Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 4, 535 – 581

О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями w_{λ_0}-псевдомонотонного типа

Павел О. Касьянов, Валерий С. Мельник

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Для широкого класса дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств с w_{λ_0}-псевдомонотонными отображениями, включая отображения псевдомонотонного типа, получена теорема о разрешимости. Теорема доказана при помощи метода эллиптической регуляризации и метода штрафа. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

2000 MSC. 35K55, 58C06, 34A40, 34A60.

Ключевые слова и фразы. Дифференциально-операторные включения, эволюционные вариационные неравенства, псевдомонотонные отображения, многозначный оператор вариационного исчисления, многозначный метод штрафа.

Введение

Цель этой работы состоит в изучении существования решений абстрактных дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств для широкого класса операторов, включая, как частный случай, псевдомонотонные операторы.

Дифференциально-операторные включения и эволюционные вариационные неравенства исследуются многими авторами: И. В. Скрыпник, J.-P. Aubin, S. Carl, H. Frankowska, M. И. Каменский, П. О. Касьянов, П. И. Когут, А. А. Ковалевский, В. С. Мельник, D. Motreanu, В. В. Обуховский, N. S. Papageorgiou, О. М. Солонуха,

Статья поступила в редакцию 23.02.2007
Частично поддержано ДФФД, грант Б-Ф25/539-2007

ISSN 1810 – 3200.

А. А. Толстоногов, Ю. И. Уманский, А. Н. Вакуленко, М. З. Згуровский и другими в работах [1–33] и т.п.

При изучении нелинейных эволюционных уравнений используются некоторые стандартные методы: метод аппроксимаций Фаэдо–Галеркина, метод сингулярных возмущений, метод разностных аппроксимаций, метод нелинейных полугрупп операторов и другие (см. напр. [3, 17]). Применение этих подходов к дифференциально-операторным включениям и эволюционным вариационным неравенствам наталкивается на ряд технических трудностей. Метод нелинейных полугрупп операторов в банаховых пространствах был развит для эволюционных включений в работах А. А. Толстоногова [28], А. А. Толстоногова и Ю. И. Уманского [29], V. Barbu [3] и в других. Метод аппроксимаций Фаэдо–Галеркина был применен П. О. Касьяновым [12–14], тогда как метод сингулярных возмущений (см. H. Brezis [4], Ю. И. Дубинский [9], А. Н. Вакуленко и В. С. Мельник [31–33]) не был реализован для эволюционных вариационных неравенств с многозначными отображениями w_{λ_0}-псевдомонотонного типа.

В этой работе обосновывается метод сингулярных возмущений для дифференциально-операторных включений с w_{λ_0}-псевдомонотонными, ослаблено $+$-коэрцитивными отображениями, который является известным методом для дифференциально-операторных уравнений [17]. Распространяя таким образом известные результаты для более широкого класса отображений, обосновывается существование решений для дифференциально-операторных включений. Используя полученные результаты, в работе разрабатывается многозначный метод штрафа для эволюционных вариационных неравенств на телесно выпуклых множествах. В работе также рассматриваются основные свойства классов многозначных отображений w_{λ_0}-псевдомонотонного типа, в частности, исследуются многозначные операторы вариационного исчисления.

В заключительной части работы рассматриваются некоторые приложения полученных результатов к некоторым конкретным дифференциальным включениям и эволюционным вариационным неравенствам.

1. Постановка задачи

Пусть X_i — некоторое рефлексивное банахово пространство, непрерывно и плотно вложенное в некоторое банахово пространство Y, $i = 1, 2$; X_i^* — топологически сопряженное пространство к X_i и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_i} : X_i^* \times X_i \to \mathbb{R}$ — некоторая форма двойственности. Пусть $X = X_1 \cap X_2$, тогда $X^* = X_1^* + X_2^*$. На $X^* \times X$ мы рассмотрим спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X^* \times X \to \mathbb{R}$. Заметим, что для каждого $f \in X^*$ существуют $f_i \in X_i^*$, $i = 1, 2$, такие что $f = f_1 + f_2$ и

$$\langle f, x\rangle_X = \langle f_1, x\rangle_{X_1} + \langle f_2, x\rangle_{X_2} \qquad \forall\, x \in X.$$

Пусть $L : D(L) \subset X \to X^*$ — линейный плотно определенный максимально монотонный оператор с линейной областью определения $D(L)$. На $D(L)$ мы рассмотрим норму графика $\|y\|_{D(L)} = \|y\|_X + \|Ly\|_{X^*}$ для каждого $y \in D(L)$. Заметим, что $(D(L), \|\cdot\|_{D(L)})$ — рефлексивное банахово пространство, непрерывно вложенное в X, X_1, X_2.

Теперь пусть $A : X_1 \rightrightarrows X_1^*$, $B : X_2 \rightrightarrows X_2^*$, $N : Y \rightrightarrows Y^*$ — некоторые многозначные отображения. Рассмотрим следующую задачу:

$$\left.\begin{aligned} &\langle Ly, \omega - y\rangle_X + [A(y), \omega - y]_+ + +[B(y), \omega - y]_+ \\ &\qquad\qquad + [N(y), \omega - y]_+ \geq \langle f, \omega - y\rangle_X \qquad \forall\, \omega \in D(L) \cap K, \\ &y \in D(L) \cap K, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

для некоторого фиксированного $f \in X^*$ и выпуклого тела $K \subset X$. Здесь $[C, \omega]_+ = \sup_{d\in}\langle d, \omega\rangle_X$ для $C \subset X^*$, $\omega \in X$, $C \neq \emptyset$.

Нашей целью является доказательство существования решений задачи (1.1), комбинируя метод сингулярных возмущений и метод штрафа (см. [17]).

2. Классы многозначных отображений. Предварительные результаты

Введем некоторые условные обозначения. Пусть X — некоторое (рефлексивное или сепарабельное) банахово пространство, X^* — его топологически сопряженное, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X^* \times X \to \mathbb{R}$ — форма двойственности. В качестве $\overline{co}^*(B) := cl_{\sigma(X^*;X)}(co(B))$ обозначим $*$-слабо замкнутую оболочку непустого подмножества $B \subset X^*$. Для многозначного отображения $A : X \rightrightarrows X^*$ определим верхнюю $[A(y), \omega]_+ = \sup_{d\in A(y)}\langle d, \omega\rangle_X$ и нижнюю $[A(y), \omega]_- = \inf_{d\in A(y)}\langle d, \omega\rangle_X$ опорные функции, где $y, \omega \in X$, а также, верхнюю $\|A(y)\|_+ = \sup_{d\in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{X^*}$ и нижнюю $\|A(y)\|_- = \inf_{d\in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{X^*}$ нормы. Свойства данных отображений рассмотрены в работах [18, 19, 22]. Далее $y_n \rightharpoonup y$ в X будет означать, что y_n сходится слабо к y в пространстве X. Если пространство X рефлексивно, то $y_n \rightharpoonup y$ в X^* будет означать, что y_n сходится слабо к y в пространстве X^*, если нет, то y_n сходится к y $*$-слабо в пространстве X^*.

В качестве $C_v(X^*)$ обозначим совокупность всех непустых, выпуклых, ограниченных, $*$-слабо замкнутых подмножеств пространства

X^*, $A : X \rightrightarrows X^*$ будет означать, что A отображает X в $2^{X^*} \setminus \emptyset$, т.е. A — многозначное отображение с непустыми значениями.

Предложение 2.1. *Пусть $A, B, C : X \rightrightarrows X^*$. Тогда для всех y, v, $v_1, v_2 \in X$ справедливы следующие результаты:*

1) *пусть $a(\cdot\,,\cdot\,) : D \subset X \times X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Для каждого $y \in D \subset X$ функционал $X \ni \omega \mapsto a(y, \omega)$ — положительно однородный выпуклый и полунепрерывный снизу тогда и только тогда, когда существует многозначное отображение $E : D(E) \subset X \to 2^{X^*}$ такое, что $D(E) = D$ и $a(y, \omega) = [E(y), \omega]_+$ $\forall\, y \in D(E)$, $\omega \in X$;*

2) $[A(y), v_1 + v_2]_+ \le [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_+$,
$[A(y), v_1 + v_2]_- \ge [A(y), v_1]_- + [A(y), v_2]_-$,
$[A(y), v_1 + v_2]_+ \ge [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_-$,
$[A(y), v_1 + v_2]_- \le [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_-$;

3) $[A(y) + B(y), v]_+ = [A(y), v]_+ + [B(y), v]_+$,
$[A(y) + B(y), v]_- = [A(y), v]_- + [B(y), v]_-$;

4) $[A(y), v]_+ \le \|A(y)\|_+ \|v\|_X$,
$[A(y), v]_- \le \|A(y)\|_- \|v\|_X$;

5) $[A\,(y)\,, v]_+ = [\overline{co}^* A\,(y)\,, v]_+$,
$[A\,(y)\,, v]_- = [\overline{co}^* A\,(y)\,, v]_-$;

6) $\|A(y) - B(y)\|_+ \ge \Big|\|A(y)\|_+ - \|B(y)\|_-\Big|$,
$\|A(y) - B(y)\|_- \ge \|A(y)\|_- - \|B(y)\|_+$;

7) $d \in \overline{co}^* A(y) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \omega \in X \;\; [A(y), \omega]_+ \ge \langle d, \omega \rangle_X$;

8) $d_H(A(y), B(y)) \ge |\|A(y)\|_+ - \|B(y)\|_+|$, *где d_H — хаусдорфова метрика;*

9) $\mathrm{dist}(A(y) + B(y), C(y)) \le \mathrm{dist}(A(y), C(y)) + \mathrm{dist}(B(y), 0)$,
$\mathrm{dist}(C(y), A(y) + B(y)) \le \mathrm{dist}(C(y), A(y)) + \mathrm{dist}(0, B(y))$,
$d_H(A(y) + B(y), C(y)) \le d_H(A(y), C(y)) + d_H(B(y), 0)$,

где $\mathrm{dist}(G, F) = \sup_{a \in G} \inf_{b \in F} \|a - b\|_{X^*}$ *для непустых $G, F \subset X^*$;*

10) *для непустого $G \subset X^*$ и $F \in C_v(X^*)$* $\mathrm{dist}(G, F) = \mathrm{dist}(\overline{co}^* G, F)$.

Доказательство. Свойства 2), 3), 4), 6), 8), 9) доказываются непосредственно. Свойство 5) известно. Рассмотрим свойство 7). Пусть $d \in \overline{\text{co}}^* A(y)$, тогда $\forall\ v \in X$ из определения $[\cdot,\cdot]_+$ следует, что $\langle d, v\rangle_X \leq [\overline{\text{co}}^* A(y), v]_+ = [A(y), v]_+$.

Теперь пусть справедливо неравенство $[A(y), v]_+ \geq \langle d, v\rangle_X\ \forall\ v \in X$ и при этом $d \notin\ \overline{\text{co}}^* A(y)$. Множество $\overline{\text{co}}^* A(y)$ — выпуклое и замкнутое в $\sigma(X^*; X)$-топологии пространства X^*. Следовательно, из теоремы об отделимости существует $v_0 \in X$ такое, что $[A(y), v_0]_+ = [\overline{\text{co}}^* A(y), v_0]_+ < \langle d, v_0\rangle_X$. Противоречие.

Теперь рассмотрим свойство 1). Пусть $A : D(A) \subset X \to 2^{X^*}$. Тогда для каждого $y \in D(A)$ функционал $X \ni v \mapsto a(y, v) = [A(y), v]_+$ положительно однороден и полуадитивен. Это следует из его определения. Следовательно, он является выпуклым. Полунепрерывность снизу очевидна.

Теперь пусть $X \ni v \mapsto a(y, v)$ — положительно однородный выпуклый и полунепрерывный снизу функционал, $y \in D \subset X$. Поскольку $a(y, 0) = 0$, он является верхним поточечным пределом некоторого семейства непрерывных линейных функционалов. Обозначим это семейство как $A(y) \subset X^*$. Поэтому, $a(y, v) = [A(y), v]_+$.

В заключение рассмотрим свойство 10). Докажем, что $\text{dist}(E, F) = \text{dist}(coE, F)$. Так как $E \subset coE$, то $\text{dist}(E, F) \leq \text{dist}(coE, F)$. Далее, $\forall\, \xi \in coE\ \exists\, y_1, \ldots, y_n \in E$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ $(\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1)$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$. Тогда $\forall\, v \in F\ \text{dist}(\xi, F) \leq \|\xi - v\|_{X^*}$.

Множество F ограниченно и $*$-слабо замкнуто в X^*, функционал $X^* \ni -v \mapsto \|y - v\|_{X^*}\ \forall\, y \in X^*$ — $*$-слабо полунепрерывен снизу [25].

Следовательно, в силу аналога теоремы Вейерштрасса [30], для каждого $y_i \in E$ существует элемент $v_i \in F$ такой, что $\text{dist}(y_i, F) = \|y_i - v_i\|_{X^*}$. Благодаря выпуклости множества F получаем, что для $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

$$
\begin{aligned}
\text{dist}(\xi, F) \leq \|\xi - v\|_{X^*} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \|y_i - v_i\|_{X^*} \\
= \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \text{dist}(y_i, F) \leq \text{dist}(E, F).
\end{aligned}
$$

Так как элемент $\xi \in coE$ произвольный, то $\text{dist}(coE, F) = \text{dist}(E, F)$. Следовательно, $\text{dist}(coE, F) = \text{dist}(\overline{co}^* E, F)$.

Для каждого $\xi \in \overline{co}^* E$ существует последовательность $\{y_n\} \in coE$, которая сходится к ξ $*$-слабо в X^*. Докажем, что функционал $X^* \ni y \mapsto \text{dist}(E, F)$ $*$-слабо полукомпактен снизу, т.е. для любой последовательности $y_n \to y$ $*$-слабо в X^* существует ее подпоследовательность $\{y_{n'}\}$ такая, что $\underline{\lim}_{n' \to \infty} \text{dist}\,(y_{n'}, F) \geq \text{dist}(y, F)$.

Действительно, пусть $y_n \to y$ $*$-слабо в X^*. Для каждого y_n существует $x_n \in F$ такое, что $\operatorname{dist}(y_n, F) = \|y_n - x_n\|_{X^*}$. Множество F $*$-слабо компактно и последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{n'}\}$ такую, что $x_{n'} \to x$ $*$-слабо в X^* и $x \in F$. Тогда последовательность $z_{n'} = y_{n'} - x_{n'} \to z = y - x$ *-слабо в X^*. Это означает, что $\underline{\lim}_{n'\to\infty} \operatorname{dist}(y_{n'}, F) = \underline{\lim}_{n'\to\infty} \|y_{n'} - x_{n'}\|_{X^*} \geq \|y - x\|_{X^*} \geq \operatorname{dist}(y, F)$. Отсюда следует (переходя при необходимости к подпоследовательности), что $\operatorname{dist}(\xi, F) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \operatorname{dist}(y_n, F) \leq \operatorname{dist}(coE, F)$. Поскольку элемент $\xi \in \overline{co}^* E$ мы выбираем произвольно, то $\operatorname{dist}(\overset{*}{\overline{co}}\, E, F) \leq \operatorname{dist}(coE, F)$ и необходимое равенство доказано. $\square$

Замечание 2.1. Вместе с формами $[\cdot,\cdot]_+$, $[\cdot,\cdot]_-$ рассмотрим формы $[[A(y),\omega]]_+ = \sup_{d\in A(y)} |\langle d,\omega\rangle|$ и $[[A(y),\omega]]_- = \inf_{d\in A(y)} |\langle d,\omega\rangle|$, $\forall\, y,\omega \in X$. Таким образом, очевидно, что

$$[A(y),\omega]_+ \leq |\,[A(y),\omega]_+| \leq [[A(y),\omega]]_+ \leq \|A(y)\|_+\|\omega\|_X,$$

$$[A(y),\omega]_- \leq |\,[A(y),\omega]_-| \leq [[A(y),\omega]]_- \leq \|A(y)\|_-\|\omega\|_X.$$

Замечание 2.2. Функционал $\|\cdot\|_{(+)-} : C_v(X^*) \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим свойствам:

1. $A = \{\bar{0}\}$ (соответственно $\overline{0} \in A$) $\Leftrightarrow$ $\|A\|_+ = 0$ (соответственно $\|A\|_- = 0$),
2. $\|\alpha A\|_{+(-)} = |\alpha|\|A\|_{+(-)}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$,
3. $\|A + B\|_{+(-)} \leq \|A\|_{+(-)} + \|B\|_{+(-)}$.

Рассмотрим новые классы отображений псевдомонотонного типа. Как и раньше X — банахово пространство, X^* — пространство топологически сопряженное к X, и пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X^* \times X \to \mathbb{R}$ — форма двойственности. Напомним, что многозначное отображение $A : D(A) \subset X \to 2^{X^*}$ называется *монотонным*, если $\langle d_1 - d_2, y_1 - y_2\rangle_X \geq 0$ $\forall\, y_1,\, y_2 \in D(A)$, $\forall\, d_1 \in A(y_1)$, $d_2 \in A(y_2)$.

Используя введенные выше скобки, очевидно, что многозначное отображение $A : D(A) \subset X \to 2^{X^*}$ монотонное тогда и только тогда, когда

$$[A(y_1), y_1 - y_2]_- \geq [A(y_2), y_1 - y_2]_+ \qquad \forall\, y_1, y_2 \in D(A).$$

Кроме обычной монотонности многозначных отображений будем рассматривать:

- *N-монотонность*, т.е. $[A(y_1), y_1 - y_2]_- \geq [A(y_2), y_1 - y_2]_- \ \forall\, y_1, y_2 \in D(A)$;
- *V-монотонность*, т.е. $[A(y_1), y_1 - y_2]_+ \geq [A(y_2), y_1 - y_2]_+ \ \forall\, y_1, y_2 \in D(A)$;
- *ω-монотонность*, т.е. $[A(y_1), y_1 - y_2]_+ \geq [A(y_2), y_1 - y_2]_- \ \forall\, y_1, y_2 \in D(A)$.

