Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 1, 1 – 31

Регулярность обобщённого решения первой начально-краевой задачи для нелинейного вырождающегося параболического уравнения

Борис В. Базалий, Николай В. Краснощек

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Доказана классическая разрешимость однородной задачи Дирихле для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения $v_t = v^{1+s}v_{xx}$, $0 < s < 1$, в весовых пространствах Гельдера. Доказательство основано на применении методов теории потенциалов при получении коэрцитивных оценок для однородной задачи Дирихле для модельного уравнения вида $u_t = x^{1+s}u_{xx} + f$ на полуоси $x > 0$.

2000 MSC. 35K65, 35B65.

Ключевые слова и фразы. Вырождающиеся параболические уравнения, теория потенциала, априорные оценки.

1. Введение

Пусть $s \in (0,1)$, $\Omega = (0,l)$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, где l, T — произвольные положительные числа.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} v_t = v^{1+s}v_{xx}, &\qquad (x,t) \in \Omega_T, \\ v(x,t) = 0, &\qquad (x,t) \in \Sigma_T; \\ v(x,0) = v_0(x), &\qquad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

Обозначим $\omega(x) = x(l-x)$.

Будем предполагать, что

$$v_0 \in C^1\left(\overline{\Omega}\right), \quad v_0(0) = v_0(l) = 0, \tag{1.2}$$

Статья поступила в редакцию 24.12.2004
Работа была частично поддержана грантом 01.07/00130 ДФФД Украины и грантом INTAS 03-51-5007.

ISSN 1810 – 3200.

$$\varkappa_* \omega^\mu(x) \le v_0(x) \le \varkappa^* \omega^\mu(x) \quad \text{при} \quad x \in [0, l], \\ \text{где } 0 < \varkappa_* < \varkappa^*, \qquad \mu \in \Big[1, \frac{2}{1+s}\Big). \tag{1.3}$$

Постановка задачи (1.1) возникает, например, следующим образом (см. [1]). Рассмотрим задачу Коши для уравнения пористой среды ($m > 1$):

$$u_t = (u^m)_{yy}\,, \quad y \in R,\ t > 0; \qquad u(y, 0) = u_0(y), \quad y \in R, \tag{1.4}$$

где $u_0(y)$ заданная неотрицательная функция. Известно (см. [2]), что если начальная функция u_0 имеет конечный носитель (ζ_0, η_0), то носитель решения задачи (1.4) ограничен свободными границами $\{y = \zeta(t)\}$, $\{y = \eta(t)\}$.

Обозначим

$$l = \int\limits_{\zeta_0}^{\eta_0} u_0(z)\, dz$$

и сделаем замену переменной

$$x = \int\limits_{-\infty}^{y} u(z, t)\, dz. \tag{1.5}$$

При данной замене носитель $(\zeta(t), \eta(t))$ отображается на фиксированный интервал $(0, l)$, а функция $v(x, t) = c_m u^m(y, t)$, является решением задачи (1.1), где $c_m = m^{m/(m+1)}$, $v_0(x) = c_m u_0^m(y)$, $s = 1/m$. В то же время, например, левая граница носителя решения задачи (1.4) может быть найдена из соотношения

$$\zeta(t) = \zeta_0 - c_m^{-1} \int\limits_0^t v_x(0, \tau)\, d\tau.$$

Условия (1.2), (1.3), в частности, означают, что

$$u_0^{m-1}(y) \ge \tilde{\mu}(y - \zeta_0)^{1+\gamma}, \qquad \gamma \in [0, 1) \tag{1.6}$$

в некоторой малой окрестности точки $x = \zeta_0$. Следовательно, (см. [3]) в задаче (1.4) равно нулю время ожидания, в течение которого свободная граница $\zeta(t)$ неподвижна.

Подробный перечень ссылок работ, посвящённых изучению задач вида (1.1) может быть найден в [4, 5]. Библиография по параболическим уравнениям с вырождением различного вида приводится в [2,6].

Отметим также работу [7], в которой замена вида (1.5) обобщена на случай уравнений реакции-диффузии $u_t = (u^m)_{yy} + f(u)$ и работу [8] , посвященную построению асимптотического решения и асимптотики границы фронта $\zeta(t)$ для уравнения пористой среды, в случае, когда начальная функция имеет вид:

$$u_0(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 0, \\ (-y)^{\frac{1+\gamma}{m-1}}\phi(y), & y < 0, \quad \phi(0) \neq 0. \end{cases}$$

Кроме того, следует упомянуть работу [9], в которой предложен новый, оригинальный подход к изучению задач со свободной границей для вырождающихся параболических уравнений с нестепенными нелинейностями. Данный подход позволяет в достаточно общей ситуации получить оценки констант Гельдера по x и t и оценки типа Бернштейна для решения задачи Коши вблизи свободной границы.

Данная работа является продолжением исследования регулярности решений краевых задач для вырождающихся параболических уравнений, начатого в работах [10, 11].

Определение 1.1. *Функцию $v(x,t)$ назовем обобщенным решением задачи* (1.1), *если $v(x,t) \geq 0$ при $(x,t) \in \Omega_T$, $v \in C\left(\overline{\Omega}_T\right) \cap L^\infty\left((0,T); \overset{\circ}{W}{}^{1,\infty}(0,l)\right)$ и для произвольной функции $\psi \in C^{1,1}\left(\overline{\Omega}_T\right)$, $\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0$ выполнено интегральное тождество*

$$\int\limits_0^l v(x,T)\psi(x,T)\,dx - \int\limits_0^l v_0(x)\psi(x,0)\,dx$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^l \left\{ v\psi_t - v^{1+s} v_x \psi_x - (1+s) v^s (v^2)_x \psi \right\} dx\,dt. \quad (1.7)$$

Обозначим $q = 1 - s$, $\Omega_{t_0,T} = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in (t_0,T)\}$, где $t_0 \geq 0$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3), *тогда существует обобщенное решение задачи* (1.1), *причем $v \in H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}_{t_0,T}\right)$, для произвольных $t_0 > 0$ и $\alpha \in (0,1)$.*

Здесь $H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}_{t_0,T}\right)$ — весовое пространство Гельдера, определенное ниже в п. 4.

План работы состоит в следующем. В первом пункте приводится схема доказательства существования обобщенного решения. Во втором пункте методом построения барьерных функций получены априорные оценки, являющиеся основой для доказательства теоремы 1.1.

В третьем пункте сформулированы основные результаты относительно разрешимости начально-краевой задачи для линейного вырождающего параболического уравнения

$$\begin{aligned} u_t \ &= a(x,t)\omega^{1+s}u_{xx} + f(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega_T,\\ u(x,t) = 0,\ (x,t)\in\Sigma_T, &\qquad u(x,0) = u_0(x),\ x\in\Omega \end{aligned} \tag{1.8}$$

в классической постановке. В четвертом пункте получены оценки решения модельной задачи в полупространстве, соответствующей задаче (1.8). В пятом пункте доказана теорема 1.1.

2. Существование обобщенного решения

Данный пункт носит вспомогательный характер. Существование обобщённого решения задачи (1.1) при выполнении условия (1.2) следует из результатов работы [12]. Для полноты изложения приведём основные моменты доказательства. Рассмотрим последовательность аппроксимирующих задач

$$\begin{aligned} v_{n,t} &= a_n(v_n)v_{n,xx}, \quad (x,t)\in\Omega_T,\\ v_n(x,t) &= \frac{1}{n}, \quad (x,t)\in\Sigma_T;\\ v_n(x,0) &= v_{0,n}(x) + \frac{1}{n}, \quad x\in\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где функции $a_n(\cdot)\in C^2(R)$ удовлетворяют условию

$$a_n(v) = \begin{cases} v^{1+s}, & \text{при } v > \frac{1}{n},\\ \left(\frac{1}{2n}\right)^{1+s}, & \text{при } v < \frac{1}{2n}, \end{cases}$$

а $\{v_{0,n}\}$ — последовательность функций таких, что

$$\begin{gathered} 0 \le v_{0,n+1}(x) \le v_{0,n}(x), \quad x\in\Omega,\\ v_{0,n}\to v_0,\ v'_{0,n}\to v'_0, \quad \text{в } C(\overline{\Omega}) \text{ при } n\to\infty. \end{gathered}$$

Также необходимо потребовать выполнение условий согласования до второго порядка включительно, что применительно к данной задаче сводится к следующим равенствам

$$v_{0,n}(x) = 0, \quad v''_{0,n}(x) = 0, \ \text{при } x = 0, l. \tag{2.2}$$

При каждом фиксированном значении n из теоремы 5.2 главы VI монографии [13] следует существование единственного классического решения задачи (2.1).

Используя принцип максимума (см. [12]) можно показать, что

$$\frac{1}{n} \le v_n(x,t) \quad \text{при } (x,t) \in \Omega_T \tag{2.3}$$

и, следовательно, $a_n(v_n((x,t)) = v_n^{1+s}(x,t)$, а также, что имеют место равномерные по n оценки

$$v_n(x,t) \le M_0, \quad |v_{n,x}(x,t)| \le M_1 \quad \text{при } (x,t) \in \Omega_T. \tag{2.4}$$

Нетрудно убедиться в том, что последовательность $\{v_n\}$ невозрастающая. Действительно, для разности $w_n = v_{n+1} - v_n$ имеем

$$\begin{gathered} w_{n,t} = v_{n+1}^{1+s}\, w_{n,xx} + c_n(x,t)\, w_n, \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ w_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \le 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T; \\ w_n(x,0) = v_{0,n+1} - v_{0,n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \le 0, \quad x \in \Omega, \end{gathered}$$

где

$$c_n(x,t) = (1+s) v_{n,xx} \int_0^1 (v_n + \lambda w_n)^s \, d\lambda.$$

Применяя следствие 2.1, гл. I работы [13], заключаем, что $v_{n+1} - v_n \le 0$.

Из оценки (2.4) следует, что

$$|v_n(x,t) - v_n(y,t)| \le M_1 |x-y|, \text{ для всех } (x,t),(y,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{2.5}$$

Далее, поскольку оператор $Lu = u_t - u^{1+s} u_{xx}$ удовлетворяет условиям работы [14], имеем так же следующую оценку

$$|v_n(x,t) - v_n(x,\sigma)| \le C_1 |t-\sigma|^{1/3}, \text{ для всех } (x,t),(x,\sigma) \in \overline{\Omega}_T, \tag{2.6}$$

где постоянная C_1 зависит от M_0, M_1 и l.

