

В. И. Водолазкий

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАМЕНА ОБОБЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ОБЪЕМНОГО ВЛАГОСОДЕРЖАНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЛАГОПЕРЕНОСА ОТ ВСАСЫВАЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ

(Рекомендовано д-ром геол.-минерал. наук А. Б. Ситниковым)

Для прогнозних розв'язків висхідних рівнянь нелінійного вологопереносу в насичено-ненасичених водою ґрунтах необхідні параметри, які визначаються з контрольованою точністю, у вигляді залежностей об'ємного вологовмісту та коефіцієнтів вологопереносу від усмоктуючого тиску. Первинні дослідні дані про них, зокрема об'ємний вологовміст, зазвичай представлені у вигляді дискретних значень у спеціальних таблицях або формулах. Для використання їх в обчисленнях таких масив висхідних дискретних значень замінюється (апроксимується) спеціальними математичними функціями. Відомими є прості експоненціальні функції, які зручні для обчислювальних операцій, але мають ряд недоліків (не відображають фізичної суті вологопереносу, їх похибки попередньо не контрольовані та ін.). Запропоновані нові математичні апроксимації у вигляді дещо ускладнених аналітичних формул, але позбавлених зазначених недоліків і призначених для реалізації концепції оптимістичних і песимістичних прогнозних рішень, що розробляються.

The parameters determined with the supervised accuracy as the relations for the volumetric moisture content and water transfer coefficients on suction pressure are needed to predict the of initial equation solutions for non-linear water transfer in soils saturated and unsaturated by water. The primary experimental data such as the volumetric moisture content are expressed as discrete values into the special tables or the formulae. This array of initial discrete values is used in the calculations after the substitution (approximation) by the special mathematical functions. The simple known exponential functions are convenient for the calculating process but they suffer from a number of the drawbacks (they don't represent the physical sense of water transfer, their errors are unsupervised previously, etc.). The new mathematical approximations are proposed as a few complicated formulae without above drawbacks and applicable to realize the developed conception of optimistic and pessimistic solutions.

При решении прогнозных задач влагопереноса в зоне аэрации требуются такие параметры, как обобщенный коэффициент конвективного влагопереноса, резко нелинейно зависящий от отрицательного всасывающего давления при влагопереносе  $K_p(p_{вс})$ , и нелинейная зависимость объемного влагосодержания от всасывающего давления  $W_p(p_{вс})$ . Последнюю зависимость принято считать основной гидрофизической характеристикой (ОГХ). Эти задачи предусматривают определение всасывающих давлений и расходов при вертикальном влагопереносе в пористых насыщенно-ненасыщенных грунтах, в основу которых положены следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \vartheta_p &= -K_p(p_{вс}) \cdot \text{grad } \Phi_p; \\ \Phi &= p_{вс}/\gamma_p + z; \quad \gamma_p = \rho_p \cdot g; \\ \frac{\delta W_p(p_{вс})}{\delta t} &= \text{div } \vartheta_p + I; \quad i = \text{const}, \end{aligned}$$

где  $\vartheta_p$  – конвективная скорость влаги (точнее, удельный расход, приведенный к единице сечения грунта), м/сут;  $\Phi$  – специальная гидрофизическая функция, м;  $W_p(p_{вс})$  – обобщенная при влагопереносе и фильтрации зависимость объемного влагосодержания от всасывающего давления, б/р;  $K_p(p_{вс})$  – коэффициент влагопереноса для ненасыщенных и насыщенных грунтов, зависящий от всасывающего давления, м/сут;  $p_{вс}$  – всасывающее избыточное давление жидкого раствора, кПа;  $\gamma_p$  – удельный вес жидкого порового раствора, кг/м<sup>2</sup> · с<sup>2</sup>;  $\rho_p$  – плотность раствора, кг/м<sup>3</sup>;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $z$  – вертикальная координата, направленная вверх, м;  $t$  – временная координата.

