силу полноты пространства, сходимость в $L(T^m)$ ряда

$$\Delta\lambda_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta\lambda_j D_j(x).$$

Обозначим его сумму через f. Пусть n — произвольно, выберем l_0 из условия $2^{l_0} \le n+1 < 2^{l_0+1}$. Так как

$$\int\limits_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} \Delta\lambda_j D_j(x) - f(x) \right| dx \le \int\limits_{T^m} \left| \sum_{j=n+1}^{2^{l_0+1}-1} \Delta\lambda_j D_j(x) \right| dx + \int\limits_{T^m} \left| f(x) - \sum_{j=0}^{2^{l_0+1}-1} \Delta\lambda_j D_j(x) \right| dx \tag{4.2}$$

и поскольку для первого слагаемого правой части (4.2) также выполнена оценка (3.1) (или (3.2)) (нужно положить $a_j = 0$ при $2^{l_0} \le j \le n$), получаем, что правая часть (4.2) стремится к нулю при n, а значит, и l_0, стремящемся к ∞. Сходимость ряда (4.1) в $L(T^m)$ доказана.

Покажем, что ряд (1.10) есть ряд Фурье функции f. Для этого нужно показать, что

$$\hat{f}(k_0) = \lambda_l \quad \text{при } l-1 < |k_0| \le l. \tag{4.3}$$

Пусть $n > l$. Тогда

$$\hat{f}(k_0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{T^m} f(u) e^{-ik_0 u}\, du$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{T^m} \left[\sum_{j=0}^{n} \Delta\lambda_j D_j(u) \right] e^{-ik_0 u}\, du + o(1)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{T^m} \left[\lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{j-1<|k|\le j} e^{iku} - \lambda_n D_n(u)\right] e^{-ik_0 u}\, du$$
$$= \lambda_l - \lambda_n + O(1).$$

Так как $n > l$ — произвольно, а $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, получаем (4.3).

Осталось показать, что ряд (1.10) сходится к f в $L(T^m)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.13). Это следует из равенства

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \Delta\lambda_j D_j(x) + \lambda_n D_n(x),$$

сходимости к f ряда (4.1) и двусторонней оценки (1.6). Теорема 1.3 доказана. □

Доказательство теоремы 1.4. Поскольку $|\Delta\lambda(l)| \le \omega_l(\lambda)$, из условий (1.15) и (1.16) следуют соответствующие условия (1.11) и (1.12) теоремы 1.3 для ряда (1.10) с $\lambda_l = \lambda(l)$. Поэтому достаточно показать, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l-1<|k|\le l} [\lambda(|k|) - \lambda(l)] e^{ikx},$$

являющийся разностью рядов (1.14) и (1.10), сходится в $L^2(T^m)$, следовательно, и в $L(T^m)$. Для этого нужно показать, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l-1<|k|\le l} [\lambda(|k|) - \lambda(l)]^2 < \infty.$$

Но данная сумма не превосходит $\sum_{l=1}^{\infty} \omega_l^2 l^{m-1}$, которая конечна в силу условия (1.16) или (1.15). □

5. Сходимость по сферам в L специальных тригонометрических рядов

Чтобы доказать теорему 1.5, нам нужны следующие утверждения.

Лемма 5.1. *Если $b(u)$ — медленно меняющаяся функция, то при любом $t > 0$*

$$|b(u) - b(u+t)| = o\Big(\frac{tb(u)}{u}\Big) \quad \text{\textit{при} } u \to \infty.$$

Для дифференцируемых функций $b(u)$ лемма 5.1 доказана в [10].

Доказательство. При любом $\delta > 0$ функция $\frac{b(u)}{u^\delta}$ убывает при $u \geq u_0(\delta)$, поэтому при этих u

$$\frac{b(u)}{u^\delta} - \frac{b(u+t)}{(u+t)^\delta} \geq 0$$

и

$$b(u) - b(u+t) > -b(u+t)\left[\left(1+\frac{t}{u}\right)^\delta - 1\right].$$

Аналогично, поскольку при любом $\delta > 0$ $\quad b(u)u^\delta$ возрастает при $u \geq u_1(\delta)$,

$$b(u) - b(u+t) \leq b(u+t)\left[\left(1+\frac{t}{u}\right)^\delta - 1\right].$$

Объединяя эти два неравенства и замечая, что выражение в квадратных скобках не превосходит $\frac{\delta t}{u}$ при $\delta \leq 1$, получаем при $u \geq \max(u_0, u_1)$

$$|b(u) - b(u+t)| \leq \frac{\delta t b(u+t)}{u} \leq \frac{2\delta t}{u} b(u).$$

Лемма 5.1 доказана. □

Лемма 5.2. *Если при некотором $\alpha_0 > 0$ ряд*

$$\sum_{k\neq 0} \frac{b(|k|)}{|k|^{\alpha_0}} e^{ikx} \tag{5.1}$$

сходится по сферам в $L(T^m)$, то так же сходится и ряд (1.18), *если $\alpha > \alpha_0$.*