Из полученных выше оценок и теоремы Арцела–Асколи вытекает, что последовательность v_n сходится к некоторой функции v равномерно в $\overline{\Omega}_T$ при $n \to \infty$ и $v_{n,x} \to v_x$ слабо в $L^p(\Omega_T)$ для любого $p \in (1,\infty)$, причем $v(x,t)$ липшицева по x, гельдерова по t с показателем $1/3$ и, кроме того, $|v_x| \le M_1$ п.в. в Ω_T. Переходя к пределу в интегральном тождестве (1.7), заключаем, что предельная функция $v(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1.1). Единственность доказана в [1].

3. Получение априорных оценок методом построения барьерных функций

В дальнейших рассуждениях важную роль играют следующие поточечные оценки обобщенного решения v и его производных.

Лемма 3.1 дает описание поведения $v(x,t)$ в окрестности боковой границы Σ_T в зависимости от свойств начальной функции $v_0(x)$. Далее доказана ограниченность максимума модуля функции $v_t/v = v^s v_{xx}$ при $t > 0$. Оценка v_t/v снизу приведена в лемме 3.2. Для оценки сверху (лемма 3.6) предварительно установлена непрерывность производной $v_x(x,t)$ вплоть до границы (лемма 3.3) и, кроме того, в леммах 3.4, 3.5 доказано, что v_t стремится к нулю при $x \to 0$ ($x \to l$) с порядком не меньшим, чем x^s ($(l-x)^s$). Основным результатом данного пункта является оценка (3.38) для $|v_t/v|$ в области $\Omega_{t_0,T}$.

Лемма 3.1. 1. *Пусть для некоторой постоянной* $\varkappa_0$ *имеем*

$$v_0(x) \geq \varkappa_0\ \omega(x),$$

тогда существует постоянная $c_0 > 0$ *такая, что*

$$v(x,t) \geq \varkappa_0 \omega(x) \exp(-c_0\ t) \tag{3.1}$$

при $(x,t) \in \Omega_T$.
2. *Пусть для некоторой постоянной* $\varkappa_1$ *имеем* $v_0(x) \leq \varkappa_1\ \omega(x)$, *тогда существует постоянная* $c_1 > 0$ *такая, что*

$$v(x,t) \leq \varkappa_1 \omega(x) \exp(-c_1\ t) \tag{3.2}$$

при $(x,t) \in \Omega_T$.
3. *Пусть для некоторой постоянной* $\varkappa$ *имеет место неравенство* $v(x,0) \geq \varkappa\ \omega^\mu(x)$, $\mu \in \left(1, \frac{2}{1+s}\right)$, *тогда существуют постоянная* $c > 0$ *и достаточно малое значение параметра* τ *такие, что*

$$v(x,t) \geq \varkappa\big(t^\lambda \omega(x) + \omega^\mu(x)\big) \exp(-c\ t), \tag{3.3}$$

при $(x,t) \in \Omega_\tau$, *где* $\lambda = \frac{1-s\mu}{2-(1+s)\mu}$.

Доказательство. Все три утверждения леммы доказываются применением классического принципа максимума для параболических уравнений. Наибольшую трудность представляет (3.3), поэтому приведём доказательство только этой оценки.

Обозначим $u(x,t) = \varkappa\left(t^\lambda \omega(x) + \omega^\mu(x)\right) \exp(-ct)$. Прежде всего, из ограничений на параметр μ легко убедиться в том, что $\lambda > 1$. Сначала удобно доказать справедливость оценки вида (3.3) для решений задач (2.1).

Пусть при некоторых значениях c и τ имеет место неравенство

$$Lu = u_t - u^{1+s} u_{xx} \le 0 \quad \text{при } (x,t) \in \Omega_\tau, \tag{3.4}$$

тогда для разности $w(x,t) = u(x,t) - v_n(x,t)$ справедливо следующее соотношение

$$w_t = u^{1+s}\, w_{xx} + c_n(x,t)\, w \le 0, \qquad (x,t) \in \Omega_\tau,$$

где

$$c_n(x,t) = (1+s) \int\limits_0^1 (u + \theta(v_n(x,t) - u(x,t))^s \; d\theta\, v_{n,xx}(x,t).$$

Очевидно, можем считать, что

$$w(x,t) \le 0, \ \text{ при } (x,t) \in \Sigma_T; \quad w(x,0) \le 0, \ \text{ при } x \in \Omega.$$

Снова применяя следствие 2.1, гл. I работы [13], можно заключить, что $w(x,t) = u(x,t) - v_n(x,t) \le 0$. Таким образом, проблема сводится к выбору c и τ таких, чтобы было выполнено неравенство (3.4).

Для краткости, будем использовать обозначение $\phi(t) = \varkappa \exp(-ct)$. Имеем

$$Lu = \lambda t^{\lambda-1}\phi(t)\omega(x) - cu(x,t) - u^{1+s}(x,t)\phi(t)\big(t^\lambda \omega''(x) + (\omega^\mu(x))''\big).$$

Т.к.

$$\omega''(x) = -2, \ \ (\omega^\mu(x))'' = \mu\omega^{\mu-1}(x)\omega''(x) + \mu(\mu-1)\omega^{\mu-2}(x)\left(\omega'(x)\right)^2$$

и, следовательно,

$$t^\lambda \omega''(x) + (\omega^\mu(x))'' = -2\big(t^\lambda + \mu\omega^{\mu-1}(x)\big) + \mu(\mu-1)\omega^{\mu-2}(x)\left(\omega'(x)\right)^2,$$

получим

$$Lu = -\frac{c}{2}\, u(x,t) + 2\phi(t) u^{1+s}(x,t)\big(t^\lambda + \mu\omega^{\mu-1}(x)\big)$$
$$-\frac{c}{2} u(x,t) + \lambda t^{\lambda-1}\phi(t)\omega(x) - \mu(\mu-1)\phi(t)u^{1+s}(x,t)\omega^{\mu-2}(x)\left(\omega'(x)\right)^2.$$

Применяя неравенство Юнга в виде

$$ab \le a^q + b^{\frac{q}{q-1}}, \qquad q > 1,$$

при $q = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ имеем

$$u = \phi(t)(t^\lambda \omega + \omega^\mu) \geq \phi(t) t^{\lambda/q} \omega^{1/q} \omega^{\mu(q-1)/q} = \phi(t) t^{\lambda-1} \omega^{1+\frac{\mu-1}{\lambda}}.$$

Аналогично, выбирая q из условия $\frac{\lambda}{q}(1+s) = \lambda - 1$, выводим неравенство

$$\begin{aligned} u^{1+s} &= \phi^{1+s}(t)\big(t^\lambda \omega + \omega^\mu\big)^{1+s} \\ &\geq \phi^{1+s}(t)\big(t^{\lambda/q}\omega^{1/q}\omega^{\mu(q-1)/q}\big)^{1+s} = \phi^{1+s}(t) t^{\lambda-1} \omega^{1+\frac{\mu-1}{\lambda}+\mu s}. \end{aligned}$$

Продолжим далее цепочку неравенств следующим образом

$$\begin{aligned} Lu &\leq \frac{u}{2}\big[-c + 4\phi(t) u^s \big(t^\lambda + \mu\omega^{\mu-1}(x)\big)\big] \\ &\quad - \frac{c}{2}\phi t^{\lambda-1}\omega^{1+\frac{\mu-1}{\lambda}}(x) + \lambda t^{\lambda-1}\phi(t)\omega(x) \\ &\quad - \mu(\mu-1)\phi^{2+s}(t) t^{\lambda-1}\omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}+\mu(1+s)-1}(x)\,\big(\omega'(x)\big)^2 \\ &= \frac{u}{2}\big[-c + 4\varkappa\phi(t) u^s \big(t^\lambda + \mu\omega^{\mu-1}(x)\big)\big] \\ &\quad + \phi t^{\lambda-1}\omega(x)\Big[-\frac{c}{2}\omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}}(x) \\ &\quad - \mu(\mu-1)\phi^{1+s}(t)\omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}+\mu(1+s)-2}(x)\,\big(\omega'(x)\big)^2 + \lambda\Big]. \end{aligned}$$

Теперь необходимо добиться того, чтобы выражения в квадратных скобках были неположительными.

Без ограничения общности можем считать, что $\tau \leq 1$, тогда в первой скобке имеем

$$-c + 4\varkappa M_0^s\big(1 + \mu(l/2)^{2(\mu-1)}\big) \leq 0 \text{ при } c \geq C_2, \tag{3.5}$$

где постоянная C_2 зависит от значений параметров μ, l, $\varkappa$, M_0.

Во второй скобке сначала подставим значение λ в показатель степени ω:

$$-\theta = \frac{\mu-1}{\lambda} + \mu(1+s) - 2 = -\frac{(2-(1+s)\mu)^2}{1-s\mu} < 0.$$

Видим, что $\omega^{-\theta}(x) \to +\infty$ при $x \to 0$ и $x \to l$. Полагая далее, что значение τ зависит от c следующим образом $\tau = \min\{1, \frac{\ln 2}{c(1+s)}\}$ так, что

$$\exp(-c(1+s)t) \geq 1/2 \quad \text{при } t \in [0,\tau]. \tag{3.6}$$

Т.о. в дальнейшем проблема сводится к выбору подходящего значения c. С учетом (3.6) выберем число δ из условия

$$-\mu(\mu-1)\frac{\varkappa^{1+s}}{2}\omega^{-\theta}(x)\,(l-2x)^2 + \lambda \leq 0$$

при $x \in [0,\delta]\cup[l-\delta,l]$, и тогда вторая скобка будет меньше или равна нулю в достаточно малых окрестностях точек $x=0$ и $x=l$. В оставшейся части интервала $(0,l)$ неположительность данного выражения можно обеспечить за счёт выбора достаточно большого значения параметра c. А именно, получим $\omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}}(x) \geq C_3 = \inf_{(\delta,l-\delta)} \omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}}(x) > 0$ при $x \in [\delta, l-\delta]$ и подходящем значении константы C_3, зависящей от δ. Значит

$$-\frac{c}{2}C_3 + \lambda \leq 0 \tag{3.7}$$

при $c \geq C_4 = \frac{2\lambda}{C_3}$. Окончательно, полагаем, что $c = \max\{C_2, C_4\}$ (см. (3.5), (3.7)). Таким образом, выполнено неравенство (3.4) и, следовательно, (см. приведённые выше рассуждения) $v_n(x,t) \geq u(x,t)$ в Ω_τ.

В силу доказанной выше равномерной сходимости v_n к v и единственности полученного решения задачи (1.1) третье утверждение леммы 3.1 доказано. $\square$

Замечание 3.1. Комбинируя оценки (3.1)–(3.3), можем считать, что в предположениях (1.2), (1.3),

$$\tilde{\varkappa}_*\omega(x) \leq v(x,t) \leq \tilde{\varkappa}^*\omega(x), \qquad x \in \Omega,\ t \in [t_0, T], \tag{3.8}$$

где параметры $\tilde{\varkappa}_*$, $\tilde{\varkappa}^*$ зависят от $\varkappa_*$, $\varkappa^*$, t_0, T, причем при $\mu = 1$ считаем, что $t_0 \geq 0$, а при $\mu > 1$, что $t_0 > 0$ и величина $\tilde{\varkappa}_*$ не ограничена при $t_0 \to 0$.