Обычно до настоящего времени в качестве зависимостей  $K_p(p_{вс})$  и  $W_p(p_{вс})$  использовали в виде экспоненциальных функций [3]

$$\begin{aligned} K(p_{вс}/\gamma_p) &= K_\phi \cdot e^{\alpha_1 p_{вс}/\gamma_p}; \\ W_p(p_{вс}/\gamma_p) &= W_{\text{пол}} \cdot e^{\alpha_2 p_{вс}/\gamma_p}, \end{aligned} \quad (1)$$

© В. И. Водолазкий, 2009

где  $K_\phi$  – постоянный коэффициент при полном насыщении, м/сут;  $W_{\text{пол}} = A$  – полное влагонасыщение при  $p_{\text{вс}} = 0$ , б/р;  $\alpha_1, \alpha_2$  – некоторые постоянные безразмерные коэффициенты.

В работе [2] применяется более сложная зависимость коэффициента влагопереноса от всасывающего давления, позволяющая реализовать исходные уравнения влагопереноса по специальным вычислительным программам для цифровых вычислительных машин:

$$K(\theta) = K_0 \cdot (\theta^*)^\beta, \quad (2)$$

где  $\theta^* = e^{-\alpha p_{\text{вс}}}$ ;  $\beta = 1 - 4$ .

Несомненно, достоверность прогнозных расчетов определяется тем, насколько правомочно эти исходные параметрические зависимости будут отражать реальный влагоперенос. Приведенным же функциональным зависимостям  $K_p(p_{\text{вс}})$  свойственны неконтролируемые значительные ошибки аппроксимации исходных опытных параметров, особенно в области их резкой нелинейности. К тому же применяемые условные постоянные коэффициенты не отражают физической сути процессов. Из-за этих недостатков получаемые результаты расчетов могут оказаться достаточно приближенными, и по ним нельзя оценить достоверность решения, особенно в случае, когда нам не известен прогнозный диапазон изменений всасывающих давлений.

Появление работ [4, 5] дало возможность определить аналитические зависимости  $K_p(p_{\text{вс}})$  и  $W_p(p_{\text{вс}})$  для конкретных грунтов, отражающие физическую сущность изучаемого процесса. Рекомендованные в них формулы позволяют получить массив дискретных значений  $W_p(p_{\text{вс}})_j$  по рассчитанному всасывающим давлениям для  $j$ -го размера твердых частиц, входящих составной частью в данную структуру грунта согласно его гранулометрическому составу. Используя формулы расчета коэффициента конвективного влагопереноса от отрицательного всасывающего давления с учетом этих  $W_p(p_{\text{вс}})_j$ , можно вычислить массив дискретных значений  $K_p(p_{\text{вс}})_j$  [4].

В настоящей статье приводится новая методика более надежной математической аппроксимации предлагаемых  $W_p(p_{\text{вс}})$  и  $K_p(p_{\text{вс}})$ .

В основу положена сравнительная оценка точности рассчитываемых дискретных значений этих параметров согласно критериям вида:

$$\Delta K = \sum_{j=1}^n (K_j - K_j^*)^2 \quad (3)$$

$$\text{и } \Delta W = \sum_{j=1}^n (W_j - W_j^*)^2,$$

где  $K_j, W_p(p_{\text{вс}}), K_j^*, W_p^*(p_{\text{вс}})$  – реальные и аппроксимирующие значения параметров влагопереноса при фиксированном значении  $(p_{\text{вс}})_j$ .

Следует отметить, что ни одна из зависимостей (1) или (2) не может быть обобщенной для различных грунтов, даже одного типа. Поэтому предлагается выделить на нелинейных зависимостях два характерных участка. Первый участок, как правило, в диапазоне 0...–25 кПа с явно выраженной нелинейной частью; второй – начиная с –30 до –40 кПа с линейным характером кривой. То же для коэффициента влагопереноса с участком, описываемым экспоненциальной зависимостью вида  $e^{x_3 p_{\text{вс}}^3 + x_2 p_{\text{вс}}^2}$ , и близким к линейному участку вида  $e^{x_1 p_{\text{вс}}}$ .

Тогда в качестве аппроксимирующей зависимости, описывающей значения  $W_p(p_{\text{вс}})_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , предлагается функция вида

$$W_p^*(p_{\text{вс}}) = (A - x_0) e^{x_3 p_{\text{вс}}^3 + x_2 p_{\text{вс}}^2} + x_0 e^{x_1 p_{\text{вс}}}, \quad (4)$$

где  $x_3, x_2, x_1, x_0 \geq 0$  – постоянные эмпирические коэффициенты.

Напомним, что  $A = W_p(p_{\text{вс}})$  при  $p_{\text{вс}} = 0$ .