Определение 2.1. *Пусть $D(A)$ — некоторое подмножество. Многозначное отображение $A : D(A) \subset X \to 2^{X^*}$ называется:*

- *$+(-)$-коэрцитивным , если $\|y\|_X^{-1}[A(y), y]_{+(-)} \to +\infty$ при $\|y\|_X \to +\infty$, $y \in D(A)$;*
- *равномерно $+(-)$-коэрцитивным, если для некоторого $c > 0$*

$$\frac{[A(y), y]_{+(-)} - c\|A(y)\|_{+(-)}}{\|y\|_X} \to +\infty$$

  при $\|y\|_X \to +\infty, \ y \in D(A)$;
- *ограниченным, если для любого $L > 0$ существует $l > 0$ такое, что $\|A(y)\|_+ \leq l \ \forall\, y \in D(A) \ \|y\|_X \leq L$;*
- *локально ограниченным, если для любого фиксированного $y \in D(A)$ существуют константы $m > 0$ и $M > 0$ такие, что $\|A(\xi)\|_+ \leq M$, когда $\|y - \xi\|_X \leq m$, $\xi \in D(A)$;*
- *конечномерно локально ограниченным, если для каждого конечномерного подпространства $F \subset D(A)$ $A\big|_F$ — локально ограниченное на $(F, \|\cdot\|_X)$.*

Пусть также W — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_W$, непрерывно вложенное в X; $C \in \Phi$, т.е. $C(r_1; \cdot\,) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция для каждого $r_1 \geq 0$ и $\tau^{-1}C(r_1; \tau r_2) \to 0$ при $\tau \to 0+$ $\forall\, r_1, r_2 \geq 0$, $\|\cdot\|'_W$ — (полу-)норма на X, которая относительно компактна на W и непрерывна на X, относительно нормы в X.

Определение 2.2. *Многозначное отображение $A : D(A) \subset X \to 2^{X^*}$ с выпуклой областью определения $D(A)$ называется:*

- *радиально полунепрерывным снизу, если для любых фиксированных y, $\xi \in D(A)$, для которых существует $t_0 > 0$ такое, что $y + t_0\xi \in D(A)$, имеем*

$$\varliminf_{t \to +0} [A(y + t\xi), \xi]_+ \geq [A(y), \xi]_-;$$

- *радиально непрерывным, если действительная функция* $[0,\varepsilon] \ni t \to [A(y+t\xi),\xi]_-$ *непрерывна справа в точке* $t=0$ *для любых фиксированных* y, $\xi \in D(A)$, *для которых существует* $t_0>0$ *такое, что* $y+t_0\xi \in D(A)$;

- *радиально непрерывным сверху, если действительная функция* $[0,\varepsilon] \ni t \to [A(y+t\xi),\xi]_+$ *полунепрерывна сверху справа в точке* $t=0$ *для любых фиксированных* y, $\xi \in D(A)$, *для которых существует* $t_0>0$ *такое, что* $y+t_0\xi \in D(A)$;

- *хеминепрерывным, если для каждого* $\omega \in D(A)$ *действительная функция* $D(A) \ni y \to [A(y),\omega]_+$ *полунепрерывна сверху для любого фиксированного* $y \in D(A)$;

- *максимально монотонным на* $D(A)$, *если* A *монотонно на* $D(A)$ *и из неравенства* $\langle \omega - d(u), v-u\rangle_X \ge 0$ *для любых* $u \in D(A)$, $d(u)\in A(u)$ *следует, что* $v \in D(A)$ *и* $\omega \in A(v)$;

- *оператором с полуограниченной вариацией на* W (*с* (X,W)*-полуограниченной вариацией*), *если* $\forall\, R>0$, $\forall\, y_1,y_2 \in D(A)$ *таких, что* $\|y_1\|_X \le R$, $\|y_2\|_X \le R$ *выполняется*
$$[A(y_1),y_1-y_2]_- \ge [A(y_2),y_1-y_2]_+ - C(R;\|y_1-y_2\|'_W);$$

- *оператором с* N*-полуограниченной вариацией на* W, *если* $\forall\, R>0$, $\forall\, y_1,y_2 \in D(A)$ *таких, что* $\|y_1\|_X \le R$, $\|y_2\|_X \le R$ *выполняется*
$$[A(y_1),y_1-y_2]_- \ge [A(y_2),y_1-y_2]_- - C(R;\|y_1-y_2\|'_W);$$

- *оператором с* V*-полуограниченной вариацией на* W, *если* $\forall\, R>0$, $\forall\, y_1,y_2 \in D(A)$ *таких, что* $\|y_1\|_X \le R$, $\|y_2\|_X \le R$ *выполняется*
$$[A(y_1),y_1-y_2]_+ \ge [A(y_2),y_1-y_2]_+ - C(R;\|y_1-y_2\|'_W),$$

- λ*-псевдомонотонным на* W (w_λ*-псевдомонотонным*), *если для каждой последовательности* $\{y_n\}_{n\ge0} \subset W \cap D(A)$ *такой, что* $y_n \rightharpoonup y_0$ *в* W, *из неравенства*
$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y_0\rangle_X \le 0, \tag{2.1}$$
где $d_n \in A(y_n)$ $\forall\, n \ge 1$, *следует существование подпоследовательностей* $\{y_{n_k}\}_{k\ge1} \subset \{y_n\}_{n\ge1}$ *и* $\{d_{n_k}\}_{k\ge1} \subset \{d_n\}_{n\ge1}$ *таких, что*
$$\varliminf_{k\to\infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - \omega\rangle_X \ge [A(y_0),y_0-\omega]_- \qquad \forall\, \omega \in D(A); \tag{2.2}$$

- *λ_0-псевдомонотонным на W (w_{λ_0}-псевдомонотонным), если для каждой последовательности $\{y_n\}_{n\geq 0} \subset W \cap D(A)$ такой, что $y_n \rightharpoonup y_0$ в W, $d_n \rightharpoonup d_0$ в X^*, где $d_n \in A(y_n)$ $\forall\, n \geq 1$, из неравенства* (2.1)*, следует существование подпоследовательностей $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{y_n\}_{n\geq 1}$ и $\{d_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{d_n\}_{n\geq 1}$, для которых справедливо неравенство* (2.2).

  Вышеупомянутое многозначное отображение удовлетворяет:

- *свойство $(\kappa)_{+(-)}$, если для каждого ограниченного множества D в $D(A)$ существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $[A(v), v]_{+(-)} \geq -c\|v\|_X$ $\forall\, v \in D \setminus \{\bar{0}\}$;*

- *свойство* (П)*, если для фиксированных $k > 0$, $y_0 \in X$, $d \in A$ и ограниченного в X множества $B \subset D(A)$, для которых $\langle d(y), y - y_0\rangle_X \leq k$ $\forall\, y \in B$, существует $C > 0$ такое, что $\|d(y)\|_{X^*} \leq C$ для любых $y \in B$.*

Замечание 2.3. Идея использования подпоследовательностей в определении 2.2 для однозначных псевдомонотонных отображений была предложена И. В. Скрыпником [27].

Замечание 2.4. Далее $A : X \rightrightarrows X^*$ будет означать, что A — многозначное отображение с непустыми и ограниченными в X^* значениями.

Предложение 2.2. *Пусть $A : X \rightrightarrows X^*$ — $+$-коэрцитивное многозначное отображение, а многозначное отображение $F : X \rightrightarrows X^*$ такое, что*

$$[F(y_1), y_1 - y_2]_+ \geq [F(y_2), y_1 - y_2]_- \qquad \forall\, y_1, y_2 \in X.$$

Тогда $A + F : X \rightrightarrows X^*$ — $+$-коэрцитивное отображение.

Доказательство. Действительно, для каждого $y \in X$ $-[F(0), y]_- \leq \|F(0)\|_- \|y\|_X$. Тогда, в силу предложения 2.1,

$$\begin{aligned}[A(y) + F(y), y]_+ &= [A(y), y]_+ + [F(y), y]_+ \\ &\geq [A(y), y]_+ + [F(0), y]_- \geq [A(y), y]_+ - \|F(0)\|_- \|y\|_X.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\|F(0)\|_- < +\infty$. Отсюда следует $+$-коэрцитивность отображения $A + F$. $\square$

Теперь пусть $X = X_1 \cap X_2$, где $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ и $(X_2, \|\cdot\|_{X_2})$ — банаховы пространства.

Определение 2.3. *Пара многозначных отображений* $A : D(A) \subset X_1 \to 2^{X_1^*}$ *и* $B : D(B) \subset X_2 \to 2^{X_2^*}$ *называется* s*-взаимно ограниченной, если для каждого* $M > 0$ *существует* $K(M) > 0$ *такое, что из*

$$\|y\|_Y \leq M, \quad y \in D(A) \cap D(B) \quad \text{и} \quad \langle d_1(y), y\rangle_{X_1} + \langle d_2(y), y\rangle_{X_2} \leq M$$

следует, что

$$\text{либо } \|d_1(y)\|_{X_1^*} \leq K(M), \text{ либо } \|d_2(y)\|_{X_2^*} \leq K(M)$$

для некоторых селекторов $d_1 \in A$ *и* $d_2 \in B$.

Лемма 2.1. *Пусть* $A : X_1 \rightrightarrows X_1^*$ *и* $B : X_2 \rightrightarrows X_2^*$ *— некоторые многозначные* $+(-)$*-коэрцитивные отображения, удовлетворяющие условию* $(\kappa)_{+(-)}$*. Тогда многозначный оператор* $C := A + B : X \rightrightarrows X^*$ *также* $+(-)$*-коэрцитивен.*

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Пусть последовательность $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset X$ такая, что $\|y_n\|_X = \|y_n\|_{X_1} + \|y_n\|_{X_2} \to +\infty$ при $n \to +\infty$, но при этом

$$\sup_{n\geq 1} \frac{[C(y_n), y_n]_{+(-)}}{\|y_n\|_X} < +\infty. \tag{2.3}$$

Случай 1. $\|y_n\|_{X_1} \to +\infty$ при $n \to \infty$, $\|y_n\|_{X_2} \leq c\ \forall n \geq 1$. Положим

$$\left.\begin{aligned} \gamma_A(r) &:= \inf_{\|v\|_{X_1}=r} \frac{[A(v), v]_{+(-)}}{\|v\|_{X_1}} > -\infty, \\ \gamma_B(r) &:= \inf_{\|w\|_{X_2}=r} \frac{[B(w), w]_{+(-)}}{\|w\|_{X_2}} > -\infty, \end{aligned}\right\} \quad r > 0.$$

Заметим, что $\gamma_A(r) \to +\infty$, $\gamma_B(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Тогда $\forall\, n \geq 1$

$$\|y_n\|_{X_1}^{-1}[A(y_n), y_n]_{+(-)} \geq \gamma_A(\|y_n\|_{X_1})\|y_n\|_{X_1}$$

и

$$\frac{[A(y_n), y_n]_{+(-)}}{\|y_n\|_X} \geq \gamma_A(\|y_n\|_{X_1})\frac{\|y_n\|_{X_1}}{\|y_n\|_X} \to +\infty$$

при $\|y_n\|_{X_1} \to +\infty$ и $\|y_n\|_{X_2} \leq c$. В силу условия $(\kappa)_{+(-)}$ для каждого $n \geq 1$

$$\frac{[B(y_n), y_n]_{+(-)}}{\|y_n\|_X} \geq \gamma_B(\|y_n\|_{X_2})\frac{\|y_n\|_{X_2}}{\|y_n\|_X} \geq -c_1\frac{\|y_n\|_{X_2}}{\|y_n\|_X} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $c_1 \in \mathbb{R}$ — константа из условия $(\kappa)_{+(-)}$ с $D = \{y \in X_2 \mid \|y\|_{X_2} \le c\}$. Очевидно, что

$$\frac{[C(y_n), y_n]_{+(-)}}{\|y_n\|_X} = \frac{[A(y_n), y_n]_{+(-)}}{\|y_n\|_X} + \frac{[B(y_n), y_n]_{+(-)}}{\|y_n\|_X} \to +\infty$$

при $n \to \infty$. Последнее противоречит (2.3).

Случай 2. Случай, когда $\|y_n\|_{X_1} \le c \;\forall\, n \ge 1$ и $\|y_n\|_{X_2} \to \infty$ при $n \to +\infty$ проверяется аналогично.

Случай 3. Рассмотрим ситуацию, когда $\|y_n\|_{X_1} \to +\infty$ и $\|y_n\|_{X_2} \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} +\infty > \sup_{n\ge 1} \frac{[C(y_n), y_n]_{+(-)}}{\|y_n\|_X} \\ &\ge \frac{\gamma_A(\|y_n\|_{X_1})\|y_n\|_{X_1} + \gamma_B(\|y_n\|_{X_2})\|y_n\|_{X_2}}{\|y_n\|_{X_1} + \|y_n\|_{X_2}} \\ &\ge \min\{\gamma_A(\|y_n\|_{X_1}); \gamma_B(\|y_n\|_{X_2})\} \to +\infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

при $n \to +\infty$. Приходим к противоречию. $\square$

Лемма 2.2. *Каждый строгий многозначный оператор* $A : X \to 2^{X^*}$ *с* $(X; W)$*-полуограниченной вариацией ограниченнозначен (т.е.* $A : X \rightrightarrows X^*$*), локально ограничен и обладает свойством* (П).

Доказательство. Заметим, что для каждого $y \in X$

$$X \ni \omega \to [A(y), \omega]_+ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad X \ni \omega \to [A(y), \omega]_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Поэтому, в силу определения полуограниченности вариации на (X, W) получим, что для всех $\omega \in X$, для некоторого $R = R(\omega, y) > 0$

$$[A(y), \omega]_+ \le [A(y + \omega), \omega]_- + C_A(R; \|\omega\|'_W) < +\infty.$$

Из последнего, на основании теоремы Банаха-Штейнгауза, следует, что $\|A(y)\|_+ < +\infty$ для каждого $y \in X$.

Если A не является локально ограниченным, то для некоторого $y \in X$ существует последовательность $\{y_n\}_{n\ge 1} \subset X$ такая, что $y_n \to y$ в X и $\|A(y_n)\|_+ \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Положим $\alpha_n = 1 + \|A(y_n)\|_+ \|y_n - y\|_X$ для каждого $n \ge 1$. Тогда, в силу предложения 2.1, $\forall\, \omega \in X$ и некоторого $R > 0$ получим, что

$$\begin{aligned} \alpha_n^{-1}[A(y_n), \omega]_+ \le \alpha_n^{-1}\big\{[A(y_n), y_n - y]_+ \\ + [A(y_n), \omega + y - y_n]_+\big\} \le \alpha_n^{-1}\big\{[A(y_n), y_n - y]_+ \end{aligned}$$

$$+ [A(y+\omega), y+\omega-y_n]_+ + C_A(R; \|y_n - y - \omega\|'_W)\big\}.$$

Поскольку последовательность $\{\alpha_n^{-1}\}$ ограничена и $\|y_n - y - \omega\|'_W \to \|\omega\|'_W$ (согласно тому, что $\|\xi\|'_W \leq k\|\xi\|_X$ для всех $y \in X$), в силу предложения 2.1, имеем

$$\forall n \geq 1 \quad \alpha_n^{-1}[A(y_n), \omega]_+ \leq \alpha_n^{-1}\big\{C_A(R; \|y_n - y - \omega\|'_W) + \|A(y+\omega)\|_+ \cdot \|y+\omega-y_n\|_X\big\} + 1 \leq N_1,$$

где N_1 не зависит от $n \geq 1$. Следовательно, $\sup_{n\geq 1}\left|\alpha_n^{-1}[A(y_n), \omega]_+\right| < +\infty \ \forall \omega \in X$. Поэтому, на основании теоремы Банаха–Штейнгауза, существует $N > 0$ такое, что

$$\|A(y_n)\|_+ \leq N\alpha_n = N\left(1 + \|A(y_n)\|_+ \cdot \|y_n - y\|_X\right) \qquad \forall n \geq 1.$$

Выбирая $n_0 \geq 1$ из условия $N\|y_n - y\| \leq 1/2 \, \forall n \geq n_0$ получим, что для каждого $n \geq n_0$ $\|A(y_n)\|_+ \leq 2N$, что противоречит предположению. Следовательно, локальная ограниченность доказана.