Замечание 3.2. Для произвольного значения $T > 0$ и области Q такой, что $\overline{Q} \subseteq \Omega_T$ имеем

$$\varkappa_0 \leq v_n(x,t) \leq \varkappa_1,$$

где $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ зависят от T и расстояния от Q до параболической границы области Ω_T. Значит, в Q функцию v_n можно рассматривать как решение невырождающегося уравнения $v_{n,t} = v_n^{1+s} v_{n,xx}$, где “коэффициент” $v_n^{1+s} \in H^{2/3,1/3}(\overline{Q})$ (см. (2.5), (2.6)). Метод локальных оценок Шаудера (см. [13]) позволяет получить оценку

$$|v_n|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_\delta)} \leq C(\delta, Q),$$

где $0 < \delta < \mathrm{diam}\ Q/2$, $Q_\delta = \{(x,t) \in Q :\ dist((x,t), \partial\Omega_T) \geq \delta\}$ и аналогичную оценку для $v(x,t)$. Таким образом, в любой подобласти Ω_T функция $v(x,t)$ — решение задачи (1.1) имеет классические производные и уравнение $v_t = v^{1+s} v_{xx}$ выполняется в классическом смысле. Этим замечанием мы будем пользоваться при доказательстве лемм 3.1–3.6

Следующий этап состоит в получении оценок сверху и снизу для функции $\frac{v_t}{v} = v^s v_{xx}$. Сравнительно легко выводится оценка снизу.

Лемма 3.2. *В смысле распределений имеет место оценка*

$$\frac{v_t(x,t)}{v(x,t)} = v^s(x,t)v_{xx}(x,t) \geq -\frac{1}{(1+s)t}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Доказательство леммы основано на применении принципа максимума. Обозначим $w(x,t) = \frac{v_{n,t}(x,t)}{v_n(x,t)}$. Дифференцируя равенство $wv_n = v_n^{1+s}v_{n,xx}$ по t и снова используя определение $w(x,t)$, получаем

$$Pw \equiv w_t - v_n^{1+s}w_{xx} - 2v_n^s v_{n,x}w_x - (1+s)w^2 = 0 \text{ в } \Omega_T,$$
$$w(x,t) = 0 \text{ на } \Sigma_T,$$
$$w(x,0) = v_n^s(x,0)v_{n,xx}(x,0) \text{ в } \Omega.$$

Возьмём в качестве барьера функцию $u(t) = -\frac{1}{(1+s)t}$. Очевидно, $Pu = 0$ и можем считать, что $w(x,t) \geq u(t)$ на параболической границе области Ω_T ($\lim_{t\to 0} u(t) = -\infty$). Отсюда следует (3.9) (см., например, [3]). □

Лемма 3.3 (Непрерывность v_x вплоть до границы). *Для любого $t > 0$ существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to 0} v_x(x,t) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to l} v_x(x,t) \tag{3.10}$$

(*см.* [1, 12]).

Доказательство. Докажем ограниченность первого предела. В силу утверждений лемм 3.1, 3.2 и замечания 3.1 имеем для $0 < y < x < l/2$

$$v_x(x,t) - v_y(y,t) = \int\limits_y^x v_{zz}(z,t)\,dz = \int\limits_y^x v^{-s}(z,t)v^s(z,t)v_{zz}(z,t)\,dz$$
$$\geq -\frac{1}{(1+s)t}\int\limits_y^x [\tilde{\varkappa}_* z(l-z)]^{-s}\,dz \geq -\frac{(\tilde{\varkappa}_* l/2)^{-s}}{(1-s)(1+s)t}\left(x^{1-s} - y^{1-s}\right).$$

Здесь и ниже в случае, когда предполагается, что $t > 0$, использование оценки (3.8) является вполне оправданным, т.к. в качестве t_0 можно взять, например, или само t или $t/2$.

Обозначим $C_5 = \frac{(\tilde{\varkappa}_* l/2)^{-s}}{(1-s)(1+s)t}$. Из последнего неравенства следует, что функция $w(x,t) = v_x(x,t) + C_5 x^{1-s}$ по x не убывает, следовательно существует предел $w(x,t)$ при x стремящемся к нулю, а значит и предел $\lim_{x\to 0} v_x(x,t)$. Рассуждения для случая $x \to l$ проводятся аналогично. $\square$

Следующая лемма является подготовительной для доказательства того факта, что $v_t(0,t) = 0$ и $v_t(l,t) = 0$ при $t > 0$.

Лемма 3.4. *Пусть $t > 0$, тогда*

$$|v_t(x,t)| \le M_2\omega^s(x), \qquad |v_{tt}(x,t)| \le M_2\omega^{2s-1}(x). \tag{3.11}$$

Доказательство. (ср. [15, 16]). Введём обозначение $B_r = \{(z,\tau) : |z| \le r,\ |\tau| \le r\}$. Зафиксируем произвольную точку $(\overline{x},\overline{t}) \in \Omega_T$. Как и в предыдущей лемме, рассматриваем сначала окрестность точки $x = 0$, поэтому для определённости полагаем, что $\overline{x} \le l/2$.

Обозначим $\gamma = \overline{x}/2$ и пусть преобразование $(z,\tau) \to (x,t)$ определяется как

$$x = \gamma z + \overline{x}, \qquad t = \gamma^{1-s}\tau + \overline{t}.$$

Данное преобразование переводит B_1 в K_γ —прямоугольник с вершинами $(\overline{x}-\gamma, \overline{t}-\gamma^{1-s})$, $(\overline{x}+\gamma, \overline{t}-\gamma^{1-s})$, $(\overline{x}+\gamma, \overline{t}+\gamma^{1-s})$, $(\overline{x}-\gamma, \overline{t}+\gamma^{1-s})$. Пусть $w(z,\tau) = \frac{1}{\gamma}v(\gamma z + \overline{x}, \gamma^{1-s}\tau + \overline{t}) = \frac{1}{\gamma}v(x,t)$.

Для дальнейшего хода рассуждений важно, чтобы прямоугольник K_γ принадлежал области Ω_T, а для этого, во-первых, чтобы $\overline{x} - \gamma \ge 0$ (напомним, что $\gamma = \overline{x}/2$) и, во-вторых, чтобы $\overline{t} - \gamma^{1-s} \ge 0$. Возьмём произвольное положительное число δ. Считаем далее, что $\overline{x} \le \delta$ и $\overline{t} \ge \delta^{1-s}$. Следует подчеркнуть, что для нас важен только тот факт, что K_γ непустое, "приграничное" множество. (см. замечание 3.2 к лемме 3.1).

Легко видеть, что при $(z,\tau) \in B_1$, $\gamma = \overline{x}/2$

$$1 = \frac{-\gamma + \overline{x}}{\gamma} \le \frac{\gamma z + \overline{x}}{\gamma} \le \frac{\gamma + \overline{x}}{\gamma} = 3. \tag{3.12}$$

Поэтому для функции

$$w(z,\tau) = \frac{1}{\gamma}v(\gamma z + \overline{x}, \gamma^{1-s}\tau + \overline{t}) = \frac{v(\gamma z + \overline{x}, \gamma^{1-s}\tau + \overline{t})}{\gamma z + \overline{x}}\frac{\gamma z + \overline{x}}{\gamma},$$

из неравенств (3.8) и (3.12) получим

$$0 < \tilde{\varkappa}_* \le w(z,\tau) \le 3\tilde{\varkappa}^*. \tag{3.13}$$

Вычислим производные функции $w(z,\tau)$:

$$w_\tau = \gamma^{-s}v_t, \qquad w_{zz} = \gamma v_{xx}.$$

Теперь легко видеть, что в B_1 функция $w(z,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$w_\tau = w^{1+s} w_{zz},$$

причём в силу (3.13) $w(z,\tau)$ можно рассматривать как решение невырождающегося квазилинейного параболического уравнения. Применяя результаты теорем 3.1, 5.1 работы [12, гл. V], получим

$$|w_\tau(z,\tau)| \le C_6, \qquad |w_{\tau\tau}(z,\tau)| \le C_7,$$

и, в частности, $|w_\tau(0,0)| \le C_6$, $|w_{\tau\tau}(0,0)| \le C_7$, где C_6, C_7 зависят от $\tilde{\varkappa}_*$, $\tilde{\varkappa}^*$. Т.к. $w_\tau = \gamma^{-s} v_t$, $w_{\tau\tau} = \gamma^{1-2s} v_{tt}$ и $\gamma = \overline{x}/2$, при достаточно малых значениях $\overline{x}$ имеем

$$v_t(\overline{x},\overline{t}) \le C_6 \Big(\frac{\overline{x}}{2}\Big)^s, \qquad v_{tt}(\overline{x},\overline{t}) \le C_7 \Big(\frac{\overline{x}}{2}\Big)^{2s-1}.$$

Аналогичным способом устанавливается оценка вида (3.11) в малой окрестности точки $x = l$. Внутри Ω_T ограниченность v_t, v_{tt} следует из замечания 3.2. $\square$

Следствие 3.1. *При $x \in [0,l]$, $t \in [t_0, T]$ справедливы оценки*

$$\big|\big(v^{1-s}(x,t)\big)_t\big| \le C_8, \qquad \big|v^{1-2s}(x,t) v_{tt}(x,t)\big| \le C_9, \tag{3.14}$$

где C_8, C_9 зависят от t_0, T, а t_0 — произвольное положительное число.

Лемма 3.5. *Для всех $t > 0$ имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{x\to 0} \big(v^{1-s}(x,t)\big)_t = 0, \qquad \lim_{x\to l} \big(v^{1-s}(x,t)\big)_t = 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. При доказательстве придерживаемся схемы изложенной в работе [14, гл. 5]. В силу неравенства (3.9) имеем $(v^{1-s})_t \ge -\frac{(1-s)v^{1-s}}{(1+s)t}$, следовательно

$$\liminf_{x\to 0} (v^{1-s})_t \ge 0.$$

Докажем, что $\limsup_{x\to 0} (v^{1-s})_t \le 0$.