В качестве искоемых коэффициентов  $x_3, x_2, x_1, x_0$  предлагается выбирать такой, при котором выражение

$$\Delta W(x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum_{j=1}^n [W_p(p_{\text{вс}})_j -$$

$$- (A - x_0) e^{x_3 (p_{\text{вс}})_j^3 + x_2 (p_{\text{вс}})_j^2} - x_0 e^{x_1 (p_{\text{вс}})_j}]^2$$

принимает минимальное значение.

Поиск минимального значения выражения (5) относится к классу задач нелинейного программирования и отличается сложностью и громоздким объемом вычислений [1]. Поэтому вместо классических приемов предлагается схема решения поиска искомого набора  $x_3^*, x_2^*, x_1^*, x_0^*$ , основанная на базе целенаправленного перебора значений

коэффициентов  $x_3, x_2, x_1, x_0$ , суть которого сводится к таким операциям. Во-первых, в качестве исходных величин берутся опытные значения  $j$ -го объемного влагосодержания от всасывающего давления  $W_p(p_{вс}j)$  или получаемые расчетным путем согласно методике [5]. Затем осуществляется нахождение переменных  $x_0^*$  и  $x_1^*$  поиском точки перегиба ( $j_s$ ) от максимума к минимуму величин  $W_p(p_{вс}j) - W_p(p_{вс}j+1)$ :

$$x_1^* = \frac{\ln W_p(p_{вс})_s - \ln W_p(p_{вс})_{s+1}}{W_p(p_{вс})_s - W_p(p_{вс})_{s+1}};$$

$$x_0^* = \frac{W_p(p_{вс})_s}{\exp[x_1^* W_p(p_{вс})_s]}.$$

Далее проводим поиск значения величин  $x_3^*, x_2^*$  посредством целенаправленного перебора значений коэффициентов, при котором достигается минимальное значение выражения

$$\Delta W(x_3, x_2, x_1^*, x_0^*) = \sum_{j=1}^n [W_p(p_{вс}j) - (A - x_0) e^{x_3(p_{вс}j)^3 + x_2(p_{вс}j)^2} - x_0^* e^{x_1^*(p_{вс}j)}] ^2. \quad (6)$$

Для решения использован перебор значений  $x_3$  и  $x_2$  методом среднего сечения при заданной точности вычислений (порядка  $10^{-6} - 10^{-7}$ ). При этом в качестве относи-

тельной точности аппроксимации взяты относительные погрешности величин (в %):

$$\Delta W_j = \frac{[W_p(p_{вс}j) - W_p^*(p_{вс}j)]}{W_p(p_{вс}j)} \cdot 100, \quad (7)$$

$$j = 1, \dots, n.$$

В соответствии с данной методикой была составлена программа для персональной вычислительной машины. Результаты расчета параметров аппроксимирующих зависимостей и их относительная точность выполнены применительно к исходным данным, приведенным в табл. 1.

В табл. 2 показаны величины параметров аппроксимации по каждому из типов грунтов из табл. 1 функцией вида (4).

В табл. 3 приведены аппроксимирующие зависимости  $W_p^*(p_{вс}j)$  по каждому из типов грунтов с учетом полученных параметров аппроксимации.

Сравнительные результаты относительной точности выполненной аппроксимации (в процентном отношении) приведены в табл. 4 согласно формуле

$$\Delta W_j^* = \frac{[W_p(p_{вс}j) - W_p^*(p_{вс}j)]}{A} \cdot 100. \quad (8)$$

Как видим, полученные относительные погрешности не превышают 5% в области резких изменений всасывающих давлений. Если же такая точность будет не при-

Таблица 1. Расчетные зависимости  $W_p(p_{вс}j)$  для типовых полудисперсных грунтов [5]

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_{вс}$ , кПа, $\alpha=5$	0	-1,5	-3	-6	-15	-30	-150	-300	-750	-1500
$W_p$ , глина	0,48	0,48	0,48	0,4608	0,432	0,384	0,3696	0,3408	0,288	0,192
$W_p$ , суглинок тяжелый	0,48	0,48	0,48	0,432	0,3744	0,312	0,2688	0,216	0,1536	0,0816
$W_p$ , суглинок легкий	0,48	0,48	0,48	0,408	0,312	0,192	0,1776	0,1536	0,12	0,072
$W_p$ , супесь	0,48	0,48	0,4752	0,3744	0,2544	0,096	0,0672	0,048	0,0336	0,0144
$W_p$ , песок тонкозернистый	0,48	0,48	0,4704	0,4032	0,2016	0,0384	0,0288	0,0192	0,0096	0,0048
$W_p$ , песок грубозернистый	0,4704	0,4704	0,384	0,0864	0,0192	0,0096	0,0048	0	0	0