Зафиксируем $k > 0$, $y_0 \in X$, $d \in A$ и ограниченное в X множество $B \subset X$ такие, что $\langle d(y), y - y_0\rangle_X \leq k \ \forall y \in B$. В силу локальной ограниченности A существуют $\varepsilon > 0$ и $M_\varepsilon > 0$ такие, что $\|A(\xi + y_0)\|_+ \leq M_\varepsilon \ \forall \|\xi\|_X \leq \varepsilon$. Это означает, что для некоторого $R \geq \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|d(y)\|_{X^*} &= \sup_{\|\xi\|_X\leq\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\langle d(y), \xi\rangle_X \\
&\leq \sup_{\|\xi\|_X\leq\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\big\{[A(y), \xi + y_0 - y]_+ + \langle d(y), y - y_0\rangle_X\big\} \\
&\leq \sup_{\|\xi\|_X\leq\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\big\{[A(\xi+y_0), \xi+y_0-y]_- + \langle d(y), y-y_0\rangle_X + C_A(R; \|y-y_0-\xi\|'_W)\big\} \\
&\leq \sup_{\|\xi\|_X\leq\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\big\{\|A(\xi + y_0)\|_+ \cdot \|\xi + y_0 - y\|_X \\
&\quad + \langle d(y), y - y_0\rangle_X + C_A(R; \|y - y_0 - \xi\|'_W)\big\} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon M_\varepsilon + \|B - y_0\|_+ M_\varepsilon + k + l) = C,
\end{aligned}$$

где $l = \sup_{y\in B}\sup_{\|\xi\|_X\leq\varepsilon} C_A(R; \|y - \xi - y_0\|'_W) < +\infty$, так как $C(R; \cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $\|\cdot\|'_W$ непрерывна относительно $\|\cdot\|_X$ на X. $\square$

Предложение 2.3. *Каждое $-$-коэрцитивное многозначное отображение $A : X \rightrightarrows X^*$ является $+$-коэрцитивным; каждое монотонное $+$-коэрцитивное многозначное отображение является $-$-коэрцитивным, равномерно $-$-коэрцитивным и равномерно $+$-коэрцитивным.*

Доказательство. Первая часть этого предложения является прямым следствием определений $[\cdot,\cdot]_+$ и $[\cdot,\cdot]_-$. Проверим вторую. Пусть $A : X \rightrightarrows X^*$ — монотонное $+(-)$-коэрцитивное отображение. Докажем, что A является равномерно $+(-)$-коэрцитивным. Из леммы 2.2 следует существование шара $\bar{B}_r = \{y \in X \mid \|y\|_X \le r\}$ и такой константы $c_1 > 0$, что $\|A(\omega)\|_+ \le c_1\ \forall\,\omega \in \bar{B}_r$. Следовательно, для любого $y \in X$

$$\begin{aligned}
\|A(y)\|_+ = \sup_{d(y)\in A(y)} \sup_{\omega\in\bar{B}_r} \frac{1}{r}\langle d(y),\omega\rangle_X &= \frac{1}{r}\sup_{\omega\in\bar{B}_r}[A(y),\omega]_+ \\
&\le \frac{1}{r}\sup_{\omega\in\bar{B}_r}\big\{[A(y),\omega-y]_+ + [A(y),y]_+\big\} \\
&\le \frac{1}{r}\sup_{\omega\in\bar{B}_r}\big\{[A(\omega),\omega-y]_+ + [A(y),y]_+\big\} \\
&\le \frac{1}{r}\big\{c_1(r+\|y\|_X) + [A(y),y]_+\big\} \\
&= \frac{1}{r}[A(y),y]_+ + c_1 + \frac{c_1}{r}\|y\|_X;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|A(y)\|_- &= \inf_{d(y)\in A(y)} \sup_{\omega\in\bar{B}_r} \frac{1}{r}\langle d(y),\omega\rangle_X \\
&= \inf_{d(y)\in A(y)} \sup_{\omega\in\bar{B}_r} \frac{1}{r}\big\{\langle d(y),\omega-y\rangle_X + \langle d(y),y\rangle_X\big\} \\
&\le \inf_{d(y)\in A(y)} \sup_{\omega\in\bar{B}_r} \frac{1}{r}\big\{\langle d(\omega),\omega-y\rangle_X + \langle d(y),y\rangle_X\big\} \\
&\le \frac{1}{r}\inf_{d(y)\in A(y)}\big\{\langle d(\omega),y\rangle_X + c_1(r+\|y\|_X)\big\} \\
&= \frac{1}{r}[A(y),y]_- + c_1 + \frac{c_1}{r}\|y\|_X,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\forall\, y \in X \quad \|A(y)\|_{+(-)} \le \frac{1}{r}[A(y),y]_{+(-)} + c_1 + \frac{c_1}{r}\|y\|_X.$$

Поскольку $c = \frac{r}{2} > 0$, то равномерная $+(-)$-коэрцитивность для A следует из следующих оценок:

$$\begin{aligned}
&\frac{[A(y),y]_{+(-)} - c\|A(y)\|_{+(-)}}{\|y\|_X} \\
&\qquad \ge \frac{[A(y),y]_{+(-)} - \frac{1}{2}[A(y),y]_{+(-)} - \frac{rc_1}{2} - \frac{c_1}{2}\|y\|_X}{\|y\|_X} \\
&\qquad = \frac{[A(y),y-\frac{1}{2}y]_- - \frac{rc_1}{2} - \frac{c_1}{2}\|y\|_X}{\|y\|_X}
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{[A(\frac{1}{2}y), y - \frac{1}{2}y]_+ - \frac{rc_1}{2} - \frac{c_1}{2}\|y\|_X}{\|y\|_X}$$
$$= \frac{[A(\frac{1}{2}y), \frac{1}{2}y]_+}{2\|\frac{1}{2}y\|_X} - \frac{c_1}{2} - \frac{rc_1}{2\|y\|_X} \to +\infty$$

при $\|y\|_X \to \infty$. Чтобы закончить доказательство, достаточно показать, что каждое монотонное $+$-коэрцитивное отображение является $-$-коэрцитивным. Это следует оценки:

$$\frac{[A(y), y]_-}{\|y\|_X} = \frac{2[A(y), y - \frac{1}{2}y]_-}{\|y\|_X}$$
$$\geq \frac{2[A(\frac{1}{2}y), y - \frac{1}{2}y]_+}{\|y\|_X} = \frac{[A(\frac{1}{2}y), \frac{1}{2}y]_+}{\|\frac{1}{2}y\|_X} \to +\infty$$

при $\|y\|_X \to +\infty$. □

Следствие 2.1. *Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ — выпуклый полунепрерывный снизу функционал такой, что*

$$\frac{\varphi(y)}{\|y\|_X} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|y\|_X \to \infty.$$

Тогда его субдифференциал

$$\partial\varphi(y) = \{p \in X^* \mid \langle p, \omega - y\rangle_X \leq \varphi(\omega) - \varphi(y) \quad \forall\, \omega \in X\} \neq \emptyset, \quad y \in X$$

является $+$-коэрцитивным, и, следовательно, $-$-коэрцитивным, равномерно $-$-коэрцитивным и равномерно $+$-коэрцитивным.

Доказательство. Благодаря монотонности отображения $\partial\varphi : X \rightrightarrows X^*$ и предложению 2.3, достаточно доказать только то, что оно является $+$-коэрцитивным. Это следует из того, что

$$\|y\|_X^{-1}\ [\partial\varphi(y), y]_+ \geq \|y\|_X^{-1}\varphi(y) - \|y\|_X^{-1}\varphi(0) \to +\infty \text{ при } \|y\|_X \to +\infty.$$

□

Предложение 2.4. *Если многозначный оператор $A : X \rightrightarrows X^*$ обладает свойством* (П)*, то он обладает свойством* $(\kappa)_+$*.*

Доказательство. Докажем это предложение методом от противного. Пусть $D \subset X$ — ограниченное множество, такое, что для любого $c > 0$ существует $v_c \in D \setminus \{\bar{0}\}$ такое, что $[A(v_c), v_c]_+ \leq -c\|v_c\|_X < 0$. Тогда, в силу свойства (П), $\sup_{c>0} \|A(v_c)\|_+ =: d < +\infty$. Поэтому $-c\|v_c\|_X \geq [A(v_c), v_c]_+ \geq -\|A(v_c)\|_+\|v_c\|_X \geq -d\|v_c\|_X$ и $(d - c)\|v_c\|_X \geq 0$ для любого $c > 0$. Это противоречит тому, что $v_c \neq \bar{0}$. □

Замечание 2.5. Очевидно, что если одно из отображений $A, B : X \rightrightarrows X^*$ ограниченно, то пара $(A; B)$ является s-взаимно ограниченной. Более того, если каждое из отображений $A, B : X \rightrightarrows X^*$ обладает свойством (П), то пара $(A; B)$ является s-взаимно ограниченной и оператор $C = A + B : X \rightrightarrows X^*$ обладает свойством (П) и свойством $(\kappa)_+$.

Предложение 2.5. *Пусть $A : X \rightrightarrows X^*$ — полунепрерывный сверху оператор относительно сильной топологии пространства X и $*$-слабой топологии протранства X^*. Тогда A является радиально полунепрерывным.*

Доказательство. Известно, что A хеминепрерывный сверху [1], т.е., из $x_n \to x$ сильно в X следует, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} [A(x_n), v]_+ \le [A(x), v]_+$, $\forall\, v \in X$. Отметим, что хеминепрерывный сверху оператор является радиально непрерывным сверху, поэтому он является радиально полунепрерывным. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство. Тогда каждое λ-псевдомонотонное на W отображение является λ_0-псевдомонотонным на W. Для ограниченных отображений справедливо обратное утверждение.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Рассмотрим λ_0-псевдомонотонное на W отображение $A : X \rightrightarrows X^*$, $y_n \to y$ слабо в W, справедливо (2.1), где $d_n \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_n)$. Из ограниченности оператора A немедленно следует ограниченность $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A$ и ограниченность последовательности $\{d_n\}$ в X^*. Следовательно, существуют подпоследовательности $\{d_m\} \subset \{d_n\}$ и, соответственно, $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ такие, что $d_m \to d$ слабо в X^* и в то же время $\overline{\lim}_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - v\rangle_X \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - v\rangle_X \le 0$. Однако оператор A — λ_0-псевдомонотонный на W, следовательно, существуют подпоследовательности $\{y_{n_k}\}_{k\ge1} \subset \{y_m\}$ и $\{d_{n_k}\}_{k\ge1} \subset \{d_m\}$, для которых выполняется (2.2). Это доказывает данное утверждение. $\square$

Замечание 2.6. Обратим внимание на тот факт, что для классических определений (не переходя к подпоследовательностям) это утверждение не выполняется.

В работе F. Browder, P. Hess [5] представлен класс обобщенно псевдомонотонных операторов.

Определение 2.4. *Оператор $A : X \to C_v(X^*)$ называется обобщенно псевдомонотонным на W, если для каждой пары последовательностей $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset W$ и $\{d_n\}_{n\geq 1} \subset X^*$ таких, что $d_n \in A(y_n)$, $y_n \to y$ слабо в W, $d_n \to d$ $*$-слабо в X^*, из неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle d_n, y_n \rangle_X \leq \langle d, y \rangle_X \tag{2.5}$$

следует, что $d \in A(y)$ и $\langle d_n, y_n \rangle_X \to \langle d, y \rangle_X$.

Предложение 2.6. *Каждый обобщенно псевдомонотонный на W оператор является λ_0-псевдомонотонным на W.*

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в W, $A(y_n) \ni d_n \to d$ $*$-слабо в X^* и справедливо неравенство (2.5) (заметим, что в этом случае справедливо неравенство (2.1)). Тогда, в силу обобщенной псевдомонотонности A, $\langle d_n, y_n \rangle_X \to \langle d, y \rangle_X$, $d \in A(y)$. Следовательно, в силу предложения 2.1, $\varliminf_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - v \rangle_X = \langle d, y - v \rangle_X \geq [A(y), y - v]_- \quad \forall\, v \in X$. □

Предложение 2.7. *Пусть $A = A_0 + A_1 : X \rightrightarrows X^*$, где $A_0 : X \rightrightarrows X^*$ — монотонное отображение, а оператор $A_1 : X \rightrightarrows X^*$ обладает следующими свойствами:*

1) *существует линейное нормированное пространство Z, в которое W компактно и плотно вложено, а вложение $X \subset Z$ является непрерывным и плотным;*

2) *оператор $A_1 : Z \rightrightarrows Z^*$ однозначный и локально полиномиальный, т.е. $\forall\, R > 0$ существует $n = n(R)$ и полином $P_R(t) = \sum_{0<\alpha\leq n} \lambda_\alpha(R) t^\alpha$ с непрерывными коэффициентами $\lambda_\alpha(R) \geq 0$, для которого справедлива оценка*

$$\|A_1(y_1) - A_1(y_2)\|_+^{(Z^*)} \leq P_R\left(\|y_1 - y_2\|_Z\right) \quad \forall\, \|y_i\|_Z \leq R,\ i = 1, 2.$$

Тогда A — оператор с полуограниченной вариацией на W.

Предложение 2.8. *Пусть в предыдущем предложении оператор $A_0 : X \rightrightarrows X^*$ — N-монотонный, и вместо условия* 2) *выполнено следующее:*

2′) *отображение (многозначное) $A_1 : Z \rightrightarrows Z^*$ локально полиномиальное в том смысле, что $\forall\, R > 0$ существует $n = n(R)$ и полином $P_R(t)$, для которых*

$$\operatorname{dist}\left(A_1(y_1), A_1(y_2)\right) \leq P_R\left(\|y_1 - y_2\|_Z\right) \quad \forall\, \|y_i\|_Z \leq R,\ i = 1, 2. \tag{2.6}$$

Тогда $A = A_0 + A_1$ *— оператор с* N*-полуограниченной вариацией на* W*.*

Доказательство. Докажем предложение 2.8. Доказательство предложения 2.7 аналогично. Поскольку для любых $y_1, y_2 \in X$ $[A_0(y_1), y_1 - y_2]_- \geq [A_0(y_2), y_1 - y_2]_-$, то необходимо оценить $[A_1(y_1), y_1 - y_2]_- - [A_1(y_2), y_1 - y_2]_-$. Для любых $d_1 \in A_1(y_1)$, $d_2 \in A_1(y_2)$ находим, что $\langle d_2, y_1 - y_2\rangle_X - \langle d_1, y_1 - y_2\rangle_X = \langle d_2, y_1 - y_2\rangle_Z - \langle d_1, y_1 - y_2\rangle_Z \leq \|d_1 - d_2\|_{Z^*} \|y_1 - y_2\|_Z$. Следовательно,

$$[A_1(y_2), y_1 - y_2]_- - [A_1(y_1), y_1 - y_2]_- \\ \leq \operatorname{dist}(A_1(y_1), A_1(y_2)) \|y_1 - y_2\|_Z .$$

Отсюда и из оценки (2.6) для $\|y_i\|_Z \leq R$ $(i = 1, 2)$ (соответственно $\|y_i\|_X \leq \hat{R}$, $R = R(\hat{R})$) получим $[A_1(y_1), y_1 - y_2]_- \geq [A_1(y_2), y_1 - y_2]_- - C(\hat{R}; \|y_1 - y_2\|'_W)$. Здесь $\|\cdot\|'_W = \|\cdot\|_Z$, $C(R, t) = P_R(t)\, t$. Легко проверить, что $C \in \Phi$. □

Предложение 2.9. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

1) $A : X \rightrightarrows X^*$ *— радиально полунепрерывный снизу оператор с полуограниченной вариацией на* W*;*

2) $A : X \rightrightarrows X^*$ *— радиально непрерывный сверху оператор с* N*-полуограниченной вариацией на* W *и с компактными значениями в* X^**.*

Тогда A *является* λ_0*-псевдомонотонным на* W *отображением.*

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в W, $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_n) \ni d_n \to d$ $*$-слабо в X^* и справедливо (2.1). Используя свойство полуограниченности вариации на W оператора A, имеем, что для каждого $v \in X$ $\langle d_n, y_n - v\rangle_X \geq [A(y_n), y_n - v]_- \geq [A(v), y_n - v]_+ - C(R; \|y_n - v\|'_W)$. Функционал $X \ni w \mapsto [A(v), w]_+$ выпуклый и полунепрерывный снизу, поэтому он является слабо полунепрерывным снизу. Следовательно, заменяя в последнем неравенстве v на y и переходя к пределу, в силу свойств функции C, получаем, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \geq 0$, т.е. $\langle d_n, y_n - y\rangle_X \to 0$.

Для любых $h \in X$ и $\tau \in [0, 1]$ пусть $\omega_\tau = \tau h + (1 - \tau)\, y$. Тогда $\langle d_n, y_n - \omega_\tau\rangle_X \geq [A(\omega_\tau), y_n - \omega_\tau]_+ - C(R; \|y_n - \omega_\tau\|'_W)$ или, перейдя к пределу при $n \to \infty$, $\tau\, \underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y - h\rangle_X \geq \tau\, [A(w_\tau), y - h]_+ - C(R; \tau\, \|y - h\|'_W)$. Разделив последнее неравенство на τ и перейдя к пределу при $\tau \to 0+$, в силу радиальной полунепрерывности снизу оператора A и свойств функции C, получим, что для любого $h \in X$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y - h\rangle_X \geq \underline{\lim}_{\tau\to+0} [A(\omega_\tau), y - h]_+ + \lim_{\tau\to+0} \frac{1}{\tau} C(R; \tau\|y - h\|'_W) \geq [A(y), y - h]_-$. Более того, поскольку $\langle d_n, y_n - y\rangle_X \to 0$, то $\underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - h\rangle_X = \underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y - h\rangle_X \geq [A(y), y - h]_- \;\; \forall\, h \in X$, что и доказывает первое утверждение предложения 2.9.

Теперь остановимся на базовых моментах доказательства второго утверждения. Из N-полуограниченности вариации оператора A получаем, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - v\rangle_X \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} [A(y_n), y_n - v]_- \\ \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} [A(v), y_n - v]_- - C\big(R; \|y - v\|'_W\big). \quad (2.7)$$

Оценим первый член правой части (2.7). Докажем, что функционал $X \ni h \mapsto [A(v), h]_-$ является слабо полунепрерывным снизу $\forall\, v \in X$. Пусть $z_n \to z$ слабо в X. Тогда для каждого $n \geq 1$ следует существование $\xi_n \in \overset{*}{\overline{co}}\, A(v)$ такого, что $[A(v), z_n]_- = \langle \xi_n, z_n\rangle_X$. Из последовательности $\{\xi_n; z_n\}$ выделим подпоследовательность $\{\xi_m; z_m\}$ такую, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} [A(v), z_n]_- = \underline{\lim}_{n\to\infty} \langle \xi_n, z_n\rangle_X = \lim_{m\to\infty} \langle \xi_m, z_m\rangle_X$ и, благодаря компактности множества $\overset{*}{\overline{co}}\, A(v)$ находим, что $\xi_m \to \xi$ сильно в X^* с $\xi \in \overset{*}{\overline{co}}\, A(v)$. Следовательно, $\underline{\lim}_{n\to\infty} [A(v), z_n]_- = \lim_{n\to\infty} \langle \xi_m, z_m\rangle_X = \langle \xi, z\rangle_X = [A(v), z]_-$, что и доказывает слабую полунепрерывность снизу функционала $h \mapsto [A(v), h]_-$.