Зафиксируем произвольное положительное число t_0. Обозначим $N_\varepsilon = \{(x,t) : 0 < x < \varepsilon,\ |t - t_0| < \varepsilon\}$. Покажем, что $(v^{1-s})_t(x,t_0) \le \sigma(\varepsilon)$ при $(x,t_0) \in N_\varepsilon$, где $\sigma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Доказательство проведём методом от противного. Пусть существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n \in N_\varepsilon$

$$(v^{1-s})_t(x_n, t_0) \ge \delta > 0, \tag{3.16}$$

то, *с одной стороны*, имеем

$$v^{1-s}(x_n, t_0 + \alpha\varepsilon_n^{1-s}) = (1-s)\int_0^{x_n} v^{-s}(z, t_0 + \alpha\varepsilon_n^{1-s}) v_z(z, t_0 + \alpha\varepsilon_n^{1-s})\, dz. \quad (3.17)$$

Здесь $\varepsilon_n = x_n$, а α — произвольное число, значение которого будет выбрано ниже. Т.к. производная v_x непрерывна вплоть до границы (см. лемму 3.2), вводя обозначение $\beta = v_x(0, t_0)$, можем считать, что

$$\begin{gathered} \beta - \tilde\sigma_n \le v_x(x_n, t_n) \le \beta + \tilde\sigma_n, \\ (\beta - \tilde\sigma_n)x_n \le v(x_n, t_n) \le (\beta + \tilde\sigma_n)x_n, \end{gathered} \quad (3.18)$$

здесь $(x_n, t_n) \to (0, t_0)$, $\tilde\sigma_n \to 0$. Оценивая далее правую часть (3.17) с учетом (3.18), получим

$$v^{1-s}(x_n, t_0 + \alpha\varepsilon_n^{1-s}) \le (1-s)\frac{\beta + \tilde\sigma_n}{(\beta - \tilde\sigma_n)^s}\frac{x_n^{1-s}}{1-s} = \frac{\beta + \tilde\sigma_n}{(\beta - \tilde\sigma_n)^s}\varepsilon_n^{1-s}. \quad (3.19)$$

С другой стороны, по формуле Тейлора и с учётом (3.16), получим для $u = v^{1-s}$

$$\begin{aligned} u(x_n, t_0 + \alpha\varepsilon_n^{1-s}) &= u(x_n, t_0) \\ &\quad + u_t(x_n, t_0)\alpha\varepsilon_n^{1-s} + \frac{1}{2}u_{tt}(x_n, t_n^*)\left(\alpha\varepsilon_n^{1-s}\right)^2 \\ &\ge u(x_n, t_0) + \delta\alpha\varepsilon_n^{1-s} - \frac{\left(\alpha\varepsilon_n^{1-s}\right)^2}{2}\big[(1-s)v^{-s}(x_n, t_n^*)|v_{tt}(x_n, t_n^*)| \\ &\quad + s(1-s)v^{-1-s}(x_n, t_n^*)v_t^2(x_n, t_n^*)\big]. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Получим оценку снизу правой части (3.20). Применим формулу Тейлора к функции $v(x_n, t_0)$. С помощью (3.9), (3.18) имеем оценку вида

$$\begin{aligned} v(x_n, t_0) &= v(0, t_0) + v_x(0, t_0)x_n \\ &\quad + \int_0^{x_n} dy \int_0^{y} v^{-s}(z, t_0)v^s(z, t_0)v_{zz}(z, t_0)\, dz \\ &\ge \beta x_n - \frac{x_n^{2-s}}{(1-s)(2-s)}\frac{1}{(1+s)t_0}(\beta - \tilde\sigma_n)^{-s}. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Положим $C_{10} = \frac{1}{(1-s)(2-s)(1+s)t_0}$. Из (3.21) для v^{1-s} получим

$$u(x_n, t_0) \ge \varepsilon_n^{1-s}\Big(\beta - \frac{C_{10}}{(\beta - \tilde\sigma_n)^s}\varepsilon_n^{1-s}\Big)^{1-s}.$$

Для оценки двух последних слагаемых в (3.20) используем (3.14), (3.18). Окончательно имеем

$$
\begin{aligned}
u(x_n, t_0 + \alpha\varepsilon_n^{1-s}) &\geq \varepsilon_n^{1-s}\Big(\beta - \frac{C_10}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^s}\varepsilon_n^{1-s}\Big)^{1-s} + \delta\alpha\varepsilon_n^{1-s} \\
&- \frac{\alpha^2}{2}\varepsilon_n^{2(1-s)}\Big[(1-s)\frac{C_9}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^{1-s}\varepsilon^{1-s}} + \frac{s}{(1-s)}\frac{C_8^2(\beta+\tilde{\sigma}_n)^{2s}}{\varepsilon_n^{1-s}(\beta-\tilde{\sigma}_n)^{1+s}}\Big] \\
&\geq \varepsilon_n^{1-s}\Big\{\Big(\beta - \frac{C_{10}}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^s}\varepsilon_n^{1-s}\Big)^{1-s} + \delta\alpha \\
&- \frac{\alpha^2}{2}\Big[(1-s)\frac{C_9}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^{1-s}} + \frac{s}{1-s}\frac{(\beta+\tilde{\sigma}_n)^{2s}}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^{1+s}}C_8^2(t_0,T)\Big]\Big\},
\end{aligned}
$$

а, из (3.19),

$$
u(x_n, t_0 + \alpha\varepsilon_n^{1-s}) \leq \frac{(\beta+\tilde{\sigma}_n)}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^s}\varepsilon^{1-s}.
$$

Сокращая на ε_n^{1-s} и устремляя n к бесконечности, получим неравенство вида

$$
\beta^{1-s} + \delta\alpha - \alpha^2 C_{11} \leq \beta^{1-s}
$$

или

$$
\delta\alpha \leq \frac{1}{2}\alpha^2 C_{11},
$$

где C_{11} зависит от t_0, T, β, s. Полагая, что $\alpha < \delta/C_{11}$, приходим к противоречию с (3.16). Лемма 3.5 доказана. $\square$

Наконец, оценим $\frac{v_t(x,t)}{v(x,t)} = v^s(x,t)v_{xx}(x,t)$ сверху.

Лемма 3.6. *Пусть $t_0 > 0$. Для достаточно малого значения параметра $\eta > 0$, такого что $t_0 - \eta > 0$, имеет место оценка*

$$
v^s(x,t)v_{xx}(x,t) \leq M_3, \text{ при } x \in \Omega,\ t \in (t_0-\eta, t_0+\eta), \tag{3.22}
$$

где M_3 не зависит от x и возможно неограниченно возрастает при $t_0 \to 0$.

Доказательство. При доказательстве данной леммы используются методы работы [17] (см. так же [18]).

Обозначим $R_{\delta,\eta} = \{(x,t) : 0 < x < \delta,\ t_0-\eta < t < t_0+\eta\}$, $t_1 = t_0-\eta$, $t_2 = t_0+\eta$. В силу леммы 3.3 для произвольного положительного параметра ε, существуют числа $\delta_1(\varepsilon)$, $\eta_1(\varepsilon)$ такие, что при $\delta < \delta_1(\varepsilon)$, $\eta < \eta_1(\varepsilon)$, $(a = v_x(0,t_0))$

$$
a - \varepsilon \leq v_x(x,t) \leq a + \varepsilon, \qquad (x,t) \in R_{\delta,\eta}, \tag{3.23}
$$

а из леммы 3.5 следует, что

$$v(x,t)v_{xx}(x,t) \le \varepsilon, \qquad (x,t) \in R_{\delta,\eta}. \tag{3.24}$$

Из (3.23) следует, что

$$(a-\varepsilon)x \le v(x,t) \le (a+\varepsilon)x, \qquad (x,t) \in R_{\delta,\eta}. \tag{3.25}$$

В $R_{\delta,\eta}$ функция $p(x,t) = v^s(x,t)v_{xx}(x,t)$ (см. лемму 3.2) удовлетворяет уравнению

$$Lp = p_t - v^{1+s}p_{xx} - 2v^s v_x p_x - (1+s)p^2 = 0.$$

Будем искать барьерную функцию в виде

$$\phi(x,t) = \frac{\alpha}{x^{1-s}} + \frac{\beta}{b(t)+x^{1-s}}, \qquad b(t) = b_0(t-t_1), \tag{3.26}$$

здесь α, β, b_0 — некоторые положительные числа, значения которых будут выбраны ниже. Для производных функции ϕ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\phi_t(x,t) &= -\frac{b_0\beta}{(b(t)+x^{1-s})^2},\\
\phi_x(x,t) &= -(1-s)\frac{\alpha}{x^{2-s}} - (1-s)\frac{\beta x^{-s}}{(b(t)+x^{1-s})^2},\\
\phi_{xx}(x,t) &= (1-s)(2-s)\frac{\alpha}{x^{3-s}} + (1-s)s\frac{\beta x^{-1-s}}{(b(t)+x^{1-s})^2}\\
&\quad + 2(1-s)^2\frac{\beta x^{-2s}}{(b(t)+x^{1-s})^3}.
\end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
L\phi = &-\frac{b_0\beta}{(b(t)+x^{1-s})^2} - v^{1+s}\Big\{(1-s)(2-s)\frac{\alpha}{x^{3-s}}\\
&+ (1-s)s\frac{\beta x^{-1-s}}{(b(t)+x^{1-s})^2} + 2(1-s)^2\frac{\beta x^{-2s}}{(b(t)+x^{1-s})^3}\Big\}\\
&+ 2v^s v_x\Big\{(1-s)\frac{\alpha}{x^{2-s}} + (1-s)\frac{\beta x^{-s}}{(b(t)+x^{1-s})^2}\Big\}\\
&- (1+s)\Big[\frac{\alpha}{x^{1-s}} + \frac{\beta}{b(t)+x^{1-s}}\Big]^2.
\end{aligned}$$

Применим к последнему слагаемому неравенство Коши, тогда

$$L\phi \ge \frac{\alpha}{x^{2(1-s)}}\Big\{-(1-s)(2-s)\frac{x^{2(1-s)}}{x^{3-s}}v^{1+s}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2(1-s)v^s v_x \frac{x^{2(1-s)}}{x^{2-s}} - 2(1+s)\alpha \Big\} \\
&- \frac{\beta}{(b+x^{1-s})^2}\Big\{ b_0 + (1-s)s\frac{v^{1+s}}{x^{1+s}} + 2(1-s)^2\frac{v^{1+s}x^{-2s}}{b-x^{1-s}} \\
&\qquad + 2(1-s)v_x\frac{v^s}{x^s} + 2(1+s)\beta \Big\}.
\end{aligned}
$$

Используем (3.23), (3.25), тогда

$$
\begin{aligned}
L\phi \ge{}& \frac{\alpha}{x^{2(1-s)}}\big\{ -(1-s)(2-s)(a+\varepsilon)^{1+s} \\
&+ 2(1-s)(a-\varepsilon)^{1+s} - 2(1+s)\alpha \big\} \\
&+ \frac{\beta}{(b+x^{1-s})^2}\Big\{ -b_0 - (1-s)s(a+\varepsilon)^{1+s} - 2(1-s)^2\frac{(a+\varepsilon)^{1+s}x^{1-s}}{b+x^{1-s}} \\
&+ 2(1-s)(a-\varepsilon)^{1+s} - 2(1+s)\beta \Big\}.
\end{aligned}
$$

Напомним, что для того, чтобы при помощи функции ϕ можно было оценить функцию $p = v^s v_{xx}$ сверху, необходимо, чтобы выражение $L\phi$ было неотрицательно.