Таблица 2. Параметры аппроксимирующих зависимостей

	A	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$W_p^*$ , глина	0,48	0,4001	0,0005	0,0043	0
$W_p^*$ , суглинок тяжелый	0,48	0,3345	0,0015	0,0058	0
$W_p^*$ , суглинок легкий	0,48	0,2054	0,0010	0,0046	0
$W_p^*$ , супесь	0,48	0,0941	0,0022	0,0042	0
$W_p^*$ , песок тонкозернистый	0,48	0,0410	0,0024	0,0045	0
$W_p^*$ , песок грубозернистый	0,47	0,0384	0,0462	0	0,0084

Таблица 3. **Аппроксимирующие значения  $W_p^*(p_{вс})_j$  для типовых грунтов**

J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_{вс}$ , кПа, $\alpha=5$	0	-1,5	-3	-6	-15	-30	-150	-300	-750	-1500
$W_p^*$ , глина	0,48	0,477	0,471	0,445	0,367	0,321	0,269	0,216	0,112	0,037
$W_p^*$ , суглинок тяжелый	0,48	0,477	0,471	0,452	0,372	0,321	0,269	0,216	0,112	0,037
$W_p^*$ , суглинок легкий	0,48	0,477	0,468	0,437	0,3	0,204	0,178	0,154	0,099	0,048
$W_p^*$ , супесь	0,48	0,476	0,465	0,424	0,234	0,097	0,067	0,048	0,018	0,003
$W_p^*$ , песок тонкозернистый	0,48	0,475	0,462	0,414	0,199	0,046	0,029	0,020	0,007	0,001
$W_p^*$ , песок грубозернистый	0,47	0,456	0,378	0,099	0,019	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000

Таблица 4. **Относительная погрешность точности аппроксимации  $\Delta W_J^*$ , %**

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_{вс}$ , кПа, $\alpha=5$	-1,5	-3	-6	-15	-30	-150	-300	-750	-1500
$\Delta W_p^*$ , глина	0,23	0,76	-1,36	0,90	-2,51	0,00	0,00	4,34	2,90
$\Delta W_p^*$ , суглинок тяжелый	0,55	1,85	-3,68	1,60	-1,87	0,00	0,00	8,65	9,18
$\Delta W_p^*$ , суглинок легкий	0,65	2,44	-6,02	2,51	-2,47	0,00	0,00	4,30	4,98
$\Delta W_p^*$ , супесь	0,83	2,14	-10,4	3,08	-0,09	0,00	0,00	3,36	2,32
$\Delta W_p^*$ , песок тонкозернистый	0,95	1,69	-2,21	0,50	-1,59	0,00	-0,19	0,58	0,76
$\Delta W_p^*$ , песок грубозернистый	3,11	1,32	-2,78	0,00	0,00	1,01	0,00	0,00	0,00

емлема, то можно воспользоваться другим, но достаточно сложным видом аппроксимирующей функции вида:

$$W_p^{**}(p_{вс}) = \left[ (A - x_0 e^{x_3 p_{вс}^3 + x_2 p_{вс}^2} + x_0 e^{x_1 p_{вс}}) \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \sum_{j=1}^n d_j \cdot e^{-a[p_{вс} - (p_{вс})_j]^2} \right] \right] \\ \text{при } d_j = \frac{W_p^*(p_{вс})_j - W_p(p_{вс})_j}{W_p^*(p_{вс})_j}, \quad (9)$$

где  $d_j$  – исходный параметр, задающий необходимость улучшения точности в  $j$ -й точке, б/р ( $d_j = 0$ , если нет такой необходимости);  $a$  – коэффициент, равный 1–5, определяющий степень уменьшения величины точности аппроксимирующей функции в областях  $j \pm 1/2$ .