Поэтому, из (2.7) получим, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - v\rangle_X \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} [A(y_n), y_n - v]_- \\ \geq [A(v), y - v]_- - C\left(R; \|y - v\|'_W\right).$$

Тогда, заменяя в последнем неравенстве v на y, получим, что $\langle d_n, y_n - y\rangle_X \to 0$. Следовательно,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - v\rangle_X \geq [A(v), v - w]_- - C\big(R; \|y - v\|'_X\big) \qquad \forall\, v \in X.$$

Заменяя в последнем неравенстве v на $tw + (1-t)\,y$, где $w \in X$, $t \in [0,1]$, разделив результат на t и переходя к пределу при $t \to +0$, в силу радиальной полунепрерывности сверху отображения A, находим, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - w\rangle_X \geq [A(y), y - w]_- \;\; \forall\, w \in X$.

Предложение доказано. □

Определение 2.5. *Многозначное отображение $A : X \rightrightarrows X^*$ называется:*

- *s-радиально полунепрерывным снизу на W, если для фиксированных $y,\,\xi\in W$ и для любого селектора $d\in\overline{co}^*A$ $\varliminf_{t\to+0}\langle d(y-t\xi),\xi\rangle_X\geq[A(y),\xi]_-$;*

- *s_{λ_0}-псевдомонотонным на W, если для каждой $\{y_n\}_{n\geq0}\subset W$ такой, что $y_n\rightharpoonup y_0$ в W, $\overline{co}^*A(y_n)\ni d_n\rightharpoonup d_0$ в X^*, из неравенства (2.1) следует существование $\{y_{n_k}\}_{k\geq1}$ из $\{y_n\}_{n\geq1}$ и $\{d_{n_k}\}_{k\geq1}$ из $\{d_n\}_{n\geq1}$ таких, что $\langle d_{n_k},y_{n_k}-y_0\rangle_X\to0$ при $k\to\infty$ и $d_0\in\overline{co}^*A(y)$.*

Определение 2.6. *Многозначное отображение $A:X\rightrightarrows X^*$ называется оператором вариационного исчисления на W, если оно представляется в форме $A(y)=\widehat{A}(y,y)$, где отображение $\widehat{A}:X\times X\rightrightarrows X^*$ обладает следующими свойствами:*

a) $\forall\,\xi\in W$ $\widehat{A}(\xi,\cdot):X\rightrightarrows X^*$ — s-радиально полунепрерывный снизу оператор с $(X;W)$-полуограниченной вариацией ($(X;W)$-п.о.в.);

b) $\forall\,\xi\in W$ отображение $W\ni y\to\widehat{A}(y,\xi)\subset X^*$ слабо предкомпактно, т.е. для каждого множества B, ограниченного в W, множество $\overline{co}^*\widehat{A}(B,\omega)$ компактно в $\sigma(X^*;X)$-топологии пространства X (следовательно, если $\{y_n\}$ любая ограниченная в W последовательность, $d\in\overline{co}^*\widehat{A}(\cdot,\omega)$ — некоторый селектор ($d_n=d(y_n,\omega)\in\overline{co}^*\widehat{A}(y_n,\omega)$), тогда можно выделить такие подпоследовательности $\{y_m\}\subset\{y_n\}$ и $\{d_m\}\subset\{d_n\}$, что $d_m=d(y_m,\omega)\to\text{æ}(\omega)$ $*$-слабо в X^*);

c) пусть $y_n\to y$ слабо в W и для некоторого селектора $d\in\overline{co}^*\widehat{A}$ выполняется $\langle d(y_n,y_n)-d(y_n,y),y_n-y\rangle_X\to0$, где $d(y_n,y_n)\in\overline{co}^*\widehat{A}(y_n,y_n)$, $d(y_n,y)\in\overline{co}^*\widehat{A}(y_n,y)$. Тогда существует $\{y_m\}\subset\{y_n\}$ такая, что $\forall\,\xi\in W$ $d(y_m,\xi)\to\chi$ $*$-слабо в X^*, где $\chi\in\overline{co}^*\widehat{A}(y,\omega)$;

d) если $y_n\to y$ слабо в W и для некоторого $\xi\in W$ $d(y_n,\xi)\to\chi$ $*$-слабо в X^*, где $d(y_n,\xi)\in\overline{co}^*\widehat{A}(y_n,\xi)$, тогда $\langle d(y_n,\xi),y_n\rangle_X\to\langle\chi,y\rangle_X$.

Предложение 2.10. *Для многозначного отображения $A:X\rightrightarrows X^*$ справедливы такие импликации: “A — s-радиально полунепрерывный снизу оператор с $(X;W)$-п.о.в.” $\stackrel{1}{\Rightarrow}$ “A является оператором вариационного исчисления на W” $\stackrel{2}{\Rightarrow}$ “A является λ-псевдомонотонным на W” $\stackrel{3}{\Rightarrow}$“$A$ является λ_0-псевдомонотонным на W” $\stackrel{4}{\Rightarrow}$ “A является s_{λ_0}-псевдомонотонным на W” $\stackrel{5}{\Rightarrow}$ “A удовлетворяет условию (M) на W [23]”.*

Доказательство. Рассмотрим первую импликацию. Пусть $\widehat{A} : X \times X \rightrightarrows X^*$ определяется соотношениями:

$$\widehat{A}(v, y) = \widehat{A}(\omega, y), \ \widehat{A}(y, y) = A(y) \qquad \forall\, v, \omega, y \in X,$$

т.е. он является постоянным отображением по первому аргументу, при фиксированном втором. Проверим условия определения 2.6.

Условие a) очевидно. Условие b) следует из того, что $\widehat{A}(\cdot, \omega) : W \rightrightarrows X^*$ — постоянное отображение для каждого $\omega \in W$. Следовательно, $\widehat{A}(B, \omega) = A(\omega)$ — ограниченное множество в X^* для каждого $B \subset W$. Следовательно, в силу теоремы Банаха–Алаоглу, $\overline{co}^* \widehat{A}(B, \omega)$ — компактное множество в $*$-слабой топологии пространства X^*. Проверим условие c). Пусть $y_n \rightharpoonup y$ в W и $d(y_n, y_n) - d(y_n, y), y_n - y\rangle_X \to 0$ с некоторым селектором $d \in \overline{co}^* \widehat{A}$, где для каждого $\omega \in W$ $æ(v) = d(y_n, v) \in \overline{co}^* \widehat{A}(y_n, v) = \overline{co}^* A(v)$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ такая, что $æ(v) = d(y_n, v) \to æ(v)$ $*$-слабо в X^*. Более того, $æ(v) \stackrel{\triangle}{=} d(y, v) \in \overline{co}^* \widehat{A}(y, v) = \overline{co}^* A(v)$.

Условие d). Пусть $y_n \rightharpoonup y$ в W и для каждого $v \in W$, для каждого селектора $d \in \overline{co}^* A$ $æ(v) = d(y_n, v) \in \overline{co}^* \widehat{A}(y_n, v)$, т.е. $d(y_n, v) \to æ(v)$ $*$-слабо в X^*. Следовательно, $\langle d(y_n, v), y_n\rangle_X = \langle æ(v), y_n\rangle_X = \langle æ(v), y\rangle_X$, что доказывает первую импликацию.

Теперь рассмотрим вторую импликацию. Пусть $y_n \rightharpoonup y$ в W и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \le 0, \tag{2.8}$$

где $d_n = g(y_n)$, $g \in \overline{co}^* A$ — некоторый селектор, и $A(y) = \widehat{A}(y, y)$, $\widehat{A} : X \times X \rightrightarrows X^*$. В силу условия b) существует подпоследовательность $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ такая, что $g(y_m, y) \to f(y)$ $*$-слабо в X^*. По условию d) $\langle g(y_m, y), y_m\rangle_X \to \langle f(y), y\rangle_X$. Следовательно,

$$\langle g(y_m, y), y_m - y\rangle_X \to 0. \tag{2.9}$$

Из (2.8) находим, что $\varlimsup_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - y\rangle_X \le \varlimsup_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \le 0$, т.е.

$$\varlimsup_{m\to\infty} \langle d_m - g(y_m, y), y_m - y\rangle_X = \varlimsup_{m\to\infty} \langle g(y_m, y_m) - g(y_m, y), y_m - y\rangle_X. \tag{2.10}$$

В силу условия а) $\langle g(y_m, y_m), y_m - y\rangle_X \ge \langle g(y_m, y), y_m - y\rangle_X - C(R; \|y_m - y\|'_W)$. Следовательно, из (2.9) и из свойств действительной функции C, получаем оценку $\varliminf_{m\to\infty} \langle g(y_m, y_m) - g(y_m, y), y_m - y\rangle_X \ge 0$. Неравенство (2.10) дает

$$\langle g(y_m, y_m) - g(y_m, y), y_m - y\rangle_X \to 0. \tag{2.11}$$

В силу условия c) для каждого $v \in W$ $g(y_m, v) \to æ(y, v) \in \overline{co}^* \widehat{A}(y, v)$ $*$-слабо в X^*. Благодаря условию d) получаем

$$\langle g(y_m, v), y_m - y\rangle_X \to 0, \tag{2.12}$$

поскольку $\langle g(y_m, v), y_m\rangle_X \to \langle æ(y, v), y\rangle_X$. Далее, для любых $\omega \in W$ и $\tau \in [0, 1]$ пусть $v(\tau) = y + \tau(\omega - y)$. Тогда из условия a)

$$\begin{aligned}\tau\langle g(y_m, y_m), y - v\rangle_X &\geq [\widehat{A}(y_m, v(\tau)), y_m - v(\tau)]_+ \\ &\quad - \langle g(y_m, y_m), y_m - y\rangle_X - C(R; \|y_m - v(\tau)\|'_W) \\ &\geq [\widehat{A}(y_m, v(\tau)), y_m - y]_- + \tau[\widehat{A}(y_m, v(\tau)), y - \omega]_+ \\ &\quad - \langle g(y_m, y_m), y_m - y\rangle_X - C(R; \|y_m - v(\tau)\|'_W).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Для каждого m существует $\xi_m \in \overline{co}^* \widehat{A}(y_m, v(\tau))$ такое, что $[\widehat{A}(y_m, v(\tau)), y_m - y]_- = \langle \xi_m, y_m - y\rangle_X$, т.е. существует селектор $r \in \overline{co}^* \widehat{A}$ такой, что $\xi_m = r(y_m, v(\tau))$. К тому же, (условие b)) мы можем заключить, что $r(y_m, v(\tau)) \to \xi(y, v(\tau))$ $*$-слабо в X^* (иначе мы переходим к подпоследовательности) и также (условие d)) $\langle r(y_m, v(\tau)), y_m - y\rangle_X \to 0$ или $[\widehat{A}(y_m, v(\tau)), y_m - y]_- \to 0$. Следовательно, переходя к пределу в (2.13) при $m \to \infty$, получим

$$\begin{aligned}&\tau \varliminf_{m\to\infty} \langle g(y_m, y_m), y - v\rangle_X \\ &\qquad \geq \tau \varliminf_{m\to\infty} [\widehat{A}(y_m, v(\tau)), y - \omega]_+ - C(R; \tau\|y - \omega\|'_W),\end{aligned}$$

соответственно, благодаря (2.11),

$$\begin{aligned}&\tau \varliminf_{m\to\infty} \langle g(y_m, y_m), y_m - v\rangle_X \\ &\qquad \geq \tau \varliminf_{m\to\infty} [\widehat{A}(y_m, v(\tau)), y - \omega]_+ - C(R; \tau\|y - \omega\|'_W) \\ &\qquad\qquad \geq \tau \lim_{m\to\infty} \langle g(y_m, v(\tau)), y - v\rangle_X - C(R; \tau\|y - \omega\|'_W).\end{aligned}$$

Благодаря условиям b) и c) можем считать, что $g(y_m, v(\tau)) \to æ(y, v(t)) \in \overline{co}^* \widehat{A}(y, v(\tau))$ $*$-слабо в X^*. Поэтому,

$$\tau \varliminf_{m\to\infty} \langle g(y_m, y_m), y_m - v\rangle_X \geq \tau\langle æ(y, v(t)), y - v\rangle_X - C(R; \tau\|y - \omega\|'_W).$$

Если мы поделим последнее неравенство на τ и перейдем к пределу при $\tau \to 0+$, в силу s-радиальной полунепрерывности снизу оператора $\widehat{A}(y, \cdot) : W \rightrightarrows W^*$, в результате получим

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - \omega\rangle_X = \underline{\lim}_{m\to\infty} \langle g(y_m, y_m), y_m - \omega\rangle_X$$
$$\geq [\widehat{A}(y,y), y-\omega]_- = [A(y), y-\omega]_- \quad \forall\, \omega \in W,$$

что доказывает вторую импликацию.

Третья импликация очевидна. Рассмотрим четвертую импликацию. Пусть $y_n \rightharpoonup y$ в W, $\overline{co}^* A(y_n) \ni d_n \to d$ $*$-слабо в X^* и $\overline{\lim}_{n\to\infty}\langle d_n, y_n - y\rangle_X \leq 0$. Тогда, в силу λ_0-псевдомонотонности A на W существуют такие подпоследовательности $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ и $\{d_m\} \subset \{d_n\}$, что выполняется неравенство (2.2). Следовательно, $\lim_{m\to\infty}\langle d_m, y_m - y\rangle_X = 0$, или $\lim_{m\to\infty}\langle d_m, y_m\rangle_X = \langle d, y\rangle_X$. К тому же, из (2.2) находим

$$\langle d, y - v\rangle_X = \underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - v\rangle_X \geq [A(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X,$$

т.е. $\langle d, \omega\rangle_X \geq [A(y), \omega]_-$ $\forall\, \omega \in X$. Поскольку множество $A(y)$ ограниченно в X^*, то $d \in \overline{co}^* A(y)$.

Импликация 5 проверяется непосредственно. Предложение доказано. □

Предложение 2.11. *Пусть $A : X \rightrightarrows X^*$ — λ_0-псевдомонотонный на W оператор, и пусть отображение $B : X \rightrightarrows X^*$ обладает следующими свойствами:*

1. *Отображение $\overline{co}^* B : W \rightrightarrows X^*$ компактно, т.е. образ ограниченного множества в W является предкомпактным в X^*;*

2. *График $\overline{co}^* B$ замкнут в $W_w \times X^*$ (т.е. относительно слабой топологии в W и сильной топологии в X^*).*

Тогда отображение $C = A + B$ — λ_0-псевдомонотонное на W.

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в W, $d_n \in \overline{co}^* C(y_n)$, $d_n \to d$ $*$-слабо в X^* и
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \leq 0.$$
Так как оператор $B : W \rightrightarrows X^*$ ограничен, то $\overline{co}^* C = \overline{co}^* A + \overline{co}^* B$. Следовательно $d_n = d_n' + d_n''$, $d_n' \in \overline{co}^* A(y_n)$, $d_n'' \in \overline{co}^* B(y_n)$. В силу ограниченности B, получим, что $d_n^{''} \to d^{''}$ $*$-слабо в X^*, так что $d_n' \to d^{'} = d - d^{''}$ $*$-слабо в X^*.

Из неравенства (2.1), переходя к подпоследовательности $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, находим

$$0 \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \left\langle d_n', y_n - y\right\rangle_X + \underline{\lim}_{n\to\infty} \left\langle d_n'', y_n - y\right\rangle_X$$

$$\geq \overline{\lim_{m\to\infty}}\langle d_m^{'}, y_m - y\rangle_X + \lim_{m\to\infty}\langle d_m'', y_m - y\rangle_X. \quad (2.14)$$

Поскольку отображение $\overline{co}^*B$ — компактное, а график замкнут в $W_w \times X^*$, мы можем считать, что $d_m^{''} \to d^{''}$ сильно в X^* и, более того, $d^{''} \in \overline{co}^*B(y)$. Тогда $\overline{\lim}_{m\to\infty}\langle d_m^{'}, y_m - y\rangle_X \leq 0$. Снова, переходя к подпоследовательностям, так как A — λ_0-псевдомонотонный, мы получим $\underline{\lim}_{m\to\infty}\langle d_m^{'}, y_m - v\rangle_X \geq [A(y), y - v]_-$, $\forall\, v \in X$, и тогда $\underline{\lim}_{m\to\infty}\langle d_m, y_m - v\rangle_X = \underline{\lim}_{m\to\infty}\langle d_m', y_m - v\rangle_X + \lim_{m\to\infty}\langle d_m'', y_m - v\rangle_X \geq [\overline{co}^*A(y), y - v]_- + \langle d'', y - v\rangle_X \geq [\overline{co}^*C(y), y - v]_-$, $\forall\, v \in X$. □

Предложение 2.12. *Пусть $A : X \rightrightarrows X^*$ — λ_0-псевдомонотонный оператор на W, вложение W в банахово пространство Y компактное и плотное, вложение X в Y непрерывное и плотное, и пусть $\overline{co}^*B : Y \rightrightarrows Y^*$ — локально ограниченное отображение такое, что график $\overline{co}^*B$ замкнут в $Y \times Y_w^*$ (т.е. относительно сильной топологии в Y и $*$-слабой топологии в Y^*). Тогда $C = A + B$ — λ_0-псевдомонотонное на W отображение.*

Доказательство. Пусть выполняется (2.1). Оператор $\overline{co}^*B$ локально ограничен, т.е. для всех $y \in Y$ существуют $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\|\overline{co}^*B(\xi)\|_+ \leq N$, при $\|\xi - y\|_Y \leq \varepsilon$. Очевидно, что локально ограниченный оператор имеет ограниченные значения. К тому же, $\overline{co}^*C(y) = \overline{co}^*A(y) + \overline{co}^*B(y)$ и $d_n = d_n' + d_n''$, $d_n' \in \overline{co}^*A(y_n)$, $d_n'' \in \overline{co}^*B(y_n)$. Поскольку вложение $W \subset Y$ компактно, имеем, что $y_n \to y$ сильно в Y и, в силу локальной ограниченности $\overline{co}^*B$, последовательность $\{d_n''\}$ ограничена в Y^* (следовательно, и в X^*). Это означает, что найдется подпоследовательность $\{d_m''\} \subset \{d_n''\}$ такая, что $d_m'' \to d''$ $*$-слабо в Y^*. Оператор вложения $I^* : Y^* \to X^*$ непрерывный, поэтому I^* остается непрерывным и в $*$-слабых топологиях [25]. Следовательно, $d_m'' \to d''$ $*$-слабо в X^*, $d_m' = d_m - d_m'' \to d^{'} = d - d''$ $*$-слабо в X^*. К тому же $\langle d_m'', y_m - y\rangle_X \to 0$. Тогда из (2.14) получим $\overline{\lim}_{m\to\infty}\langle d_m', y_m - v\rangle_X \leq 0$. После перехода к подпоследовательностям получим, что $\underline{\lim}_{m_k\to\infty}\left\langle d_{m_k}', y_{m_k} - v\right\rangle_X \geq [\overline{co}^*A(y, y - v)]_-$, $\forall\, v \in X$. Далее, поскольку оператор $\overline{co}^*B$ замкнут в $Y \times Y_w^*$, то $d'' \in \overline{co}^*B(y)$ и

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{m_k\to\infty}\langle d_{m_k}, y_{m_k} - v\rangle_X &= \underline{\lim}_{m_k\to\infty}\left\langle d_{m_k}', y_{m_k} - v\right\rangle_X \\ &+ \lim_{m_k\to\infty}\left\langle d_{m_k}'', y_{m_k} - v\right\rangle_X \geq [\overline{co}^*A(y), y - v]_- \\ &+ [\overline{co}^*B(y), y - v]_- = [\overline{co}^*C(y), y - v]_-, \quad \forall\, v \in X.\end{aligned}$$

Предложение доказано. □

Теперь рассмотрим функционал $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$.