Формально устремим к нулю параметр ε в правой части последнего неравенства. В первой фигурной скобке получим

$$
\begin{aligned}
&-(1-s)(2-s)a^{1+s} + 2(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\alpha \\
&\qquad = s(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\alpha > 0, \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

если α достаточно мало. Вторая фигурная скобка при $\varepsilon = 0$ равна выражению

$$
-b_0 - (1-s)sa^{1+s} - 2(1-s)^2\frac{a^{1+s}x^{1-s}}{b+x^{1-s}} + 2(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\beta.
$$

Очевидно, что $\frac{x^{1-s}}{b+x^{1-s}} \le 1$. Потребуем, чтобы

$$
-(1-s)(2-s)(a+\varepsilon)^{1+s} + 2(1-s)(a-\varepsilon)^{1+s} - 2(1+s)\alpha \ge 0, \qquad (3.28)
$$

$$
\begin{aligned}
&-b_0 - (1-s)s(a+\varepsilon)^{1+s} - 2(1-s)^2\frac{(a+\varepsilon)^{1+s}x^{1-s}}{b+x^{1-s}} \\
&\qquad + 2(1-s)(a-\varepsilon)^{1+s} - 2(1+s)\beta \ge 0, \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

а при $\varepsilon = 0$

$$
s(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\alpha > 0, \qquad (3.30)
$$

$$s(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\beta - b_0 > 0. \tag{3.31}$$

Пока не уточняя значений α, β, b_0, перейдем к сравнению $p = v^s v_{xx}$ и ϕ на параболической границе множества $R_{\delta,\eta}$. Из (3.24), (3.25) следует, что

$$p(x,t) = v^s(x,t)v_{xx}(x,t) = \frac{v(x,t)v_{xx}}{v^{1-s}(x,t)} \le \frac{\varepsilon}{(a-\varepsilon)^{1-s}x^{1-s}}. \tag{3.32}$$

На боковой границе $x = \delta$ потребуем

$$p(\delta,t) \le \frac{\varepsilon}{(a-\varepsilon)^{1-s}\delta^{1-s}} \le \frac{\beta}{2\delta^{1-s}} \le \frac{\beta}{b_0(t-t_1)+\delta^{1-s}} = \phi(\delta,t).$$

Последние соотношения будут очевидно выполнены, если

$$\frac{\varepsilon}{(a-\varepsilon)^{1-s}} \le \frac{\beta}{2} \tag{3.33}$$

и

$$b_0\eta \le \delta^{1-s}. \tag{3.34}$$

На нижней границе $t = t_1$, предполагая, что условие (3.33) уже выполнено, получим

$$p(x,t_1) \le \frac{\varepsilon}{(a-\varepsilon)^{1-s}x^{1-s}} \le \frac{\beta}{x^{1-s}} = \phi(x,t_1).$$

При $x = 0$ функции ϕ и, вообще говоря, p обращаются в бесконечность, поэтому нужно сначала сравнить их значения в некоторой более узкой приграничное полосе. Для фиксированного α (считаем, что имеют место (3.28) и (3.30)) для произвольной точки $A(0,t)$, где $t \in (t_1,t_2)$, вследствие леммы 3.5 существует шар B_A с центром в точке A такой, что

$$vv_{xx} \le \alpha(a-\varepsilon)^{1-s} \text{ в } B_A \cap \Omega_T. \tag{3.35}$$

Из (3.25) получим

$$\phi(x,t) \ge \frac{\alpha}{x^{1-s}} = \frac{\alpha(a-\varepsilon)^{1-s}}{(a-\varepsilon)^{1-s}x^{1-s}} \ge \frac{v(x,t)v_{xx}(x,t)}{v^{1-s}(x,t)} = p(x,t)$$
$$\text{при } (x,t) \in B_A \cap \Omega_T.$$

Отрезок $\Gamma = \{x = 0,\ t \in [t_1,t_2]\}$ можно покрыть конечным числом шаров B_{A_i} и, следовательно, существует, зависящее от значения a, число $\gamma \in (0,\delta)$ такое, что

$$\phi(x,t) \ge p(x,t) \quad \text{в } R_{\gamma,\eta}.$$

Т.о. функция ϕ является верхним барьером для функции p в области $R_{\delta,\eta}$, если выполнены условия (3.28)–(3.31), (3.33), (3.34). Устремляя же α к нулю, получим

$$p(x,t) \le \frac{\beta}{b_0(t-t_1)+x^{1-s}} \le \frac{2\beta}{b_0\eta} \quad \text{при } (x,t) \in R_{\delta,\eta/2}. \tag{3.36}$$

Вернёмся к выбору значений α, β, b_0, ε. Для α есть только одно ограничение сверху. Если $\alpha \le \frac{s(1-s)}{4(1+s)}a^{1+s}$, то (3.30) выполнено. Аналогично потребуем, чтобы в (3.31) были выполнены неравенства

$$b_0 < \frac{s(1-s)}{4}\, a^{1+s}, \qquad \beta < \frac{s(1-s)}{(1+s)8}\, a^{1+s},$$

а в (3.28), (3.29), (3.33) будем полагать, что ε достаточно мало. В (3.34) полагаем, что $b_0 = \delta^{1-s}$, $\eta(\varepsilon) \le 1$. Т.о. все требуемые условия выполнены и

$$p(x,t) = v^s(x,t)v_{xx}(x,t) \le C(a,s,\delta,\eta) \quad \text{при } (x,t) \in R_{\delta,\eta/2}. \tag{3.37}$$

Из оценок (3.9), (3.37) и замечания 3.2 следует оценка (3.22). $\square$

Таким образом, из оценок (3.9), (3.22) следует неравенство

$$\Big|\frac{v_t(x,t)}{v(x,t)}\Big| = |v^s(x,t)v_{xx}(x,t)| \le M_4(t_0,T,\varkappa_*,\varkappa^*,l,M_0,M_1,M_3) \\ \text{при } (x,t) \in \Omega_{t_0,T} \tag{3.38}$$

для произвольных $0 < t_0 < T$. Данная оценка служит основой для дальнейшего повышения регулярности обобщённого решения задачи (1.1). С этой целью нам необходимо рассмотреть также линейную задачу (1.8).

4. Линейная задача. Основные результаты

Положим $D = (0,+\infty)$, $f(x) = x^{q/2} - (l-x)^{q/2}$. Функции $d_D(x,y) = |x^{q/2} - y^{q/2}|$, $d_\Omega(x,y) = |f(x) - f(y)|$ будут характеризовать “расстояние” между точками x, y, принадлежащими, соответственно, либо D, либо Ω. Обозначим $\rho_D(x) = x$, $\rho_\Omega(x) = \omega(x)$.

Пусть $\alpha \in (0,1)$. Подразумевая под Q одно из множеств D или Ω, определим функциональные пространства $H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$, $H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ как множества функций с ограниченными нормами:

$$\|u\|_{H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|_{q,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{Q_T}|u| + \langle\langle u\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(\alpha)},$$

$$\|u\|_{H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|_{q,\rho,Q_T}^{(\alpha)} = |\rho_Q^{-1}u|_{q,Q_T}^{(\alpha)},$$

где

$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,Q_T} = \langle u\rangle^{(\alpha)}_{q,x,Q_T} + \langle u\rangle^{(\alpha/2)}_{t,Q_T},$$

$$\langle u\rangle^{(\alpha)}_{q,x,Q_T} = \sup_{(x,t),(y,t)\in Q_T} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{d^{\alpha}_{Q}(x,y)},$$

$$\langle u\rangle^{(\alpha/2)}_{t,Q_T} = \sup_{(x,t),(y,\tau)\in Q_T} \frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha/2}}.$$

Введем далее полунормы

$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(1+\alpha)}_{q,Q_T} = \langle u\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{t,Q_T} + \langle\langle u_x\rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,Q_T},$$

$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{q,Q_T} = \langle\langle \rho_Q^{-1} u_t\rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,Q_T} + \langle\langle \rho_Q^{s} u_{xx}\rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,Q_T} + \langle u_x\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{t,Q_T}.$$

Обозначим через $H_q^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_\tau)$ и $H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_\tau)$, соответственно, пространства с нормами:

$$\|u\|_{H_q^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|^{(1+\alpha)}_{q,Q_T} = \sup_{Q_T}|u| + \sup_{Q_T}|u_x| + \langle\langle u\rangle\rangle^{(1+\alpha)}_{q,Q_T}$$

и

$$\|u\|_{H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|^{(2+\alpha)}_{q,Q_T}$$
$$= |u|^{(\alpha)}_{q,Q_T} + |\rho_Q^{-1}u_t|^{(\alpha)}_{q,Q_T} + |\rho_Q^{s}u_{xx}|^{(\alpha)}_{q,Q_T} + \langle u_x\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,Q_T}.$$

Если $u(x,0)=0$ и $u\in H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_\tau)$ $(H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_\tau))$, будем говорить, что $u\in H_{q,0}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_\tau)$ $(H_{q,\rho,0}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_\tau))$. Принадлежность функции u пространству $H_{q,0}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{Q}_\tau)$ означает, что $u\in H_q^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{Q}_\tau)$ и $u(x,0)=u_t(x,0)=0$. Для функций $u(x)$, т.е. зависящих только от x, аналогично $H_q^{k+\alpha,k+\alpha/2}(\overline{Q}_\tau)$ $(k=0,1,2)$ определим пространства $H_q^{k+\alpha}(\overline{Q})$, опуская в соответствующих определениях константы Гёльдера по переменной t.