В табл. 5 приведены результаты расчета относительной точности выполненной аппроксимации по зависимости  $W_p^{**}(p_{вс})$  (9),

которая, в свою очередь, вычислялась по следующему уравнению:

$$\Delta W_J^{**} = \frac{[W_p(p_{вс})_j - W_p^{**}(p_{вс})_j]}{A} \cdot 100. \quad (10)$$

Теперь, зная аппроксимирующие функции по (4) или с повышенной точностью (9), можем рассчитать нелинейные коэффициенты влагопереноса  $K_p^*(p_{вс})_j$  или  $K_p^{**}(p_{вс})_j$  по одной из формул в работе [5]. Так, для одной из схем, в частности **схемы разноструктурного грунта с известной удельной поверхностью твердого скелета**, предложена формула при постоянном смачивании твердых частиц:

$$K_p^*(p_{вс})_{стр} = \frac{\eta_{стр} \cdot \beta_p^3 \cdot \rho_p \cdot g \cdot W_p^2(p_{вс}) \cdot h_{эф}}{\mu_p s_{уд} \rho_{ТВ} W_{ТВ}} \quad (11)$$

$$\text{при } h_{эф} = \frac{W_p(p_{вс})}{s_{уд} \rho_{ТВ}} - h_{адс}, \quad s_{уд} = \frac{K_{ТВ}^p}{\rho_{ТВ} \varphi^p},$$

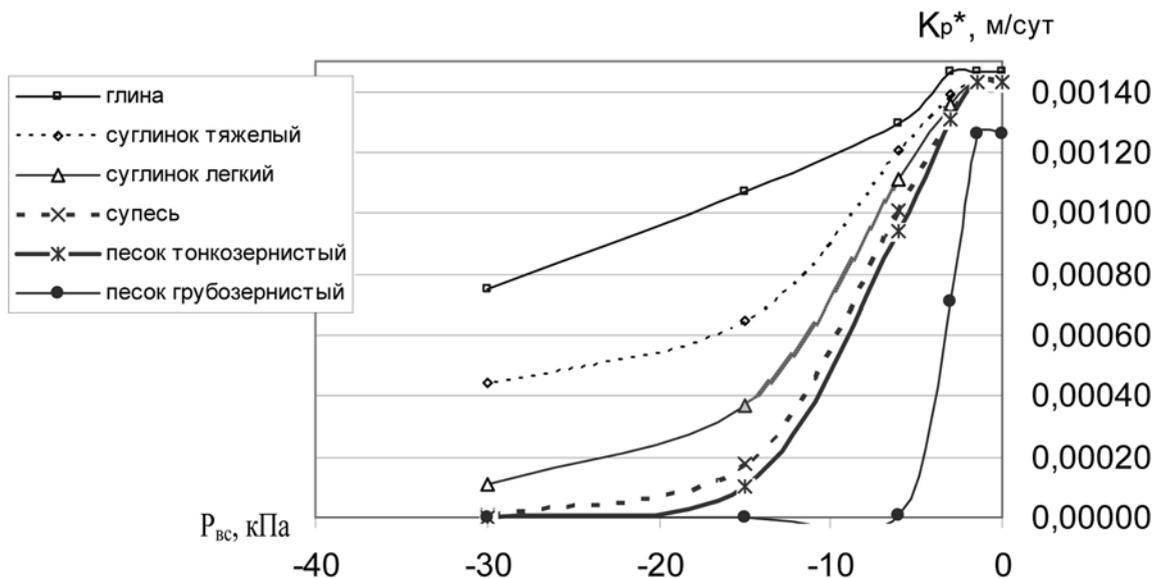
где  $\beta_p$  – поправочный эмпирический коэффициент, б/р;  $\rho_{ТВ}$  – плотность твердого ве-