Определение 2.7. *Функционал φ является локально липшицевым, если для любого $x_0 \in X$ существуют $r, c > 0$ такие, что*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c\|x-y\|_X \qquad \forall\, x, y \in B_r(x_0) = \{x \in X \,|\, \|x - x_0\|_X < r\}.$$

Для локально липшицевых функционалов φ, определенных в банаховом пространстве X, рассмотрим *верхнюю производную Кларка* [7]

$$\varphi^{\uparrow}_{Cl}(x, h) = \overline{\lim_{v \to x,\, \alpha \searrow 0+}} \frac{1}{\alpha}(\varphi(v + \alpha h) - \varphi(v)) \in \mathbb{R}, \quad x, h \in X$$

и *обобщенный градиент Кларка*

$$\partial_{Cl}\varphi(x) = \big\{p \in X^* \,|\, \langle p, v - x\rangle_X \leq \varphi^{\uparrow}_{Cl}(x, v - x) \quad \forall\, v \in X\big\}, \qquad x \in X.$$

Предложение 2.13. *Пусть W — банахово пространство, компактно вложенное в некоторое банахово пространство Y, $\varphi : Y \mapsto \mathbb{R}$ — локально липшицевый функционал. Тогда обобщенный градиент Кларка $\partial_{Cl}\varphi : Y \rightrightarrows Y^*$ является λ_0-псевдомонотонным на W.*

Доказательство. Из исчисления обобщенного градиента Кларка (см. [7, гл. 2]) следует, что $\partial_{Cl}\varphi(x)$ непустое, замкнутое, ограниченное и выпуклое множество. Следовательно, для каждого $x \in Y$ $\partial_{Cl}\varphi(x) \in C_v(Y^*)$.

Теперь пусть $\{y_n\}_{n\geq 0} \subset W$ – такая последовательность, что $y_n \rightharpoonup y_0$ в W, $d_n \rightharpoonup d_0$ в Y^*, где $d_n \in \partial_{Cl}\varphi(y_n)$ $\forall\, n \geq 1$ и справедливо неравенство (2.1). В силу компактного вложения $W \subset Y$ заключаем, что $y_n \to y_0$ в Y. Поскольку график отображения $\partial_{Cl}\varphi : Y \rightrightarrows Y^*$ замкнут в $Y \times Y^*_w$ (см. [7, с. 29]), то $d_0 \in \partial_{Cl}\varphi(y_0)$. Поэтому, $\underline{\lim}_{n\to\infty}\langle d_n, y_n - \omega\rangle_Y \geq \underline{\lim}_{n\to\infty}\langle d_n, y_n - y_0\rangle_Y + \underline{\lim}_{n\to\infty}\langle d_n, y_0 - \omega\rangle_Y = 0 + \langle d_0, y_0 - \omega\rangle_Y \geq [\partial_{Cl}\varphi(y_0), y_0 - \omega]_-$ $\forall\, \omega \in Y$, что завершает доказательство. □

Теперь пусть $W = W_1 \cap W_2$, где $(W_1, \|\cdot\|_{W_1})$ и $(W_2, \|\cdot\|_{W_2})$ — банаховы пространства такие, что вложение $W_i \subset X_i$ непрерывно.

Лемма 2.4. *Пусть X_1, X_2 — рефлексивные банаховы пространства, $A : X_1 \to C_v(X_1^*)$ и $B : X_2 \to C_v(X_2^*)$ — s-взаимно ограничены λ_0-псевдомонотонные соответственно на W_1 и на W_2 многозначные отображения. Тогда $C := A + B : X \to C_v(X^*)$ — λ_0-псевдомонотонное на W отображение.*

Доказательство. Сначала проверим, что $\forall\, y \in X$ $C(y) \in C_v(X^*)$. Выпуклость $C(y)$ следует из такого же свойства для $A(y)$ и $B(y)$. В силу теоремы Мазура, достаточно доказать, что множество $C(y)$ слабо замкнуто. Пусть c — предельная точка $C(y)$ относительно топологии $\sigma(X^*; X^{**}) = \sigma(X^*; X)$ (пространство X — рефлексивное). Тогда $\exists$, $\{c_m\}_{m\geq 1} \subset C(y)$: $c_m \to c$ слабо в X^* при $m \to +\infty$. Отсюда, поскольку отображения A и B имеют ограниченные значения, то, в силу теоремы Банаха–Алаоглу, можем предположить, что для каждого $m \geq 1$ существуют $v_m \in A(y)$ и $w_m \in B(y)$ такие, что $v_m + w_m = c_m$. Переходя (если это необходимо) к подпоследовательностям, получим, что $v_m \rightharpoonup v$ в X_1^* и $w_m \rightharpoonup w$ в X_2^* для некоторых $v \in A(y)$ и $w \in B(y)$. Следовательно, $c = v + w \in C(y)$. Таким образом доказано, что множество $C(y)$ слабо замкнуто в X^*.

Теперь пусть $y_n \rightharpoonup y_0$ в W (отсюда следует, что $y_n \rightharpoonup y_0$ в W_1 и $y_n \rightharpoonup y_0$ в W_2), $C(y_n) \ni d(y_n) \rightharpoonup d_0$ в X^* и выполняется неравенство (2.1). Следовательно, $d_A(y_n) \in A(y_n)$ и $d_B(y_n) \in B(y_n)$: $d_A(y_n) + d_B(y_n) = d(y_n)$. Поскольку пара $(A; B)$ является s-взаимно ограниченной, то из оценки

$$\begin{aligned}\langle d(y_n), y_n\rangle_X &= \langle d_A(y_n) + d_B(y_n), y_n\rangle_X \\ &= \langle d_A(y_n), y_n\rangle_{X_1} + \langle d_B(y_n), y_n\rangle_{X_2} \leq k\end{aligned}$$

имеем, что либо $\|d_A(y_n)\|_{X_1^*} \leq C$, либо $\|d_B(y_n)\|_{X_2^*} \leq C$. Тогда, в силу рефлексивности X_1 и X_2, переходя (если это необходимо) к подпоследовательности, получим

$$d_A(y_n) \rightharpoonup d_0' \text{ в } X_1^* \quad \text{и} \quad d_B(y_n) \rightharpoonup d_0'' \text{ в } X_2^*. \tag{2.15}$$

Из неравенства (2.1) заключаем

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} \langle d_B(y_n), y_n - y_0\rangle_{X_2} &+ \varlimsup_{n\to\infty} \langle d_A(y_n), y_n - y_0\rangle_{X_1} \\ &\leq \varlimsup_{n\to\infty} \langle d(y_n), y_n - y_0\rangle_X \leq 0,\end{aligned}$$

или симметрично

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} \langle d_A(y_n), y_n - y_0\rangle_{X_1} &+ \varlimsup_{n\to\infty} \langle d_B(y_n), y_n - y_0\rangle_{X_2} \\ &\leq \varlimsup_{n\to\infty} \langle d(y_n), y_n - y_0\rangle_X \leq 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим последнее неравенство. Очевидно, что существует подпоследовательность $\{y_m\}_m \subset \{y_n\}_{n\geq 1}$ такая, что

$$0 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_B(y_n), y_n - y_0\rangle_{X_2} + \underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_A(y_n), y_n - y_0\rangle_{X_1}$$
$$\geq \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_B(y_m), y_m - y_0\rangle_{X_2} + \lim_{m\to\infty} \langle d_A(y_m), y_m - y_0\rangle_{X_1}. \quad (2.16)$$

Отсюда мы получим:

$$\text{или } \lim_{m\to\infty} \langle d_A(y_m), y_m - y_0\rangle_{X_1} \leq 0, \text{ или } \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_B(y_m), y_m - y_0\rangle_{X_2} \leq 0.$$

Не теряя общности,предположим, что $\lim_{m\to\infty}\langle d_A(y_m), y_m - y_0\rangle_{X_1} \leq 0$. Тогда, вследствие (2.15) и λ_0-псевдомонотонности A на W_1, существует подпоследовательность $\{y_{m_k}\}_{k\geq 1} \subset \{y_m\}_m$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \langle d_A(y_{m_k}), y_{m_k} - v\rangle_{X_1} \;\geq\; [A(y_0), y_0 - v]_- \qquad \forall\, v \in X_1. \quad (2.17)$$

Заменяя в последнем соотношении v на y_0, придем к: $\langle d_A(y_{m_k}), y_{m_k} - y_0\rangle_{X_1} \to 0$ при $k \to +\infty$. Следовательно, принимая во внимание (2.16), имеем $\overline{\lim}_{k\to\infty}\langle d_B(y_{m_k}), y_{m_k} - y_0\rangle_{X_2} \leq 0$. В силу λ_0-псевдомонотонности B на W_2, переходя к подпоследовательности $\{y_{m'_k}\} \subset \{y_{m_k}\}_{k\geq 1}$, находим

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \langle d_B(y_{m'_k}), y_{m'_k} - w\rangle_{X_2} \geq [B(y_0), y_0 - w]_- \qquad \forall\, w \in X_2. \quad (2.18)$$

Поэтому, из соотношений (2.17) и (2.18), мы окончательно получаем:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \langle d(y_{m'_k}), y_{m'_k} - x\rangle_X \geq \lim_{k\to\infty} \langle d_A(y_{m'_k}), y_{m'_k} - x\rangle_{X_1}$$
$$+ \underline{\lim}_{k\to\infty} \langle d_B(y_{m'_k}), y_{m'_k} - x\rangle_{X_2} \geq [A(y_0), y_0 - x]_-$$
$$+ [B(y_0), y_0 - x]_- = [C(y_0), y_0 - x]_- \quad \forall\, x \in X.$$

□

Замечание 2.7. Если пара $(A; B)$ не является s-взаимно ограниченной, то последняя лемма справедлива только для λ-псевдомонотонных (соответственно на W_1 и на W_2) отображений.

3. Метод сингулярных возмущений для эволюционных включений

Пусть X — рефлексивное банахово пространство, X^* — топологически сопряженное к X, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X^* \times X \to \mathbb{R}$ — каноническое спаривание. Предположим, что $X_1; X_2$ — интерполяционная пара рефлексивных банаховых пространств такая, что $X = X_1 \cap X_2$. Тогда,

$X^* = X_1^* + X_2^*$, $\langle f, y\rangle_X = \langle f_1, y\rangle_{X_1} + \langle f_2, y\rangle_{X_2}$ $\forall f \in X^*$ $\forall y \in X$, где $f = f_1 + f_2$, $f_i \in X_i^*$, $i = 1, 2$.

Пусть $L : D(L) \subset X \to X^*$ — линейный, плотно определенный, максимально монотонный на $D(L)$ оператор, $A : X_1 \to C_v(X_1^*)$, $B : X_2 \to C_v(X_2^*)$ — многозначные отображения. Рассмотрим задачу:

$$Ly + A(y) + B(y) \ni f, \qquad y \in D(L), \tag{3.1}$$

где $f \in X^*$.

Замечание 3.1. $D(L)$ — рефлексивное банахово пространство с нормой графика $\|y\|_{D(L)} = \|y\|_X + \|Ly\|_{X^*}$ $\forall y \in D(L)$. Это условие обеспечивает максимальная монотонность L на $D(L)$ и рефлексивность X.

Рассмотрим двойственное отображение

$$J(y) = \big\{\xi \in X^* \mid \langle \xi, y\rangle_X = \|\xi\|^2_{X^*} = \|y\|^2_X\big\} \in C_v(X^*) \qquad \forall\, y \in X,$$

т.е. $J(y) = \partial(\|\cdot\|^2_X/2)(y)$ $\forall y \in X$. Это отображение определено на X и является максимально монотонным. Более того, для каждого $f \in X^*$ определено многозначное, в общем случае, отображение

$$\begin{aligned} J^{-1}(f) &= \{y \in X \mid f \in J(y)\} \\ &= \big\{y \in X \mid \langle f, y\rangle_X = \|f\|^2_{X^*} = \|y\|^2_X\big\} \in C_v(X). \end{aligned} \tag{3.2}$$

$J^{-1} : X^* \to C_v(X)$ является максимально монотонным многозначным отображением.

Будем приближать решения включения из (3.1) решениями следующих включений:

$$\varepsilon L^* J^{-1}(Ly_\varepsilon) + Ly_\varepsilon + A(y_\varepsilon) + B(y_\varepsilon) \ni f. \tag{3.3}$$

Определение 3.1. *Будем говорить, что решение* (3.1) ($y \in D(L)$) *получено методом сингулярных возмущений, если y является слабым пределом подпоследовательности $\{y_{\varepsilon_{n_k}}\}_{k\ge 1}$ из $\{y_{\varepsilon_n}\}_{n\ge 1}$ ($\varepsilon_n \searrow 0+$ при $n \to \infty$) в $D(L)$, где для каждого $n \ge 1$ $\;D(L) \ni y_{\varepsilon_n}$ является решением задачи* (3.3) *с соответствующим $\varepsilon = \varepsilon_n$.*

Теорема 3.1. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $L : D(L) \subset X \to X^*$ — линейный, плотно определенный, максимально монотонный на $D(L)$ оператор, $A : X_1 \to C_v(X_1^*)$ и $B : X_2 \to C_v(X_2^*)$ — конечномерно локально ограниченные, λ_0-псевдомонотонные на $D(L)$ многозначные отображения, удовлетворяющие условию* (П). *Кроме того, для $f \in X^*$ существует $R > 0$ такое, что*

$$[A(y), y]_+ + [B(y), y]_+ - \langle f, y\rangle_X \ge 0 \qquad \forall\, y \in X : \|y\|_X = R. \tag{3.4}$$

Тогда существует по крайней мере одно решение (3.1)*, полученное методом сингулярных возмущений.*

Доказательство. Докажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ задача (3.3) имеет по крайней мере одно решение в $D(L)$.

Для каждых $y, \omega \in D(L)$ пусть

$$\Pi_\varepsilon(y,\omega) = \varepsilon\left[L\omega, J^{-1}(Ly)\right]_+ + \langle Ly,\omega\rangle_X + [A(y),\omega]_+ \\ + [B(y),\omega]_+ - \langle f,\omega\rangle_X. \quad (3.5)$$

Для каждого $y \in D(L)$ форма $D(L) \ni \omega \to \Pi_\varepsilon(y,\omega)$ положительно однородна, выпукла и полунепрерывна снизу на $D(L)$. Следовательно, из предложения 2.1 очевидно, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\mathcal{B}_\varepsilon(y) : D(L) \to C_v\big((D(L))^*\big)$ такое, что

$$\Pi_\varepsilon(y,\omega) = [\mathcal{B}_\varepsilon(y),\omega]_+ \quad \text{для любых} \quad y,\omega \in D(L). \qquad (3.6)$$

Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $\mathcal{B}_\varepsilon : D(L) \to C_v\big((D(L))^*\big)$ является конечномерно локально ограниченным и λ_0-псевдомонотонным на $D(L)$.

Действительно, для каждого $y \in D(L)$ форма $D(L) \ni \omega \to \varepsilon[L\omega, J^{-1}(Ly)]_+ + \langle Ly,\omega\rangle_X$ положительно однородная, выпуклая и полунепрерывная снизу на $D(L)$. Тогда, в силу предложения 2.1, корректно определено многозначное отображение $\mathcal{M}_\varepsilon : D(L) \to C_v\big((D(L))^*\big)$. Оно задается по правилу

$$[\mathcal{M}_\varepsilon(y), v]_+ = \varepsilon[Lv, J^{-1}(Ly)]_+ + \langle Ly, v\rangle_X \qquad \forall\, y, v \in D(L). \qquad (3.7)$$

Заметим, что $\mathcal{M}_\varepsilon$ имеет ограниченные значения, потому что для любых $y, v \in D(L)$ правая часть последнего равенства ограничена сверху.

Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $\mathcal{M}_\varepsilon$ монотонное, ограниченное и хеминепрерывное на $D(L)$.

Сначала докажем монотонность $\mathcal{M}_\varepsilon$. Из равенства (3.7) и предложения 2.1, для любых $y_1, y_2 \in D(L)$ получим:

$$[\mathcal{M}_\varepsilon(y_1), y_1 - y_2]_- = \varepsilon\left[Ly_1 - Ly_2, J^{-1}(Ly_1)\right]_- + \langle Ly_1, y_1 - y_2\rangle_X,$$
$$[\mathcal{M}_\varepsilon(y_2), y_1 - y_2]_+ = \varepsilon\left[Ly_1 - Ly_2, J^{-1}(Ly_2)\right]_+ + \langle Ly_2, y_1 - y_2\rangle_X.$$

Поскольку J^{-1} монотонное отображение и L положительное, то, сравнивая последние два равенства, получим

$$[\mathcal{M}_\varepsilon(y_1), y_1 - y_2]_- \ge [\mathcal{M}_\varepsilon(y_2), y_1 - y_2]_+ \qquad \forall\, y_1, y_2 \in D(L),$$

откуда следует монотонность $\mathcal{M}_\varepsilon$ на $D(L)$.

Теперь докажем хеминепрерывность $\mathcal{M}_\varepsilon$ на $D(L)$. Получим это утверждение методом от противного. Пусть $\omega \in D(L)$, $y_n \to y$ в $D(L)$ и $\beta > 0$ такие, что

$$\forall\, n \geq 1 \quad [\mathcal{M}_\varepsilon(y_n), \omega]_+ \geq \beta + [\mathcal{M}_\varepsilon(y), \omega]_+ . \tag{3.8}$$

Заметим, что $[\mathcal{M}_\varepsilon(y_n), \omega]_+ = \langle Ly_n, \omega\rangle_X + \varepsilon \left[L\omega, J^{-1}(Ly_n)\right]_+ \forall\, n \geq 1$. В силу предложения 2.1 для каждого $n \geq 1$ существует $l_n = l_n(\omega) \in J^{-1}(Ly_n)$ такое, что $\left[L\omega, J^{-1}(Ly_n)\right]_+ = \langle L\omega, l_n\rangle_X$. Следовательно, для каждого $n \geq 1$ существует $m_{\varepsilon n} = m_{\varepsilon n}(\omega) \in \mathcal{M}_\varepsilon(y_n)$ такое, что $\langle m_{\varepsilon n}, \omega\rangle_{D(L)} = \langle Ly_n, \omega\rangle_X + \varepsilon\langle L\omega, l_n\rangle_X = [\mathcal{M}_\varepsilon(y_n), \omega]_+$. В силу ограниченности J^{-1} и предложения 2.1,

$$Ly_n \to Ly \quad \text{в} \quad X^* \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{3.9}$$

Поэтому, в силу теоремы Банаха–Алаоглу, существует подпоследовательность $\{l_{n_m}\}_{m\geq 1} \subset \{l_n\}_{n\geq 1}$ такая, что

$$l_{n_m} \rightharpoonup l \quad \text{в} \quad X \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для некоторого} \quad l \in X. \tag{3.10}$$

Это означает, что $\overline{\lim}_{m\to\infty} \left[L\omega, J^{-1}(Ly_{n_m})\right]_+ = \langle L\omega, l\rangle_X$. Теперь докажем, что $l \in J^{-1}(Ly)$. Поскольку $l_{n_m} \in J^{-1}(y_{n_m})$, то из (3.2) следует, что для каждого $m \geq 1$ $\langle Ly_{n_m}, l_{n_m}\rangle_X = \|Ly_{n_m}\|^2_{X^*} = \|l_{n_m}\|^2_X$. Отсюда, переходя к пределу при $m \to \infty$, в силу (3.9) и (3.10), получим, что $\langle Ly, l\rangle_X = \|Ly\|^2_{X^*} \geq \|l\|^2_X$, но $\langle Ly, l\rangle_X \leq \|Ly\|_{X^*}\|l\|_X$. Поэтому, $\|Ly\|^2_{X^*} = \|l\|^2_X = \langle Ly, l\rangle_X$. В силу (3.2) это означает, что $l \in J^{-1}(Ly)$. Тогда,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \left[L\omega, J^{-1}\left(Ly_{n_m}\right)\right]_+ = \langle L\omega, l\rangle_X \leq \left[L\omega, J^{-1}\left(Ly\right)\right]_+$$

и

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{m\to\infty}} \left[M_\varepsilon\left(y_{n_m}\right), \omega\right]_+ &= \langle Ly, \omega\rangle_X + \varepsilon\langle L\omega, l\rangle_X \\ &\leq \langle Ly, \omega\rangle_X + \varepsilon\left[L\omega, J^{-1}\left(Ly\right)\right]_+ = \left[M_\varepsilon\left(y\right), \omega\right]_+ .\end{aligned}$$

Это противоречит неравенству (3.8).

Осталось доказать ограниченность M_ε на $D(L)$. В силу (3.7) и (3.2) для любого ограниченного в $D(L)$ множества $D \subset D(L)$, для любых $y \in D$ и $v \in D(L)$

$$\begin{aligned}[M_\varepsilon(y), v]_+ &\leq \varepsilon\|Lv\|_{X^*}\|J^{-1}(Ly)\|_+ + \|Ly\|_{X^*}\|v\|_X \\ &\leq \varepsilon\|v\|_{D(L)}\|Ly\|_{X^*} + \|y\|_{D(L)}\|v\|_{D(L)} \\ &\leq (\varepsilon+1)\|y\|_{D(L)}\|v\|_{D(L)} \leq (\varepsilon+1)\|D\|_+\|v\|_{D(L)} < +\infty.\end{aligned}$$

Используя теорему Банаха–Штейнгауза, получим $\|M_\varepsilon(D)\|_+ \le (\varepsilon + 1)\|D\|_+ < +\infty$.

Поскольку любое хеминепрерывное монотонное на $D(L)$ многозначное отображение является λ_0-псевдомонотонным на $D(L)$ (см. предложение 2.9), то многозначное отображение M_ε является также λ_0-псевдомонотонным на $D(L)$. Следовательно, в силу леммы 2.4 из s-взаимной ограниченности (A, B) на X, то же утверждение верно для $\mathcal{B}_\varepsilon$. Конечномерная локальная ограниченность $\mathcal{B}_\varepsilon$ следует из того же свойства для A, B и M_ε и из (3.5) и (3.6).

В силу леммы 2.4 и замечания 2.5, многозначное отображение $A + B : X \rightrightarrows X^*$ является λ_0-псевдомонотонным на $D(L)$ и удовлетворяет условию (П) на X. В силу (3.7) и (3.2) для любых $\varepsilon > 0$ и $y \in D(L)$ $[M_\varepsilon(y), y]_+ = \varepsilon[Ly, J^{-1}(Ly)]_+ + \langle Ly, y\rangle_X \ge \varepsilon\|Ly\|^2_{X^*} \ge 0$. Следовательно, вследствие предложения 2.1 и (3.4), для каждого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}[]
[\mathcal{B}_\varepsilon(y), y]_+ = \varepsilon\left[Ly, J^{-1}(Ly)\right]_+ + \langle Ly, y\rangle_X + [A(y), y]_+ \\
+ [B(y), y]_+ - \langle f, y\rangle_X \ge 0 \quad \forall\, y \in D(L) : \|y\|_X = R. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует по крайней мере одно решение задачи

$$\bar{0} \in \mathcal{B}_\varepsilon(y_\varepsilon), \quad y_\varepsilon \in D(L), \quad \|y_\varepsilon\|_X \le R. \qquad (3.12)$$

Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр всех конечномерных подпространств пространства $D(L)$. На каждом $F \in \mathcal{F}$ рассмотрим норму $\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_X\big|_F$. Теперь зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что для каждого $F \in \mathcal{F}$ существует по крайней мере одно решение задачи

$$[\mathcal{B}_\varepsilon(y_{\varepsilon F}), h]_+ \ge 0 \qquad \forall\, h \in F \qquad (3.13)$$

$y_{\varepsilon F} \in F$ такое, что $\|y_{\varepsilon F}\|_X \le R$.

Зафиксируем произвольное подпространство $F \in \mathcal{F}$. Поскольку F конечномерное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_F$, то существует некоторая плотная в F система векторов $\{v_i\}_{i\ge1} \subset F$. Приблизим решения (3.13) решениями конечных систем неравенств

$$[\mathcal{B}_\varepsilon(y_{\varepsilon Fm}), v_i]_- \;\le\; 0 \;\le\; [\mathcal{B}_\varepsilon(y_{\varepsilon Fm}), v_i]_+, \qquad i = \overline{1, m}, \qquad (3.14)$$

где $m \ge 1$ и $y_{\varepsilon Fm} \in F$, $y_{\varepsilon Fm} = \sum_{j=1}^m \alpha^{j,F}_{\varepsilon,m} v_j$.

Покажем, что для каждого $m \ge 1$ задача (3.14) имеет по крайней мере одно решение $\bar{\alpha}^m_{\varepsilon,F} = (\alpha^{j,F}_{\varepsilon,m})_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ такое, что для $y_{\varepsilon Fm}(\bar{\alpha}^m_{\varepsilon,F}) = \sum_{j=1}^m \alpha^{j,F}_{\varepsilon,m} v_j$ $\|y_{\varepsilon Fm}(\bar{\alpha}^m_{\varepsilon,F})\|_X \le R$. Кроме того, множество

$$G_{\varepsilon F}(m) = \big\{ y_{\varepsilon Fm}(\bar\alpha^m_{\varepsilon,F}) \in F \mid \ y_{\varepsilon Fm}(\bar\alpha^m_{\varepsilon,F}) \text{ удовлетворяет (3.14)}, \\ \|y_{\varepsilon Fm}(\bar\alpha^m_{\varepsilon,F})\|_X \le R \big\}$$

компактно в F.

Для фиксированного $m \ge 1$ рассмотрим многозначное отображение $B : \mathbb{R}^m \to C_v(\mathbb{R}^m)$, определенное так: $\forall\, \bar\alpha \in \mathbb{R}^m$ $B(\bar\alpha) = (B_i(\bar\alpha))_{i=1}^m$, где для каждого $i = \overline{1, m}$

$$B_i(\bar\alpha) = \Big[[\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar\alpha)), v_i]_-, \ [\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar\alpha)), v_i]_+ \Big] \in C_v(\mathbb{R}), \qquad \bar\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m.$$

На $\mathbb{R}^m$ рассмотрим норму

$$\|\bar\alpha\|_{\mathbb{R}^m} = \|y(\bar\alpha)\|_X = \Big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \Big\|_X \qquad \forall\, \bar\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$$

и спаривание

$$\langle \bar\alpha, \bar\beta \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \qquad \forall\, \bar\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m, \ \bar\beta = (\beta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m.$$

Вследствие предложения 2.1 и (3.11), для каждого $\bar\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} [B(\bar\alpha), \bar\alpha]_+ &= \sup\Big\{ \sum_{i=1}^m b_i \alpha_i \,\Big|\, b_i \in B_i(\bar\alpha), \ i = \overline{1, n} \Big\} \\ &\ge \sum_{i=1}^m [\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar\alpha)), v_i]_+ \alpha_i = \sum_{i=1}^m [\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar\alpha)), \alpha_i v_i]_+ \\ &\ge \Big[\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar\alpha)), \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \Big]_+ = [\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar\alpha)), y(\bar\alpha)]_+ \ge 0, \end{aligned}$$

при $\|\bar\alpha\|_{\mathbb{R}^m} = \|y(\bar\alpha)\|_X = R$. Следовательно,

$$[B(\bar\alpha), \bar\alpha]_+ \ge 0 \quad \forall\, \bar\alpha \in \mathbb{R}^m \,:\, \|\bar\alpha\|_{\mathbb{R}^m} = R. \tag{3.15}$$

Аналогично, для каждого $\bar\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ и $\bar\beta = (\beta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} [B(\bar\alpha), \bar\beta]_+ &= \sup\Big\{ \sum_{i=1}^m b_i \beta_i \,\Big|\, b_i \in B_i(\bar\alpha), \ i = \overline{1, n} \Big\} \\ &= \sum_{i=1}^m \big(\max\{ [\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar\alpha)), v_i]_+, \, [\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar\alpha)), -v_i]_+ \} \big) \cdot |\beta_i|. \end{aligned}$$

Полунепрерывность сверху отображения

$$\mathbb{R}^m \ni \bar{\alpha} \to \max\left\{[\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar{\alpha})), v_i]_+,\ [\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar{\alpha})), -v_i]_+\right\} \qquad \forall\, i = \overline{1,m}$$

следует из того же утверждения для отображений

$$\mathbb{R}^m \ni \bar{\alpha} \to [\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar{\alpha})), v_i]_+ \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^m \ni \bar{\alpha} \to [\mathcal{B}_\varepsilon(y(\bar{\alpha})), -v_i]_+ \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.16}$$

Последнее следует из конечномерной локальной ограниченности и λ_0-псевдомонотонности $\mathcal{B}_\varepsilon$ на $D(L)$. Действительно, в силу леммы 2.3 получим, что $\mathcal{B}_\varepsilon$ является λ-псевдомонотонным и локально ограниченным на F. Следовательно, в силу [18, лемма 1, с. 1516] и [1, предложение 2, с. 127] для каждого $\bar{\beta} \in \mathbb{R}^m$ отображение (3.16) является полунепрерывным сверху. Поэтому, $\mathbb{R}^m \ni \bar{\alpha} \to [B(\bar{\alpha}), \bar{\beta}]_+$ является полунепрерывным сверху. Следовательно, в силу теоремы Кастеня ([1, с. 132]) B является полунепрерывным сверху на $\mathbb{R}^m$. В силу (3.15) для задачи (3.14) можем применить [21, следствие 3.2]. Отсюда следует, что для каждого $m \geq 1$ существует по крайней мере одно решение (3.14) $\bar{\alpha}^m_{\varepsilon F} = (\alpha^{j,F}_{\varepsilon,m})^m_{j=1} \in \mathbb{R}^m$ такое, что $\|\bar{\alpha}^m_{\varepsilon F}\|_{\mathbb{R}^m} \leq R$. Поэтому, для $y_{\varepsilon F m} = \sum_{j=1}^m \alpha^{j,F}_\varepsilon v_j$ справедлива оценка $\|y_{\varepsilon F m}\|_X \leq R$.

Компактность $G_{\varepsilon F}(m)$ непосредственно следует из ограниченности $G_{\varepsilon F}(m)$ и хеминепреывности B на $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим множество $G_{\varepsilon F} = \bigcap_{m\geq 1} G_{\varepsilon F}(m)$. Оно непусто, поскольку для каждого $m \geq 1$ $G_{\varepsilon F}(m+1) \subset G_{\varepsilon F}(m)$ и $G_{\varepsilon F}(m)$ — компакт (т.е. семейство $\{G_{\varepsilon F}(m)\}_{m\geq 1}$ центрировано в F). Следовательно, $\exists\, y_{\varepsilon F} \in G_{\varepsilon F}$: $\|y_{\varepsilon F}\|_X \leq R$ и $[\mathcal{B}_\varepsilon(y_{\varepsilon F}), v_i]_+ \geq 0\ \forall\, i \geq 1$. Поскольку система $\{v_i\}_{i\geq 1}$ плотна в пространстве F, то тогда для $y_{\varepsilon F} \in F$ выполняется (3.13).

Для каждого $\varepsilon > 0$ и $F \in \mathcal{F}$ рассмотрим непустое множество

$$G_{\varepsilon F} = \{y_{\varepsilon F} \in F \,|\, y_{\varepsilon F} \text{ удовлетворяет (3.13) и } \|y_{\varepsilon F}\|_X \leq R\}$$

и докажем, что оно ограничено в $D(L)$ равномерно по F для фиксированного $\varepsilon > 0$.

Из неравенств (3.13), (3.5), (3.6) и (3.2) получим, что для каждого $\varepsilon > 0$, $F \in \mathcal{F}$ и $y_{\varepsilon F} \in G_{\varepsilon F}$

$$\begin{aligned}\varepsilon\|(Ly_{\varepsilon F})\|_{X^*} &+ \langle Ly_{\varepsilon F}, y_{\varepsilon F}\rangle_X + [A(y_{\varepsilon F}), y_{\varepsilon F}]_+ \\ &+ [B(y_{\varepsilon F}), y_{\varepsilon F}]_+ - \langle f, y_{\varepsilon F}\rangle_X \geq 0 \geq \varepsilon\|(Ly_{\varepsilon F})\|_{X^*} + \langle Ly_{\varepsilon F}, y_{\varepsilon F}\rangle_X \\ &\qquad + [A(y_{\varepsilon F}), y_{\varepsilon F}]_- + [B(y_{\varepsilon F}), y_{\varepsilon F}]_- - \langle f, y_{\varepsilon F}\rangle_X.\end{aligned}$$

Из определений нижней и верхней опорных функций существуют $d'(y_{\varepsilon F}) \in A(y_{\varepsilon F})$ и $d''(y_{\varepsilon F}) \in B(y_{\varepsilon F})$ такие,что

$$\varepsilon\|Ly_{\varepsilon F}\|^2_{X^*} + \langle Ly_{\varepsilon F}, y_{\varepsilon F}\rangle_X + \langle d'(y_{\varepsilon F}), y_{\varepsilon F}\rangle_{X_1} \\ + \langle d''(y_{\varepsilon F}), y_{\varepsilon F}\rangle_{X_2} = \langle f, y_{\varepsilon F}\rangle_X. \quad (3.17)$$

Из неравенства (3.17) и того, что $L \geq 0$ получим, что

$$\langle d'(y_{\varepsilon F}), y_{\varepsilon F}\rangle_{X_1} + \langle d''(y_{\varepsilon F}), y_{\varepsilon F}\rangle_{X_2} \leq \|f\|_{X^*}R.$$

В силу условия (П) для $A+B : X \to C_v(X^*)$ существует $C_1 > 0$ такое, что

$$\|d'(y_{\varepsilon F}) + d''(y_{\varepsilon F})\|_{X^*} \leq C_1 \qquad \forall\, \varepsilon > 0,\ F \in \mathcal{F},\ y_{\varepsilon F} \in G_{\varepsilon F}. \quad (3.18)$$

Из оценок (3.17) и (3.18) мы также получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon\|Ly_{\varepsilon F}\|^2_{X^*} \leq (C_1 + \|f\|_{X^*})R$$

для каждого $F \in \mathcal{F}$ и $y_{\varepsilon F} \in G_{\varepsilon F}$. Отсюда, для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} \|G_{\varepsilon F}\|_+^{(D(L))} \leq R + \frac{1}{\varepsilon}(C_1 + \|f\|_{X^*})R =: C_2, \quad (3.19)$$

где $\|G_{\varepsilon F}\|_+^{(D(L))} = \sup_{y\in G_{\varepsilon F}} \|y\|_{D(L)}$. Заметим, что C_2 зависит от $\varepsilon > 0$.