В задаче (1.8) положим

$$u_1(x) = a(x,0)\rho_\Omega^{1+s}u''_{0,xx} + f(x,0).$$

Предполагаем, что

$$0 < a_0 \le a(x,t) \le a_1, \qquad (x,t)\in\Omega_T, \tag{4.1}$$

и выполнены условия согласования

$$u_0(x)=0, \qquad u_1(x)=0 \qquad \text{при } x=0,l. \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $a \in H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $f \in H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $u_0 \in H_q^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и имеют место условия* (4.1), (4.2), *тогда существует единственное решение задачи* (1.8) $u \in H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, *причем справедлива оценка*

$$|u|_{q,\Omega_T}^{(2+\alpha)} \leq C(l,T,a_0,a_1,|a|_{q,\Omega_T}^{(\alpha)})\big(|f|_{q,\rho,\Omega_T}^{(\alpha)} + |u_0|_{q,\Omega}^{(2+\alpha)}\big). \tag{4.3}$$

Теорема 4.1 существенно используется в пункте 6 при доказательстве основного результата работы теоремы 1.1. Доказательство теоремы 4.1 основано на методе построения регуляризатора (см. [13], гл. IV]). В рамках принятого подхода ход рассуждений незначительно отличается от стандартного и состоит в следующем. Сначала исходная задача (1.8) сводится к задаче с нулевыми начальными данными, а затем строится регуляризатор, т.е. оператор, обращающий главную линейную часть начально-краевой задачи с "замороженным" коэффициентом $a(x,t)$ (см. также [21]). Мы опускаем эти построения и приведем доказательство только лишь разрешимости и коэрцитивных оценок для модельной задачи, которые лежат в основе всех построений. Отметим, что выбор указанных выше функциональных пространств диктуется именно модельной задачей. Основным моментом является исследование модельной задачи. В модельной задаче требуется найти функцию $w(x,t)$ по условиям

$$\begin{gathered} w_t = x^{1+s}w_{xx} + f(x,t), \qquad (x,t) \in D_T, \\ w(0,t) = 0, \qquad t \in (0,\tau), \\ w(x,0) = w_0(x), \qquad x \in D. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Будем предполагать, что $f \in H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$, $w_0 \in H_q^{2+\alpha}(\overline{D})$. Для произвольного положительного числа L обозначим $D_L = (0,L)$.

Теорема 4.2. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \langle\langle w_t/x\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \langle\langle x^s w_{xx}\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \langle w_x\rangle_{t,D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)} \\ \leq c(L,T)\big(\langle\langle f/x\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \langle\langle w_0\rangle\rangle_{q,D}^{(2+\alpha)}\big). \end{aligned} \tag{4.5}$$

5. Оценки решения модельной задачи (4.4)

Для дальнейших рассуждений достаточно предположить, что $f(x,0) = 0$, т.е. $f \in H_{q,\rho,0}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$.

Для того, чтобы построить функцию Грина задачи (4.4), применим преобразование Лапласа по переменной t и для полученного обыкновенного уравнения второго порядка стандартным способом строим функцию Грина. После обратного преобразования Лапласа получаем искомую функцию Грина

$$G(x,\xi,t)=c_q t^{-1-s/q}u^{-2(1+s)/q}\exp(-(u^2+v^2))z^{1/q}I_{1/q}(z), \qquad (5.1)$$

где $q=1-s$, $I_{1/q}(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, $u=\xi^{q/2}/(qt^{1/2})$, $v=x^{q/2}/(qt^{1/2})$, $z=2uv$, c_q — вполне определенная постоянная, такая что

$$\int\limits_0^\infty \xi G(x,\xi,t)\,d\xi=x. \qquad (5.2)$$

С помощью $G(x,\xi,t)$ решение задачи (4.4) представляется в виде суммы двух потенциалов

$$\begin{aligned} w(x,t)&=w^{(1)}(x,t)+w^{(2)}(x,t)\\ &=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t)w_0(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

Подобные задачи и построения ранее рассматривались в работах [20, 21].

Используя представление функции $I_p(z)$ в виде ряда и её асимптотическое разложение при $z\to\infty$, нетрудно получить неравенства

$$\begin{gathered}|I_p(z)|\le\begin{cases}cz^p, & z\le 1,\\ c\exp(z)\ z^{-1/2}, & z\ge 1.\end{cases}\\ \Big|\frac{q}{2}zI_{1/q-1}(z)-I_{1/q}(z)\Big|\le c\ z^{1/q+2}\ \text{при } z\le 1.\\ \big|I_{1/q}(z)-I_{1/q-1}(z)\big|\le c\exp(z)\ z^{-3/2}\ \text{при } z>1,\\ \Big|2(I_{1/q-1}(z)-I_{1/q}(z))+\frac{1}{z}I_{1/q-1}(z)-\frac{1}{qz}(I_{1/q-1}(z)+I_{1/q}(z))\Big|\\ \le c\exp(z)\ z^{-5/2}\ \text{при } z>1,\end{gathered} \qquad (5.3)$$

которые полезны при получении следующих оценок.

Лемма 5.1. *Функция Грина $G(x,\xi,t)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|D_t^kG(x,\xi,t)|\le C_kt^{-k-1-\frac{s}{q}}u^{-\frac{2(1+s)}{q}}\exp(-\gamma_k(u-v)^2)\begin{cases}z^{\frac{2}{q}}, & z\le 1,\\ z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, & z>1,\end{cases} \qquad (5.4)$$

$$|D_t^k D_x G(x,\xi,t)| \le C_k t^{-k-1-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}}$$
$$\times \exp\bigl(-\gamma_k(u-v)^2\bigr)\frac{v}{x}\begin{cases} z^{\frac{2}{q}-1}(1+v), & z\le 1,\\ z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}(1+v/z), & z>1,\end{cases} \tag{5.5}$$

где $\gamma_k \in (0,1)$, $k=0,1,2$,

$$|(G(x,\xi,t)\xi/x)_x| \le Ct^{-1-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}}$$
$$\times \exp\bigl(-\gamma(u-v)^2\bigr)\Bigl(\frac{u}{v}\Bigr)^{\frac{2}{q}}\frac{1}{x}\begin{cases} z^{\frac{2}{q}}(v^2+z^2), & z\le 1,\\ z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}(1+v), & z>1,\end{cases} \tag{5.6}$$

$$|(G(x,\xi,t)\xi/x)_{xt}| \le Ct^{-2-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}}$$
$$\times \exp\bigl(-\gamma(u-v)^2\bigr)\Bigl(\frac{u}{v}\Bigr)^{\frac{2}{q}}\frac{1}{x}\begin{cases} z^{\frac{2}{q}}(v^2+z^2), & z\le 1,\\ z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}(1+v+\frac{v^2}{z}), & z>1,\end{cases} \tag{5.7}$$

где $\gamma \in (0,1)$.

Вследствие громоздкости вычислений при доказательстве леммы кратко опишем доказательство оценки для G_{xt}, остальные оценки получаются аналогично. Из (5.1) и равенства $\bigl(z^{1/q}I_{1/q}(z)\bigr)_z = z^{1/q}I_{1/q-1}(z)$ (см. [19]) следует

$$G_x = c_q t^{-1-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}} \exp\bigl(-(u^2+v^2)\bigr)\frac{v}{x} z^{1/q}\left\{uI_{1/q-1}(z) - vI_{1/q}(z)\right\}.$$

При дальнейшем дифференцировании G_x по t используем равенства

$$I'_{1/q}(z) = I_{1/q-1}(z) - \frac{1}{qz}I_{1/q}(z),$$
$$I'_{1/q-1}(z) = I_{1/q}(z) + \frac{1}{z}\Bigl(\frac{1}{q}-1\Bigr)I_{1/q-1}(z)$$

и получаем

$$\begin{aligned} G_{xt} = c_q t^{-2-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}} \exp(-(u^2+v^2))\frac{v}{x}z^{1/q}\Bigl(\bigl(-2+(u-v)^2\bigr)\\ \times \left[(u-v)I_{1/q-1}(z) + v\left\{I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right\}\right]\\ + z\Bigl[(u-v)\Bigl\{I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z) - \frac{1}{z}\Bigl(\frac{1}{q}-1\Bigr)I_{1/q-1}(z)\Bigr\}\\ + v\Bigl\{2\left(I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right) + \frac{1}{z}I_{1/q}(z) - \frac{1}{qz}\left(I_{1/q-1}(z) + I_{1/q}(z)\right)\Bigr\}\Bigr]\Bigr). \end{aligned}$$

Далее, применяя соответствующие оценки из (5.3) для оценки выражений в фигурных скобках и очевидное неравенство

$$\exp\bigl(-u^2-v^2)\bigr)|u-v|^a \le \exp\bigl(-(u-v)^2\bigr)|u-v|^a \le c_a \exp\bigl(-\gamma_a(u-v)^2\bigr),$$

где c_a, γ_a — некоторые положительные постоянные, приходим к оценке (5.5) при $k=1$.

Лемма 5.2. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\xi}{x}\bigl|D_t^k G(x,\xi,t)\bigr||\xi^{q/2}-x^{q/2}|^\alpha\,d\xi \le c_k t^{-k+\alpha/2}, \quad k=0,1,2; \tag{5.8}$$

$$\int\limits_0^\infty \xi\bigl|D_t^k G_x(x,\xi,t)\bigr||\xi^{q/2}-x^{q/2}|^\alpha\,d\xi \le c_k t^{-k+\alpha/2}(1+v), \quad k=0,1; \tag{5.9}$$

$$\int\limits_0^\infty \left|D_t^k\Bigl(\frac{\xi}{x}G(x,\xi,t)\Bigr)_x\right||\xi^{q/2}-x^{q/2}|^\alpha\,d\xi \le c_k t^{-k+\alpha/2}\frac{v}{x}, \quad k=0,1. \tag{5.10}$$

При доказательстве леммы используются оценки (5.4)–(5.7) и оценки вида (см. [10]):

$$\int\limits_{1/2v}^\infty u^\sigma \exp\bigl(-\gamma(u-v)^2\bigr)\,du \le c\left\{\begin{array}{ll} v^\sigma, & v\ge 1\\ \exp(-\frac{\gamma}{16v^2}), & v\le 1\end{array}\right\} \le cv^\sigma,$$

$$\int\limits_0^{1/2v} u^\sigma \exp\bigl(-\gamma(u-v)^2\bigr)\,du \le c\left\{\begin{array}{ll} \exp(-\gamma v^2), & v\ge 1\\ 1, & v\le 1\end{array}\right\} \le c\exp(-\gamma v^2), \tag{5.11}$$

при $\sigma>-1, \gamma>0$.

Например, из (5.7) следует, что $(q=1-s)$

$$\int\limits_0^\infty \left|\Bigl(\frac{\xi}{x}G(x,\xi,t)\Bigr)_{xt}\right|d\xi = \int\limits_0^\infty \left|\Bigl(\frac{\xi}{x}G(x,\xi,t)\Bigr)_{xt}\right| q^{\frac{2}{q}} t^{\frac{1}{q}} u^{\frac{2}{q}-1}\,du$$

$$\le c\Biggl(\int\limits_0^{1/(2v)} t^{-1}u^{\frac{2}{q}-1-\frac{2(1+s)}{q}}\exp\bigl(-\gamma(u-v)^2\bigr)$$

$$\times\Bigl(\frac{u}{v}\Bigr)^{2/q}x^{-1}z^{\frac{q}{2}}(v^2+z^2)\,du$$

$$+\int\limits_{1/(2v)}^\infty t^{-1}u^{\frac{2}{q}-1-\frac{2(1+s)}{q}}\exp\bigl(-\gamma(u-v)^2\bigr)$$

$$\times \left(\frac{u}{v}\right)^{2/q} x^{-1} z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} (1 + v + v^2/z)\, du\Bigg),$$

а после применения неравенств (5.11) получаем оценку

$$\int\limits_0^\infty \Big| \Big(\frac{\xi}{x} G(x, \xi, t) \Big)_{xt} \Big|\, d\xi$$

$$\leq \frac{c}{xt} \left(v^2 \exp(-\gamma v^2) + \left\{ \begin{array}{ll} v, & v > 1, \\ v^{-\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \exp\Big(-\frac{\gamma}{16 v^2}\Big), & v \leq 1 \end{array} \right\} \right),$$

которая в виду неравенства $z^p e^{-\gamma z^2} \leq \mathrm{const}$, $p > 0$, $\gamma > 0$, приводит к оценке (5.10) при $k = 1$.