Таблица 5. Относительная погрешность точности аппроксимации  $\Delta W_J^{**}$

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_{вс}$ , кПа, $\alpha=5$	-1,5	-3	-6	-15	-30	-150	-300	-750	-1500
$\Delta W_p^{**}$ , глина	0,23	0,76	0,00	0,90	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\Delta W_p^{**}$ , суглинок тяжелый	0,55	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\Delta W_p^{**}$ , суглинок легкий	0,65	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\Delta W_p^{**}$ , супесь	0,83	0,00	0,00	0,00	0,09	0,00	0,00	0,00	0,00
$\Delta W_p^{**}$ , песок тонкозернистый	0,95	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00	-0,19	0,57	0,76
$\Delta W_p^{**}$ , песок грубозернистый	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 6. Аппроксимирующие значения  $K_p^*(p_{вс})_j$  для типовых грунтов

j	1	2	3	4	5	6
$p_{вс}$ , кПа, $\alpha=5$	-1,5	-3	-6	-15	-30	-150
$K_p^*$ , глина	0,00146	0,00143	0,00135	0,00104	0,00082	0,00067
$K_p^*$ , суглинок тяжелый	0,00144	0,00139	0,00121	0,00065	0,00044	0,00026
$K_p^*$ , суглинок легкий	0,00144	0,00136	0,00111	0,00036	0,00011	0,00007
$K_p^*$ , супесь	0,00143	0,00133	0,00101	0,00018	0,00001	0,00000
$K_p^*$ , песок тонкозернистый	0,00143	0,00131	0,00099	0,00010	0,00000	0,00000
$K_p^*$ , песок грубозернистый	0,00126	0,00071	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000



Зависимость коэффициента влагопереноса от всасывающего давления

щества,  $кг/м^3$ ;  $\mu_p$  – динамическая вязкость жидкого водного порового раствора,  $кг/м\cdot c$ ;  $S_{уд}$  – удельная поверхность твердой фазы грунта,  $м^2/кг$ ;  $K_p^*(p_{вс})^{стр}$  – коэффициент сорбции или десорбции с учетом сравнения с опытным коэффициентом фильтрации при  $p_{вс} = 0$ ,  $м/сут$ ;  $\varphi_i^p$  – удельная поверхностная сорбция или десорбция,  $м$ ;  $h_{адс}$  – расчетный адсорбционный коэффициент,  $м$ ;  $\eta_{стр}$  – поправочный расчетный коэффициент,  $б/р$ .

В табл. 6 и на рисунке приведены результаты вычислений по формуле (11) со-

ласно разработанной программе для персонального компьютера при следующих исходных данных:  $p_{вс} = -1,5, -3, -6, -15, -30, -150$  кПа,  $h_{адс} = 5 \cdot 10^{-8}$  м,  $K_{ТВ}^{сорб} = 45$ ,  $\varphi_{кварц}^{сорб} = 0,22 \cdot 10^{-3}$ ,  $\mu_p = 1,3 \cdot 10^{-3}$   $кг/м\cdot c$ ,  $\rho_p = 1000$   $кг/м^3$ ,  $W_{ТВ} = 0,65$ ,  $\beta_p = 0,2$  и  $0,5$ ,  $g = 9,8$   $м/с^2$ , и величинах  $W_p^*(p_{вс})_j$ , приведенных в табл. 3.

Таким образом, рекомендуемые формулы математической аппроксимации, описывающие с требуемой точностью опытные дискретные зависимости, позволяют получить исходные для математического моде-

лирования основные нелинейные параметры влагопереноса. С их помощью можно уточнить безразмерные коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta$  в применяемых расчетных формулах (1), (2). Безусловно, открывается перспектива достоверной оценки точности прогнозных решений, тем более с точки зрения применения разрабатываемой концепции пессимистических и оптимистических результатов таких решений.

1. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Лейпциг: Тойбнер; – М.: Наука, 1981. – 719 с.
2. *Пашковский И. С.* Определение параметров влагопереноса в зоне аэрации // Инженерные изыскания в строительстве. – М.: ПНИИИС, 1973. – С. 30.

3. *Ситников А. Б.* Гидрофизический метод оценки давлений и расходов при установившемся влагопереносе в зоне аэрации // Геол. журн. – 1989. – № 4. – С. 42–49.
4. *Ситников А. Б.* Рекомендуемые расчетные формулы обобщенного коэффициента влагопереноса и фильтрации ненасыщенно-насыщенных грунтов // Там же. – 2007. – № 2. – С. 92–100.
5. *Ситников А. Б.* Рекомендуемые расчетные формулы оценки обобщенной нелинейной зависимости объемного влагосодержания грунтов от всасывающего давления // Там же. – 2008. – № 1. – С. 87–97 .

Ин-т геол. наук НАН Украины,  
Киев  
E-mail: geoj@bigmir.net

Статья поступила  
06.10.08