Из неравенства (3.13) и предложения 2.1 для любых $\varepsilon > 0$, $F \in \mathcal{F}$, $y_{\varepsilon F} \in G_{\varepsilon F}$ следует существование $\beta(y_{\varepsilon F}) \in \mathcal{B}_\varepsilon(y_{\varepsilon F})$ такого, что

$$\langle \beta(y_{\varepsilon F}), h_F\rangle_{D(L)} = 0 \qquad \forall\, h_F \in F. \quad (3.20)$$

Докажем ограниченность $\{\beta(y_{\varepsilon F})\}_{F\in\mathcal{F}}$ в $(D(L))^*$ $\forall\, \varepsilon > 0$. В силу (3.6), (3.5), (3.2), (3.18), (3.19), из определений $G_{\varepsilon F}$ и $\|\cdot\|_{D(L)}$ для каждого $F \in \mathcal{F}$, $y_{\varepsilon F} \in G_{\varepsilon F}$ и $\omega \in D(L)$ следует, что

$$\begin{aligned}\langle \beta(y_{\varepsilon F}), \omega\rangle_{D(L)} &\leq [\mathcal{B}_\varepsilon(y_{\varepsilon F}), \omega]_+ \leq \varepsilon\|L\omega\|_{X^*}\|Ly_{\varepsilon F}\|_{X^*} \\ &\quad + \|Ly_{\varepsilon F}\|_{X^*}\|\omega\|_X + C_1\|\omega\|_X + \|f\|_{X^*}\|y_{\varepsilon F}\|_X \\ &\leq (1+\varepsilon)\|\omega\|_{D(L)}\|y_{\varepsilon F}\|_{D(L)} + C_1\|\omega\|_{D(L)} + \|f\|_{X^*}\|y_{\varepsilon F}\|_{D(L)} \\ &\leq (1+\varepsilon)\|\omega\|_{D(L)}\|G_{\varepsilon F}\|_+ + C_1\|\omega\|_{D(L)} + \|f\|_{X^*}\|G_{\varepsilon F}\|_+.\end{aligned}$$

Следовательно, для каждого $\omega \in D(L)$

$$\begin{aligned}\sup_{F\in\mathcal{F}} \sup_{y_{\varepsilon F}\in G_{\varepsilon F}} \langle \beta(y_{\varepsilon F}), \omega\rangle_{D(L)} &\leq \sup_{F\in\mathcal{F}}[\mathcal{B}_\varepsilon(G_{\varepsilon F}), \omega]_+ \\ &\leq (1+\varepsilon)\|\omega\|_{D(L)}\|G_{\varepsilon F}\|_+ + C_1\|\omega\|_{D(L)} + \|f\|_{X^*}\|G_{\varepsilon F}\|_+ < +\infty.\end{aligned}$$

Поэтому, в силу теоремы Банаха-Штейнгауза, существует $C_3 > 0$ такое, что

$$\forall\, F \in \mathcal{F},\ y_{\varepsilon F} \in G_{\varepsilon F} \qquad \|\beta(y_{\varepsilon F})\|_{(D(L))^*} \le C_3. \tag{3.21}$$

Заметим, что C_3 зависит от $\varepsilon > 0$.

Для каждого $F_0 \in \mathcal{F}$ положим $K_{\varepsilon F_0} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}:F\supset F_0} G_{\varepsilon F}$. Из (3.19) следует, что $\sup_{F\in\mathcal{F}} \|K_{\varepsilon F}\|_+^{(D(L))} \le C_3$. Для любого семейства подпространств $\{F_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{F}$ и любого $F \in \mathcal{F}$ таких, что $F \supset \bigcup_{j=1}^n F_j$, имеем: $\emptyset \ne K_{\varepsilon F} \subset \bigcap_{j=1}^n K_{\varepsilon F_j}$. Следовательно, в силу теоремы Банаха-Алаоглу, $\{\overline{K}^{\omega}_{\varepsilon F}\}_{F\in\mathcal{F}}$ — центрированная система слабо компактных множеств, где $\overline{K}^{\omega}_{\varepsilon F}$ слабое замыкание $K_{\varepsilon F}$ в $D(L)$. Поэтому, в силу [25, с. 98] $\exists\, y_0 \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{K}^{\omega}_{\varepsilon F}$.

Теперь докажем, что y_0 удовлетворяет (3.12). Получим это утверждение методом от противного. Если $\bar{0} \notin \mathcal{B}_\varepsilon(y_0)$, тогда, в силу [26, теорема 3.4, с. 70], существует $\omega_0 \in D(L)$ такое, что

$$[\mathcal{B}_\varepsilon(y_0), \omega_0]_- > 0. \tag{3.22}$$

Пусть $F_0 \in \mathcal{F}$: $y_0, \omega_0 \in F_0$. Тогда существуют последовательности

$$\{y_n\}_{n\ge1} \subset K_{\varepsilon F_0} \quad \text{и} \quad \{F_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{F} \quad \Big(F_0 \subset \bigcap_{n\ge1} F_n\Big)$$

такие, что

$$G_{\varepsilon F_n} \ni y_n \rightharpoonup y_0 \text{ в } D(L) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3.23}$$

Из (3.21), в силу теоремы Банаха–Алаоглу, получим, что для некоторого $\beta \in (D(L))^*$

$$\mathcal{B}_\varepsilon(y_n) \ni \beta(y_n) \rightharpoonup \beta \text{ в } (D(L))^* \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3.24}$$

Если в (3.20) положить $h_{F_n} = y_n - y_0 \in F_n$, то

$$0 = \langle \beta(y_n), y_n - y_0\rangle_{D(L)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Следовательно, вследствие (3.23) и (3.24), к $\mathcal{B}_\varepsilon$ можем применить λ_0-псевдомонотонность на $D(L)$. Поэтому, существуют подпоследовательности $\{y_{n_m}\}_{m\ge1} \subset \{y_n\}_{n\ge1}$, $\{\beta_{n_m}\}_{m\ge1} \subset \{\beta_n\}_{n\ge1}$ такие, что

$$[\mathcal{B}_\varepsilon(y_0), y_0 - \omega]_- \le \varliminf_{m\to\infty} \langle \beta(y_{n_m}), y_{n_m} - \omega\rangle_{D(L)} \\ \le \langle \beta, y_0 - \omega\rangle_{D(L)} \qquad \forall\, \omega \in D(L).$$

Если мы положим в последнем $\omega = y_0 - \omega_0$, то

$$[\mathcal{B}_\varepsilon(y_0), \omega_0]_- \le \langle \beta, \omega_0\rangle_{D(L)} = \lim_{m\to\infty} \langle \beta(y_{n_m}), \omega_0\rangle_{D(L)} = \lim_{m\to\infty} 0 = 0.$$

Это противоречит (3.22). Следовательно, $y_0 \in D(L)$ — решение задачи (3.12).

Заметим, что для каждого $n \geq 1$ $\|y_n\|_X \leq R$. Из (3.23) и из непрерывности вложения $D(L) \subset X$ следует, что $y_n \rightharpoonup y_0$ в X. Таким образом, $R \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|y_n\|_X \geq \|y_0\|_X$.

В силу (3.5)–(3.7), из предложения 2.1 имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $d'(y_\varepsilon) \in A(y_\varepsilon)$, $d''(y_\varepsilon) \in B(y_\varepsilon)$ и $m_\varepsilon(y_\varepsilon) \in \mathcal{M}_\varepsilon(y_\varepsilon)$ такие, что

$$\langle m_\varepsilon(y_\varepsilon), h\rangle_{D(L)} + \langle d'(y_\varepsilon), h\rangle_{X_1} + \langle d''(y_\varepsilon), h\rangle_{X_2} - \langle f, h\rangle_X = 0 \quad \forall\, h \in D(L), \tag{3.25}$$

и, благодаря (3.2), $\langle m_\varepsilon(y_\varepsilon), y_\varepsilon\rangle_{D(L)} = \varepsilon\|Ly_\varepsilon\|^2_{X^*} + \langle Ly_\varepsilon, y_\varepsilon\rangle_X$. В силу (3.25) получим, что

$$\varepsilon\|Ly_\varepsilon\|^2_{X^*} + \langle Ly_\varepsilon, y_\varepsilon\rangle_X + \langle d'(y_\varepsilon), y_\varepsilon\rangle_{X_1} + \langle d''(y_\varepsilon), y_\varepsilon\rangle_{X_2} = \langle f, y_\varepsilon\rangle_X.$$

Поскольку $L \geq 0$, то

$$\langle d'(y_\varepsilon), y_\varepsilon\rangle_{X_1} + \langle d''(y_\varepsilon), y_\varepsilon\rangle_{X_2} \leq \|f\|_{X^*} R \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Отображение A (соответственно B) обладает свойством (П) на X_1 (соответственно на X_2). Тогда существуют $C_4, C_5 > 0$ такие, что

$$\|d'(y_\varepsilon)\|_{X_1^*} \leq C_4, \quad \|d''(y_\varepsilon)\|_{X_2^*} \leq C_5 \qquad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{3.26}$$

Из (3.25) и (3.7) следует, что для каждого $h \in D(L)$

$$\varepsilon[Lh, J^{-1}(Ly_\varepsilon)]_+ + \langle Ly_\varepsilon, h\rangle_X + \langle d'(y_\varepsilon), h\rangle_{X_1} + \langle d''(y_\varepsilon), h\rangle_{X_2} - \langle f, h\rangle_X \geq 0. \tag{3.27}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$, вследствие предложения 2.1 (пространство X рефлексивно), возьмем $h_\varepsilon \in J^{-1}(Ly_\varepsilon)$ из (3.27) такое, что

$$\varepsilon\langle Lh, h_\varepsilon\rangle_X + \langle Ly_\varepsilon, h\rangle_X + \langle d'(y_\varepsilon), h\rangle_{X_1} + \langle d''(y_\varepsilon), h\rangle_{X_2} - \langle f, h\rangle_X = 0 \quad \forall\, h \in D(L). \tag{3.28}$$

Форма

$$D(L) \ni h \to \langle Lh, h_\varepsilon\rangle_X = \frac{1}{\varepsilon}(\langle f, h\rangle_{X_2} - \langle Ly_\varepsilon, h\rangle_X - \langle d'(y_\varepsilon), h\rangle_{X_1} - \langle d''(y_\varepsilon), h\rangle_{X_2})$$

непрерывна в индуцированной (из X на $D(L)$) топологии. Следовательно,

$$h_\varepsilon \in D(L^*) \quad \text{и} \quad \langle Lh_\varepsilon, h_\varepsilon\rangle_X = \langle L^* h_\varepsilon, h_\varepsilon\rangle_X.$$

Из (3.28) следует, что

$$\varepsilon\langle L^* h_\varepsilon, h\rangle_X + \langle Ly_\varepsilon, h\rangle_X + \langle d'(y_\varepsilon), h\rangle_{X_1} + \langle d''(y_\varepsilon), h\rangle_{X_2} - \langle f, h\rangle_X$$
$$= \langle \varepsilon L^* h_\varepsilon + Ly_\varepsilon + d'(y_\varepsilon) + d''(y_\varepsilon) - f, h\rangle_X = 0 \qquad \forall\, h \in D(L),$$

т.е. в силу плотности $D(L)$ в X, y_ε удовлетворяет включению (3.3).

Положим в (3.28) $h = h_\varepsilon$. Отсюда получим, что

$$\varepsilon\langle Lh_\varepsilon, h_\varepsilon\rangle_X + \langle Ly_\varepsilon, h_\varepsilon\rangle_X + \langle d'(y_\varepsilon), h_\varepsilon\rangle_{X_1} + \langle d''(y_\varepsilon), h_\varepsilon\rangle_{X_2} = \langle f, h_\varepsilon\rangle_X.$$

В силу того, что $L \geq 0$, из (3.2) и из (3.26) получим, что

$$\|Ly_\varepsilon\|^2_{X^*} \leq (C_4 + C_5 + \|f\|_{X^*}) \cdot \|Ly_\varepsilon\|_{X^*} \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Отсюда следует существование $C_6 > 0$ такого, что $\|Ly_\varepsilon\|_{X^*} \leq C_6\ \forall\, \varepsilon > 0$. Поэтому, благодаря предложению 2.1, в силу оценок (3.26) и последнего неравенства, из теоремы Банаха–Алаоглу, переходя при необходимости к подпоследовательностям, мы утверждаем, что

$$y_\varepsilon \rightharpoonup y_0 \text{ в } D(L), \quad A(y_\varepsilon) + B(y_\varepsilon) \ni d'(y_\varepsilon) + d''(y_\varepsilon) =: d(y_\varepsilon) \rightharpoonup d_0 \text{ в } X^* \tag{3.29}$$

для некоторых $y_0 \in D(L)$ и $d_0 \in X^*$. Обозначим эти подпоследовательности соответственно $\{y_\varepsilon\}$ и $\{d_\varepsilon\}$.

Докажем, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \langle d(y_\varepsilon), y_\varepsilon - y_0\rangle_X \leq 0. \tag{3.30}$$

Действительно, ввиду (3.27)–(3.29) (так как $L \geq 0$) получим, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \langle d(y_\varepsilon), y_\varepsilon - y_0\rangle_X \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}}\, 2C_6 R\varepsilon$$
$$+ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \langle Ly_0, y_\varepsilon - y_0\rangle_X + \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \langle f, y_\varepsilon - y_0\rangle_X \leq 0.$$

Теперь докажем, что $y_0 \in D(L)$ удовлетворяет (3.1). Благодаря λ_0-псевдомонотонности $A+B$ на $D(L)$, (3.29) и (3.30), переходя (если это необходимо) к подпоследовательностям, получим:

$$\langle d_0, y_0 - \omega\rangle_X \geq \lim_{\varepsilon\to 0+} \langle d(y_\varepsilon), y_\varepsilon - y_0\rangle_X$$
$$+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \langle d(y_\varepsilon), y_0 - \omega\rangle_X \geq \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0+} \langle d(y_\varepsilon), y_\varepsilon - \omega\rangle_X$$
$$\geq [(A+B)(y_0), y_0 - \omega]_- \qquad \forall\, \omega \in D(L). \tag{3.31}$$

Если положить в (3.27) $h = \omega - y_0$, то

$$\begin{aligned}\langle d_0, y_0-\omega\rangle_X &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\langle d(y_\varepsilon), y_0-\omega\rangle_X \\ &\le \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}}(C_6+\|\omega\|_X)R\varepsilon + \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}}\langle Ly_\varepsilon, \omega - y_0\rangle_X + \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}}\langle f, y_\varepsilon-\omega\rangle_X \\ &= \langle f - Ly_0, y_0-\omega\rangle_X \qquad \forall\,\omega\in D(L).\end{aligned}$$

Следовательно, в силу (3.31), для любого $\omega\in D(L)$ $\langle f-Ly_0,\omega\rangle_X \le [(A+B)(y_0),\omega]_+$. Это означает, что для каждого $\omega\in D(L)$

$$\langle Ly_0,\omega\rangle_X + [A(y_0),\omega]_+ + [B(y_0),\omega]_+ \ge \langle f,\omega\rangle_X,$$

т.е., ввиду плотности $D(L)$ в X, $y_0\in D(L)$ – решение (3.1).

Теорема доказана. □

Следствие 3.1. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство,*

$$L: D(L)\subset X\to X^*$$

— линейный, плотно определенный, максимально монотонный на $D(L)$ оператор, $A: X_1\to C_v(X_1^*)$ и $B: X_2\to C_v(X_2^*)$ — конечномерно локально ограниченные, λ_0-псевдомонотонные на $D(L)$ многозначные отображения, удовлетворяющие условию (П). *Предположим, что вложение $D(L)$ в некоторое банахово пространство Y компактно и плотно, вложение X в Y плотно и непрерывно и пусть $N: Y\rightrightarrows Y^*$ — локально ограниченное многозначное отображение такое, что график N замкнут в $Y\times Y_w^*$ (т.е. относительно сильной топологии в Y и $*$-слабой в Y^*) и удовлетворяет условию* (П). *Кроме того, для $f\in X^*$ существует $R>0$ такое, что*

$$[A(y),y]_+ + [B(y),y]_+ + [N(y),y]_+ - \langle f,y\rangle_X \ge 0 \quad \forall\, y\in X: \|y\|_X = R. \tag{3.32}$$

Тогда существует по крайней мере одно решение задачи

$$Ly + A(y) + B(y) + N(y) \ni f, \qquad y\in D(L), \tag{3.33}$$

полученное методом сингулярных возмущений.