Лемма 5.3. *Для функций $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, образующих решение модельной задачи* (4.4), *справедливы оценки*

$$\Big\langle \Big\langle \frac{1}{x} w_t^{(1)} \Big\rangle \Big\rangle_{q, D_T}^{(\alpha)} + \big\langle \big\langle x^s w_{xx}^{(1)} \big\rangle \big\rangle_{q, D_T}^{(\alpha)} + \big\langle w_x^{(1)} \big\rangle_{t, D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)} \leq c(L, T) \langle \langle f/x \rangle \rangle_{q, D_T}^{(\alpha)}, \quad (5.12)$$

$$\Big\langle \Big\langle \frac{1}{x} w_t^{(2)} \Big\rangle \Big\rangle_{q, D_T}^{(\alpha)} + \big\langle \big\langle x^s w_{xx}^{(2)} \big\rangle \big\rangle_{q, D_T}^{(\alpha)} + \big\langle w_x^{(2)} \big\rangle_{t, D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)} \leq c(L, T) \langle \langle w_0 \rangle \rangle_{q, D}^{(2+\alpha)}, \quad (5.13)$$

где постоянная $c(L, T)$ остается ограниченной при $T \to 0$.

Доказательство. При доказательстве леммы ограничимся рассмотрением полунорм $\langle w_x^{(1)} \rangle_{t, D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)}$ и $\langle \langle x^{-1} w_t^{(2)} \rangle \rangle_{q, D_T}^{(\alpha)}$. Остальные слагаемые оцениваются подобным образом. Используя равенство (5.2), получаем представление

$$w_x^{(1)}(x, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty \xi G_x(x, \xi, t - \tau) \Big[\frac{f(\xi, \tau)}{\xi} - \frac{f(x, \tau)}{x} \Big]\, d\xi + \int\limits_0^t \frac{f(x, \tau)}{x}\, d\tau.$$

Для определенности полагаем $\Delta t = t_1 - t_2 \geq 0$. После несложных преобразований получаем

$$w_x^{(1)}(x, t_1) - w_x^{(1)}(x, t_2)$$

$$= \int\limits_{t_1 - 2\Delta t}^{t_1} d\tau \int\limits_0^\infty \xi G_x(x, \xi, t_1 - \tau) \Big[\frac{f(\xi, \tau)}{\xi} - \frac{f(x, \tau)}{x} \Big] d\xi$$

$$
- \int\limits_{t_1-2\Delta t}^{t_2} d\tau \int\limits_0^\infty \xi G_x(x,\xi,t_2-\tau)\Big[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi} - \frac{f(x,\tau)}{x}\Big] d\xi
$$

$$
+ \int\limits_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int\limits_0^\infty \xi\big(G_x(x,\xi,t_1-\tau) - G_x(x,\xi,t_2-\tau)\big)\Big[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi} - \frac{f(x,\tau)}{x}\Big] d\xi
$$

$$
+ \int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{f(x,\tau)}{x}\, d\tau \equiv i_1 + i_2 + i_3 + i_4.
$$

Из свойств функции $f(x,t)$ и определения параметров u, v следует

$$
\Big|\frac{f(\xi,\tau)}{\xi} - \frac{f(x,\tau)}{x}\Big| \le \Big\langle \frac{f}{x} \Big\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \big|\xi^{q/2} - x^{q/2}\big|^\alpha
$$

$$
= c_q \langle f/x \rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} |u-v|^\alpha \tau^{\alpha/2}.
$$

Для дальнейших оценок полезно заметить, что, когда в подынтегральных выражениях появляется множитель вида

$$
F(x,\xi,t) = \big|\xi^{q/2} - x^{q/2}\big|^\alpha \exp\big(-(u-v)^2\big),
$$

мы пользуемся оценкой вида

$$
F(x,\xi,t) \le \mathrm{c}\ t^{\alpha/2}\, |u-v|^\alpha \exp\big(-(u-v)^2\big) \le \mathrm{c}\ t^{\alpha/2} \exp\big(-\gamma(u-v)^2\big),
$$

$$
\gamma \in (0,1).
$$

С учётом этого замечания и (5.9) получаем

$$
|i_1| \le c \langle f/x \rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \int\limits_0^{2\Delta t} \tau^{\frac{\alpha}{2}} \Big(1 + \frac{x^{q/2}}{\tau^{1/2}}\Big)\, d\tau
$$

$$
\le c\, \langle f/x \rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \big((\Delta t)^{\frac{1}{2}} + x^{q/2}\big)(\Delta t)^{\frac{1+\alpha}{2}}.
$$

Слагаемое i_2 оценивается аналогично.

Для i_3 сначала запишем оценку в виде

$$
|i_3| \le \int\limits_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int\limits_{t_2}^{t_1} d\theta \int\limits_0^\infty \xi\, |G_{x\theta}(x,\xi,\theta-\tau)|\, \Big|\frac{f(\xi,\tau)}{\xi} - \frac{f(x,\tau)}{x}\Big|\, d\xi.
$$

Поскольку $f \in H^{\alpha,\alpha/2}_{q,\rho,0}(\overline{D}_T)$, то $f(x,t) = 0$ при $t < 0$ и, следовательно, нужно рассмотреть только случай $t_1 - 2\Delta t > 0$. Снова применяя неравенство (5.9), имеем

$$|i_3| \le c\,\langle f/x\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \int\limits_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int\limits_{t_2}^{t_1} |\theta-\tau|^{\frac{\alpha}{2}-1}\Big(1+\frac{x^{q/2}}{|\theta-\tau|^{1/2}}\Big)\,d\theta.$$

Вследствие неравенства $t_1 - 2\Delta t > 0$ имеем оценку $\Delta t < \theta - \tau < t_1$, так, что внутренний интеграл в правой части этого неравенства сходится. Отсюда

$$|i_3| \le c\big(t_1^{1/2} + x^{q/2}\big)\,\langle f/x\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \int\limits_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int\limits_{t_2}^{t_1} |\theta-\tau|^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}\,d\theta$$
$$\le c\big(t_1^{1/2} + x^{q/2}\big)\,\langle f/x\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T}\,(\Delta t)^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

При оценке i_4 используется равенство $f(x,0)=0$ и гельдеровость с показателем $\alpha/2$ относительно переменной t функции $f(x,t)$. Отсюда

$$|i_4| \le \ \langle f/x\rangle^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \int\limits_{t_2}^{t_1} \tau^{\alpha/2}\,d\tau \le c t_1^{1/2}\,\langle f/x\rangle^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\,(\Delta t)^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Суммируя оценки для i_k, $k=\overline{1,4}$, получаем

$$\big\langle w_x^{(1)}\big\rangle^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{t,D_{L,T}} \le C\big(T^{1/2} + L^{q/2}\big)\,\langle\langle f/x\rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,D_T}.$$

Переходим к оценке функции $w_t^{(2)}$. Функция Грина $G(\xi,x,t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению $G_t = (\xi^{1+s}G)_{\xi\xi}$, поэтому $w_t^{(2)}(x,t) = \int_0^\infty (\xi^{1+s}G)_{\xi\xi}(x,\xi,t)w_0(\xi)\,d\xi$, и после интегрирования по частям

$$\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t) = \int\limits_0^\infty \frac{\xi}{x}G(x,\xi,t)\xi^s w_0''(\xi)\,d\xi.$$

Используя равенство (5.2), получим

$$\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t_1) - \frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t_2) = \int\limits_{t_2}^{t_1} d\tau \int\limits_0^\infty \frac{\xi}{x}G_\tau(x,\xi,\tau)\,\big[\xi^s w_0''(\xi) - x^s w_0''(x)\big]\,d\xi.$$

Применение оценки (5.8) дает

$$\Big|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t_1) - \frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t_2)\Big| \le c\,\big\langle x^s w_0''\big\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D} \int\limits_{t_2}^{t_1} \tau^{\alpha/2-1}\,d\tau,$$

и, следовательно,

$$\left\langle \frac{1}{x} w_t^{(2)} \right\rangle_{t,D_T}^{(\alpha/2)} \leq c \left\langle x^s w_0'' \right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} . \tag{5.14}$$

При оценке константы Гельдера по x для функции $\frac{1}{x} w_t^{(2)}$ будем различать два случая:

$$1)\ t < h^2 \equiv \left|\xi^{q/2} - x^{q/2}\right|^2, \qquad 2)\ t \geq h^2.$$

В первом случае необходимая оценка следует из (5.14). Действительно,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t) - \frac{1}{y} w_t^{(2)}(y,t)\right| &\leq \left|\frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t) - \frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,0)\right| \\ &+ \left|\frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,0) - \frac{1}{y} w_t^{(2)}(y,0)\right| + \left|\frac{1}{y} w_t^{(2)}(y,0) - \frac{1}{y} w_t^{(2)}(y,t)\right| \\ &\leq 2\left\langle \frac{1}{x} w_t^{(2)} \right\rangle_{t,D_T}^{(\alpha/2)} t^{\alpha/2} + \left\langle x^s w_0'' \right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} h^\alpha \leq c \left\langle x^s w_0'' \right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} h^\alpha. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Во втором случае снова за счет (5.2) получим представление

$$\frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t) - \frac{1}{y} w_t^{(2)}(y,t) = \int\limits_y^x d\theta \int\limits_0^\infty \Big(\frac{\xi}{\theta} G(\theta,\xi,t)\Big)_\theta \left[\xi^s w_0''(\xi) - \theta^s w_0''(\theta)\right] d\xi.$$

Обозначим $\overline{v} = \frac{\theta^{q/2}}{q t^{1/2}}$. Применение неравенства (5.10) дает

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t) - \frac{1}{y} w_t^{(2)}(y,t)\right| &\leq c \left\langle x^s w_0'' \right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} \left|\int\limits_y^x t^{\alpha/2} \frac{\overline{v}}{\theta}\, d\theta\right| \\ &\leq c \left\langle x^s w_0'' \right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} t^{\frac{\alpha-1}{2}} \int\limits_y^x \theta^{\frac{q}{2}-1}\, d\theta \leq c \left\langle x^s w_0'' \right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} h^\alpha. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Из (5.14)–(5.16) следует $\langle\langle x^{-1} w_t^2 \rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} \leq c \left\langle x^s w_0'' \right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)}$, что и требовалось доказать. $\square$

Из оценок (5.12)–(5.13) следует оценка (4.5).