Доказательство. При любом $\alpha_0 > 0$ ряд

$$\sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{|k|^{\alpha_0}}$$

есть ряд Фурье некоторой функции $g_{\alpha_0} \in L(T^m)$ [10] (см. также [18, с. 314]). Обозначим сумму ряда (5.1) через f_{α_0}. Тогда ряд (1.18) при $\alpha > \alpha_0$ есть ряд Фурье свертки $f_\alpha = f_{\alpha_0} * g_{\alpha-\alpha_0}$ и

$$\int\limits_{T^m} |f_\alpha - S_R(f_\alpha)|\,dx = \int\limits_{T^m} \left| \int\limits_{T^m} \big[f_{\alpha_0}(x-y) - S_R(f_{\alpha_0})(x-y)\big] g_{\alpha-\alpha_0}(y)\,dy \right| dx$$

$$\leq \int\limits_{T^m} |g_{\alpha-\alpha_0}|\,dy \int\limits_{T^m} |f_{\alpha_0} - S_R(f_{\alpha_0})|\,dx \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Лемма 5.2 доказана. □

Доказательство теоремы 2.1. Применим теорему 1.4. Пусть $m \geq 3$. При любом $\alpha > 0$ последовательность $\frac{b(l)}{l^\alpha}$ при достаточно больших l монотонно убывает. Кроме того, по лемме 5.1

$$\omega_l\Big(\frac{b(l)}{l^\alpha}\Big) = \frac{b(l)}{l^\alpha} - \frac{b(l+1)}{(l+1)^\alpha} \ll \frac{b(l)}{l^{\alpha+1}}.$$

Поэтому

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}l} \Bigg[\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \omega_j^2\Big(\frac{b(j)}{j^\alpha}\Big)\Bigg]^{\frac{1}{2}} \ll \sum_{l=0}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}l}\Bigg(\sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{b^2(j)}{j^{2(\alpha+1)}}\Bigg)^{\frac{1}{2}} \ll \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b(2^l)}{2^{l(\alpha-\frac{m-2}{2})}}.$$

Последний ряд сходится при $\alpha > \frac{m-2}{2}$ (если сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b(j)}{j}$, то и при $\alpha = \frac{m-2}{2}$). Следовательно, для ряда (1.18) условие (1.16) теоремы 1.4 выполнено, если $\alpha > \frac{m-2}{2}$. При $m = 2$ аналогичное условие (1.15) выполнено, если $\alpha > 0$. Поэтому, если рассматривать промежуток $\alpha > \frac{m-2}{2}$, по теореме 1.4 ряд (1.18) сходится по сферам в $L(T^m)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.17), которое совпадает с условием теоремы 2.1. То, что нет сходимости при $\alpha \leq \frac{m-2}{2}$, следует из леммы 5.2.

Литература

[1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды.* М.: Физматгиз, 1960.

[2] О. И. Кузнецова, *Об одном классе двумерных тригонометрических рядов* // Вісник Харків. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка, (2000), N 475, 76–85.

[3] О. И. Кузнецова, *К вопросу о сильном суммировании по кругам* // Укр. матем. ж. **48** (1996), N 5, 629–634.

[4] О. И. Кузнецова, *О сильных средних круговых частичных сумм Фурье* // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАНУ, **5** (2000), 87–91.

[5] К. И. Бабенко, *О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних.* Препринт N 52 ИПМ АН СССР (1971), 72 с.

[6] В. А. Ильин, *Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа* // УМН. **29** (1968), вып. 2, 61–120.

[7] S. Sidon, *Hinreichende Bedingungen fur den Fourier-Charakter einer trigonometrischen Reihe* // J. London Math. Soc. **14** (1939), N 2, 158–166.

[8] Г. А. Фомин, *Об одном классе тригонометрических рядов* // Матем. заметки. **23** (1978), вып. 2, 213–222.

[9] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1. М.: Мир, 1965.

[10] S. Wainger, *Special trigonometric series in k-dimensions* // Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1965), 102 p.

[11] О. И. Кузнецова, *Сильные сферические средние и сходимость в L кратных тригонометрических рядов* // ДАН, **391** (2003), N 3, 303–305.

[12] Э. С. Белинский, *Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье* // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наук. Думка, (1977), 19–39.

[13] R. Salem, *On strong summability of Fourier series* // Amer. J. Math. **77** (1955), 392–402.

[14] С. Бохнер, *Лекции об интегралах Фурье*. М.: Физматгиз, 1962.

[15] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Т. 2. М.: Наука, 1966.

[16] G. Alexits, D. Kralik, *Über die Approximation mit starken de la Valle-Poussinschen mitteln* // Acta Math. Acad. Sci. Hung. **16** (1965), 43–49.

[17] М. Ф. Тиман, *Аппроксимация и свойства периодических функций*. Дніпропетровськ: Поліграфіст, 2000.

[18] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*. М.: Мир, 1974.

Сведения об авторах

Ольга Ивановна Кузнецова

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Р. Люксембург 74,
83114, Донецк
Украина
E-Mail: kuznets@iamm.ac.donetsk.ua