6. Доказательство Теоремы 1.1

Лемма 6.1. *Для обобщенного решения задачи* (1.1) *справедливы следующие оценки*

$$|v_x(x,t_2) - v_x(x,t_1)| \le C_{12}\,|t_2 - t_1|^{\frac{1-s}{2-s}} \;\; \text{при } (x,t_2),(x,t_1)\in\Omega_{t_0,T}, \quad (6.1)$$
$$|v_x(x_2,t) - v_x(x_1,t)| \le C_{13} d_\Omega(x_1,x_2) \;\text{при } (x_2,t),(x_1,t)\in\Omega_{t_0,T}, \quad (6.2)$$

где $q = 1 - s$, а постоянные C_{12}, C_{13} зависят от l, t_0, T, $\tilde{\varkappa}_*$, $\tilde{\varkappa}^*$, M_4.

Доказательство. Сначала докажем (6.1). Пусть x_1, x_2 — произвольные числа такие, что $x_1 < x_2 \le l/2$ (аналогично можно рассмотреть вариант, когда $l/2 \ge x_2 > x_1$). Будем следовать схеме доказательства леммы 3.1 [13, гл. II].

Из (3.8), (3.38) предварительно получим

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}(v_x(z,t) - v_x(x_1,t))\,dz\right| \le \int\limits_{x_1}^{x_2}dz\int\limits_{x_1}^{z}|v^{-s}(y,t)||v^s(y,t)v_{yy}(y,t)|\,dy$$
$$\le \frac{M_4}{\tilde{\varkappa}_*^s}\int\limits_{x_1}^{x_2}dz\int\limits_{x_1}^{z}y^{-s}\,dy = C_{14}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{z^{1-s}-x_1^{1-s}}{1-s}\,dz$$
$$\le C_{15}\int\limits_{x_1}^{x_2}(z-x_1)^{1-s}\,dz \le C_{16}(x_2-x_1)^{2-s}, \quad (6.3)$$

где C_{14}, C_{15} и C_{16} зависят от M_4, $\tilde{\varkappa}_*$, s, l. Далее, имеем следующее равенство ($t_1 \le t_2$)

$$v(x_2,t_2) - v(x_1,t_2) - v(x_2,t_1) + v(x_1,t_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2}v_x(z,t_2)\,dz - \int\limits_{x_1}^{x_2}v_x(z,t_1)\,dz$$
$$= \int\limits_{x_1}^{x_2}(v_x(z,t_2) - v_x(x_1,t_2))\;dz - \int\limits_{x_1}^{x_2}(v_x(z,t_1) - v_x(x_1,t_1))\;dz$$
$$+ (v_x(x_1,t_2) - v_x(x_1,t_1))\,(x_2 - x_1).$$

Отсюда

$$v_x(x_1,t_2) - v_x(x_1,t_1)$$
$$= \frac{1}{x_2-x_1}\left\{\int\limits_{x_1}^{x_2}(v_x(z,t_1) - v_x(x_1,t_1))\,dz - \int\limits_{x_1}^{x_2}(v_x(z,t_2) - v_x(x_1,t_2))\,dz\right.$$

$$+ v(x_2,t_2) - v(x_1,t_2) - v(x_2,t_1) + v(x_1,t_1)\Big\}. \quad (6.4)$$

Из последнего неравенства, (2.4), (3.38) и (6.3) получим

$$|v_x(x_1,t_2) - v_x(x_1,t_1)| \le \frac{2}{(x_2-x_1)}\left\{C_{16}(x_2-x_1)^{2-s} + M_0M_4\,|t_2-t_1|\right\} \le C_{17}(x_2-x_1)^{1-s} + 2M_0M_4\frac{t_2-t_1}{x_2-x_1}.$$

Минимизируя правую часть по x_2, получим $(x_2-x_1)^{2-s} = \frac{2M_0M_4}{C_{17}(1-s)}(t_2-t_1)$ и, следовательно, имеет место оценка (6.1). Рассуждая аналогично тому, как было получено неравенство (6.3), выводим оценку (6.2). $\square$

Для произвольного $t_0 > 0$ определим бесконечно дифференцируемую функцию $\phi(t)$ такую, что $\phi(t) = 0$ при $t \le \frac{t_0}{2}$ и $\phi(t) = 1$ при $t \ge t_0$. Введем функцию $w(x,t) = \phi(t)v(x,t)$. Имеем

$$\begin{gathered} w_t = v^{1+s}(x,t)w_{xx} + \phi_t(t)v(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega_{t_0/2,T}, \\ w(x,t) = 0, \qquad (x,t)\in\Sigma_{t_0/2,T}, \\ w(x,t_0/2) = 0, \qquad x\in\Omega. \end{gathered} \quad (6.5)$$

Положим $\beta_1 = \frac{1-s}{2-s}$. В случае $2\beta_1 \ge \alpha$ полагаем, что $\alpha_1 = \alpha$, а при $2\beta_1 < \alpha$ возьмем $\alpha_1 = 2\beta_1$. Поскольку $v(0,t) = v(l,t) = 0$, функцию $v(x,t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{l}\left\{(l-x)v(x,t) + xv(x,t)\right\} \\ &= \frac{1}{l}\left\{(l-x)\int_0^x v_z(z,t)dz - x\int_x^l v_z(z,t)\,dz\right\} \\ &= \frac{1}{l}\left\{x(l-x)\int_0^1 v_z(z,t)\big|_{z=\lambda x}d\lambda - x(l-x)\int_0^1 v_z(z,t)\big|_{z=x+\lambda(l-x)}\,d\lambda\right\} \\ &= \frac{\omega(x)}{l}\int_0^1 v_z(z,t)\Big|_{z=x+\lambda(l-x)}^{z=\lambda x}d\lambda. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу (6.5) как линейную задачу вида (1.8) с $a(x,t) = \frac{v^{1+s}(x,t)}{\omega^{1+s}(x)}$ и $f(x,t) = \phi_t(t)v(x,t)$. Из оценки (3.8) следует неравенство

$a(x,t) \geq \tilde{\varkappa}_* > 0$. Применяя формулу конечных приращений и оценки (6.1), 6.2) леммы 6.1, стандартными рассуждениями убеждаемся в том, что

$$a \in H_q^{\alpha_1,\alpha_1/2}(\overline{\Omega}_{t_0/2,T}), \qquad f \in H_{q,\rho}^{\alpha_1,\alpha_1/2}(\overline{\Omega}_{t_0/2,T}).$$

Таким образом, функции $a(x,t)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Следовательно, решение задачи (6.5) $w \in H_q^{2+\alpha_1,1+\alpha_1/2}(\overline{\Omega}_{t_0/2,T})$, а тогда, по определению, $v \in H_q^{2+\alpha_1,1+\alpha_1/2}(\overline{\Omega}_{t_0,T})$. Теперь при $2\beta_1 \geq \alpha$ теорема 1.1 доказана, в противном случае (т.е. $2\beta_1 < \alpha$) нужно взять $\beta_2 = \frac{1+\alpha_1}{2}$ и повторить вышеизложенную процедуру.

Литература

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, *A numerical treatment of a superdegenerate equation with application to the porous medium equation* // Quarterly of Applied Mathematics, **48** (1990), 133–152.

[2] А. С. Калашников, *Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка* // Успехи мат. наук, **42** (1987), 135–176.

[3] D. G. Aronson, *The porous medium equation* // Lect. Notes Math., **1224** (1986), 1–46.

[4] M. Winkler, *Boundary behaviour in strongly degenerate parabolic equation* // Acta Math. Univ. Comenianae, **LXXII** (2003), 129–139.

[5] M. Winkler, *Some results on degenerate parabolic equations not in divergence form*, Ph. D. Thesis, www.math1.rwth-aachen.de/Forschung-Research/d_emath1.html, 2000.

[6] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.* Итоги науки. Мат. анализ. 1969. Москва: ВИНИТИ, 1971.

[7] J. L. Vazquez, S. I. Shmarev, *On the regulaity of interfaces in solutions of reaction-diffusion equations* // Nonlinear Diff. Equat. Appl., **3** (1996), 465–497.

[8] А. Е. Эльберт, *Об асимптотике решения нелинейного параболического уравнения в окрестности возникновения фронта* // ЖВММФ, **41** (2001), 1041–1052.

[9] V. A. Galaktionov, *Geometric theory of one-dimensional nonlinear parabolic equations I. Singular interfaces* // Adv. Differ. Equat., **7** (2002), 513–580.

[10] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *Первая краевая задача для вырождающихся параболических уравнений* // Нелинейные граничные задачи, **3** (1991), 6–12.

[11] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *Вырождающиеся параболические уравнения и задачи со свободной границей* // Доклады АН УССР, **1** (1990), 3–7.

[12] M. Ughi, *A degenerate parabolic equation modelling the spread of an epidemic* // Ann. Mat. Pura Appl., **143** (1986), 385–400.

[13] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Москва, Наука, 1967.

[14] С. Н. Кружков, *Результаты о характере непрерывности решений параболических уравнений и некоторые их применения* // Математические заметки, **6** (1969), 97–108.

[15] А. Фридман, *Вариационные принципы и задачи со свободными границами.* Москва, Наука, 1990.

[16] L. A. Caffarelli, A. Friedman, *Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of a gas in porous medium* // Amer. J. Math., **101** (1979), 1193–1181.

[17] D. G. Aronson, J. L. Vazquez, *Eventual C^∞ regularity and concavity for flows in one-dimensional porous media* // ARMA, **99** (1987), 329–348.

[18] Ko Youngsang, *Regularity of the interface for the porous medium equation* // Electronic Journal of Differential Equations, **68** (2000), 1–12.

[19] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Москва, Физматгиз, 1963.

[20] Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек, *Регулярность решения задачи со свободной границей для уравнения $v_t = (v^m)_{xx}$* // Алгебра и анализ, **12** (2000), 1–21.

[21] Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек, *Классическая разрешимость первой начально-краевой задачи для нелинейного сильно вырождающегося параболического уравнения* // Украинский мат. журнал, **56** (2004), N 10, 1299–1321.

Сведения об авторах

Борис Васильевич Базалий, Николай Валерьевич Краснощек

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Р. Люксембург 74,
83114, Донецк
Украина
E-Mail: bazaliy@iamm.ac.donetsk.ua