Доказательство. Положим $C(y)=B(y)+N(y)$ для каждого $y\in X\subset Y$. В силу непрерывности вложения $X\subset Y$ и замечания 2.5, следует, что C удовлетворяет условию (П) на X. Конечномерная локальная ограниченность C очевидна. В силу предложения 2.12, отображение C является λ_0-псевдомонотонным на $D(L)$. Поэтому, мы применим теорему 3.1 для A, C, L. Следовательно, задача (3.33) имеет по крайней мере одно решение, полученное методом сингулярных возмущений. □

Замечание 3.2. В разделе 2, в частности, в предложении 2.10 рассмотрены возможные классы многозначных λ_0-псевдомонотонных на $D(L)$ отображений.

4. Многозначный метод штрафа для эволюционных вариационных неравенств с w_{λ_0}-псевдомонотонными отображениями

Рассмотрим операторы A, L и выпуклое множество K такое, что

$$\begin{array}{l}\text{оператор } L : D(L) \subset X \to X^* \text{ является максимально} \\ \text{монотонным на } D(L)\text{, линейным и плотно определенным;}\end{array} \tag{4.1}$$

$$\begin{array}{l}K \text{ является выпуклым, замкнутым подмножеством из } X \\ \text{таким, что } \exists\, \beta_0 \in K \cap D(L) : \ \bigcup\limits_{t>0} t(K - \beta_0) = X;\end{array} \tag{4.2}$$

$$\begin{array}{l}\text{многозначное отображение } A : X \to C_v(X^*) \text{ является} \\ \lambda_0\text{-псевдомонотонным на } D(L), \\ \text{локально конечномерно ограниченным,} \\ \text{удовлетворяет условию (П) и для некоторого} \\ y_0 \in K \cap D(L) \quad \dfrac{[A(y), y - y_0]_+}{\|y\|_X} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|y\|_X \to \infty;\end{array} \tag{4.3}$$

$$\begin{array}{l}\beta : X \to C_v(X^*) \text{ является монотонным, ограниченным, радиально} \\ \text{полунепрерывным многозначным оператором “штрафа”, который} \\ \text{соответствует множеству } K, \text{ т.е. } K = \{y \in X \mid \beta(y) \ni \bar{0}\};\end{array} \tag{4.4}$$

Замечание 4.1. Достаточным условием для (4.2) является:

> K — выпуклое, замкнутое подмножество из X такое, что $D(L) \cap \operatorname{int} K \neq \emptyset$.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* (4.1)–(4.4), $f \in X^*$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *задача*

$$\left.\begin{array}{l} Ly_\varepsilon + A(y_\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon}\beta(y_\varepsilon) \ni f, \\ y_\varepsilon \in D(L) \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

имеет решение. Более того, существует последовательность $\{y_\varepsilon\}_\varepsilon \subset D(L)$ *такая,что*

a) для каждого $\varepsilon > 0$ y_ε *— решение задачи* (4.5)*;*

b) существует подпоследовательность $\{y_\tau\}_\tau \subset \{y_\varepsilon\}_\varepsilon$ *такая, что для некоторого* $y \in D(L)$ $y_\tau \to y$ *слабо в* X, $Ly_n \to Ly$ *слабо в* X^**;*

c) y *— решение следующей задачи:*

$$\left.\begin{aligned}&\langle Ly, v-y\rangle_X + [A(y), v-y]_+ \geq \langle f, v-y\rangle_X \quad \forall\, v\in K\cap D(L),\\ &y\in K\cap D(L).\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Доказательство. По аналогии с [17, с. 396], не теряя общности, можем предположить, что $y_0=\bar{0}\in K$. Другими словами, отображения $\tilde{A}(\cdot)=A(\cdot-y_0)$, $\tilde{f}=f-Ly_0$, $\tilde{L}=L$, множество $\tilde{K}=K-y_0$, $\tilde{y_0}=\bar{0}$ и $\tilde{\beta_0}=\beta_0-y_0$ удовлетворяют условиям (4.1)–(4.4).

Для каждого $\varepsilon>0$ введем новое многозначное отображение:

$$A_\varepsilon(y):=A(y)+\frac{1}{\varepsilon}\beta(y), \qquad y\in X.$$

В силу предложения 2.9 и леммы 2.4, $A_\varepsilon : X\to C_v(X^*)$ — λ_0-псевдомонотонное на $D(L)$. Ввиду ограниченности β, благодаря условию (П) и конечномерной локальной ограниченности для A следует, что A_ε — конечномерно локально ограниченное и удовлетворяет условию (П).

Теперь используем свойство коэрцитивности. Из (4.3) следует существование $R>0$ такого, что

$$[A(y)-f,y]_+\geq 0 \qquad \forall\, y\in X : \|y\|_X=R.$$

Тогда для каждого $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}[A_\varepsilon(y)-f,y]_+ &\geq [A(y)-f,y]_+\\ &\quad+\frac{1}{\varepsilon}[\beta(y),y-\bar{0}]_-\geq [A(y)-f,y]_+ +\frac{1}{\varepsilon}[\beta(\bar{0}),y]_+\\ &\quad= [A(y)-f,y]_+\geq 0 \qquad \forall\,\|y\|_X=R.\end{aligned}$$

Следовательно, мы можем применить теорему 3.1 для

$$X_1=X_2=X,\ D(L)=D(L),\ L=L,\ \mathcal{A}\equiv\bar{0},\ \mathcal{B}=A_\varepsilon,\ f=f,\ R=R.$$

Тогда, получаем, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $y_\varepsilon\in X$ такое, что

$$y_\varepsilon \text{ — решение (4.5)}, \quad \|y_\varepsilon\|_X\leq R. \tag{4.7}$$

Заметим, что константа R не зависит от $\varepsilon>0$.

Из (4.7) следует, существование $d_\varepsilon\in A(y_\varepsilon)$, $b_\varepsilon\in\beta(y_\varepsilon)$ таких, что

$$Ly_\varepsilon+d_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}b_\varepsilon=f. \tag{4.8}$$

Благодаря монотонности L и β и тому, что $\bar{0} \in K \cap D(L)$, имеем:

$$\langle d_\varepsilon, y_\varepsilon \rangle_X \leq -\langle Ly_\varepsilon, y_\varepsilon \rangle_X + \frac{1}{\varepsilon}\langle b_\varepsilon, \bar{0} - y_\varepsilon \rangle_X + \langle f, y_\varepsilon \rangle_X \leq \|f\|_{X^*} R < +\infty.$$

В силу свойства (П) для A и из (4.7), следует существование $c_1 > 0$ такого, что

$$\|d_\varepsilon\|_{X^*} \leq c_1 \qquad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{4.9}$$

Более того, из (4.8) и (4.9) следует, что

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle b_\varepsilon, y_\varepsilon - \beta_0 \rangle_X &= \varepsilon \langle f - d_\varepsilon - Ly_\varepsilon, y_\varepsilon - \beta_0 \rangle_X \\ &\leq \varepsilon(\|f\|_{X^*} + c_1 + \|L\beta_0\|_{X^*})(R + \|\beta_0\|_X) \\ &=: c_2 \cdot \varepsilon \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \searrow 0+. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Из монотонности β, из (4.10) и из (4.2) следует, что для каждого $\omega \in X\ \exists\ , t > 0$: $t\omega + \beta_0 \in K$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\langle b_\varepsilon, \omega \rangle_X &= \frac{1}{t\varepsilon}\langle b_\varepsilon, t\omega - y_\varepsilon \rangle_X + \frac{1}{t\varepsilon}\langle b_\varepsilon, y_\varepsilon \rangle_X \\ &\leq \frac{1}{t\varepsilon}[\beta(y_\varepsilon), t\omega - y_\varepsilon]_+ + \frac{1}{t}c_2 \leq \frac{1}{t\varepsilon}[\beta(\omega), t\omega - y_\varepsilon]_- + \frac{1}{t}c_2 \leq \frac{1}{t}c_2. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу теоремы Банаха–Штейнгауза, существует $c_3 > 0$ такое, что

$$\|b_\varepsilon\|_{X^*} \leq \varepsilon c_3 \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{4.11}$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$.

Условия (4.1), (4.8) и (4.11) означают, что для каждого $\omega \in X$

$$|\langle Ly_\varepsilon, \omega \rangle_X| \leq (\|f\|_{X^*} + c_2 + c_3)\|\omega\|_X \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Следовательно, существует $c_4 > 0$ такое, что

$$\|Ly_\varepsilon\|_{X^*} \leq c_4 \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{4.12}$$

Переход к пределу. Из оценок (4.7), (4.9), (4.12), благодаря теореме Банаха–Алаоглу, следует существование подпоследовательности $\{y_\tau\}_\tau \subset \{y_\varepsilon\}_\varepsilon$ такой, что для некоторых $y \in D(L)$, $d \in X^*$

$$\begin{aligned} &y_\tau \rightharpoonup y \text{ в } D(L), \quad Ly_\tau \rightharpoonup y \text{ в } X, \quad d_\tau \rightharpoonup d \text{ в } X^*, \quad b_\tau \rightharpoonup \bar{0} \text{ в } X^* \\ &\text{при } \tau \searrow 0+. \end{aligned} \tag{4.13}$$

В силу предложения 2.9, отображение β является λ_0-псевдомонотонным на X. Более того, благодаря (4.10) и (4.13), имеем:

$$\lim_{\tau \searrow 0+} \langle b_\tau, y_\tau - y \rangle_X = \overline{\lim_{\tau \searrow 0+}} \langle b_\tau, y_\tau - y \rangle_X \leq 0.$$

Следовательно, с точностью к подпоследовательности, для каждого $\omega \in X$

$$0 = \varliminf_{\tau \searrow 0+} \langle b_\tau, y_\tau - \omega\rangle_X \geq [\beta(y), y-\omega]_-.$$

Последнее соотношение эквивалентно $\bar{0} \in \beta(y)$. Следовательно, в силу (4.4), получим, что $y \in K$.

Теперь, покажем, что

$$\varlimsup_{\tau \searrow 0+} \langle d_\tau, y_\tau - y\rangle_X \leq 0. \tag{4.14}$$

Действительно, из (4.8) и из (4.4) следует, что для каждого $v \in D(L)\cap K$

$$\begin{aligned}\langle d_\tau, y_\tau - v\rangle_X &= \frac{1}{\varepsilon}\langle b_\tau, v - y_\tau\rangle_X + \langle f, y_\tau - v\rangle_X + \langle Ly_\tau, v - y_\tau\rangle_X \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}[\beta(y_\tau), v - y_\tau]_+ + \langle f, y_\tau - v\rangle_X + \langle Ly_\tau, v - y_\tau\rangle_X \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}[\beta(v), v - y_\tau]_- + \langle f, y_\tau - v\rangle_X + \langle Ly_\tau, v - y_\tau\rangle_X \\ &\leq \langle f, y_\tau - v\rangle_X + \langle Ly_\tau, v - y\rangle_X + \langle Ly, y - y_\tau\rangle_X \\ &\leq \langle f, y_\tau - v\rangle_X + \langle Lv, v - y_\tau\rangle_X,\end{aligned}$$

при $\bar{0} \in \beta(v)$. Поэтому,

$$\varlimsup_{\tau \searrow 0+} \langle d_\tau, y_\tau\rangle_X \leq \langle d, v\rangle_X + \langle f, y - v\rangle_X + \langle Lv, v - y\rangle_X \quad \forall\, v \in D(L)\cap K.$$

В силу (4.13), если мы положим в последнем соотношении $v = y$, то получим:

$$\varlimsup_{\tau \searrow 0+} \langle d_\tau, y_\tau\rangle_X \leq \langle d, y\rangle_X.$$

Следовательно, в силу (4.13), выполняется неравенство (4.14).

Используем λ_0-псевдомонотонность A. Из (4.13) и (4.14) следует существование подпоследовательностей $\{y_\nu\}_\nu \subset \{y_\tau\}_\tau$ и $\{d_\nu\}_\nu \subset \{d_\tau\}_\tau$ таких, что

$$\varliminf_{\nu \searrow 0+} \langle d_\nu, y_\nu - v\rangle_X \geq [A(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X, \tag{4.15}$$

в частности, из неравенства (4.14) следует, что $\lim\limits_{\nu \searrow 0+} \langle d_\nu, y_\nu - y\rangle_X = 0$. Следовательно, в силу (4.13), (4.14) и (4.15),

$$\langle Ly, v - y\rangle_X + [A(y), y - v]_- \leq \langle f, y - v\rangle_X \qquad \forall\, v \in K \cap D(L),$$

что эквивалентно, в силу предложения 2.1, неравенству (4.6).

Теорема доказана. $\square$

Следствие 4.1. *Пусть выполняются условия* (4.1), (4.2), (4.4), $A : X_1 \to C_v(X_1^*)$ *и* $B : X_2 \to C_v(X_2^*)$ — *конечномерно локально ограниченные,* λ_0*-псевдомонотонные на* $D(L)$ *многозначные отображения, которые удовлетворяют условию* (П). *Предположим, что вложение* $D(L)$ *в некоторое банахово пространство* Y *компактно и плотно, вложение* X *в* Y *плотно и непрерывно и пусть* $N : Y \rightrightarrows Y^*$ — *локально ограниченное многозначное отображение, такое, что график* N *замкнут в* $Y \times Y_w^*$ *(т.е. относительно сильной топологии* Y *и* $*$*-слабой в* Y^**) и которое удовлетворяет условию* (П). *Кроме того, для некоторого* $y_0 \in K \cap D(L)$ *пусть*

$$\begin{gathered}\frac{[A(y), y - y_0]_+}{\|y\|_{X_1}} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|y\|_{X_1} \to \infty,\\ \frac{[B(y), y - y_0]_+}{\|y\|_{X_2}} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|y\|_{X_2} \to \infty,\\ \varliminf_{\|y\|_X \to \infty} \frac{[N(y), y - y_0]_+}{\|y\|_X} > -\infty,\end{gathered} \tag{4.16}$$

$f \in X^*$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *задача*

$$\left.\begin{aligned}&Ly_\varepsilon + A(y_\varepsilon) + B(y_\varepsilon) + N(y_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(y_\varepsilon) \ni f,\\ &y_\varepsilon \in D(L)\end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

имеет решение. Более того, существует последовательность $\{y_\varepsilon\}_\varepsilon \subset D(L)$ *такая, что*

a) для каждого $\varepsilon > 0$ y_ε — *решение задачи* (4.17);

b) существует подпоследовательность $\{y_\tau\}_\tau \subset \{y_\varepsilon\}_\varepsilon$ *такая, что для некоторого* $y \in D(L)$ $y_\tau \rightharpoonup y$ *в* $D(L)$;

c) y — *решение задачи* (1.1).

Замечание 4.2. Достаточным условием для (4.16) является:

$$\exists\, C_1, C_2 > 0 : \qquad \|N(y)\|_+ \le C_1 + C_2\|y\|_X \qquad \forall\, y \in X.$$

Доказательство. Положим $C(y) = A(y) + B(y) + N(y)$ для каждого $y \in X \subset Y$. В силу непрерывности вложения $X \subset Y$ и замечания 2.5, следует, что C удовлетворяет условию (П) на X. Конечномерная локальная ограниченность C очевидна. Благодаря предложению 2.12 отображение C является λ_0-псевдомонотонным на $D(L)$. $+$-коэрцитивность $C(\cdot + y_0)$ на X непосредственно следует из предложения 2.4, из леммы 2.1 для A и B и из условия (4.16). Поэтому, мы можем применить теорему 4.1 с C, L, K. Следовательно, задача (1.1) имеет по крайней мере одно решение, полученное методом штрафа. $\square$

5. Пример

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $S = [0,T]$, $Q = \Omega \times (0;T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0;T)$. Пусть, при $i = 1,2$, $m_i \in \mathbb{N}$, N_1^i (соответственно N_2^i) — число дифференцирований по переменной x порядка $\le m_i - 1$ (соответственно m_i) и $\{A_\alpha^i(x,t,\eta,\xi)\}_{|\alpha|\le m_i}$ — семейство действительных функций, определенных в $Q \times \mathbb{R}^{N_1^i} \times \mathbb{R}^{N_2^i}$. Пусть

$$D^k u = \{D^\beta u, |\beta| = k\} \text{ — дифференцирование по } x,$$

$$\delta_i u = \{u,\ \ Du, \dots, D^{m_i-1}u\},$$

$$A_\alpha^i(x,t,\delta_i u, D^{m_i}v): \ \ x,t \to A_\alpha^i(x,t,\delta_i u(x,t), D^{m_i}v(x,t)).$$

Пусть $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая локально липшицева действительная функция и ее обобщенный градиент Кларка $\Phi = \partial_{Cl}\psi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ удовлетворяет условию роста

$$\exists\, p_3 \ge 2, C > 0: \quad \|\Phi(t)\|_+ \le C(1 + |t|^{p_3-1}) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Рассмотрим следующую задачу с краевыми условиями Дирихле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m_1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^1(x,t,\delta_1 y, D^{m_1}y)) \\ + \sum_{|\alpha|\le m_2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^2(x,t,\delta_2 y, D^{m_2}y)) \\ + \Phi(y(x,t)) \ni f(x,t) \text{ в } Q, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$D^\alpha y(x,t) = 0 \quad \text{на } \Gamma_T \text{ при } |\alpha| \le m_i - 1 \text{ и } i = 1,2 \tag{5.3}$$

$$\text{и} \quad y(x,0) = 0 \quad \text{ в } \Omega. \tag{5.4}$$

Положим для $i = \overline{1,3}$ $q_i > 1$: $p_i^{-1} + q_i^{-1} = 1$, $H = L_2(\Omega)$, $V_3 = L_{p_3}(\Omega)$ и $V_i = W_0^{m_i,p_i}(\Omega)$ с $p_i > 1$, $m_i = 0,1,2,\dots$ такие, что $V_i \subset H$ непрерывно, $i = 1,2$. Рассмотрим функцию $\varphi : L_{p_3}(Q) \to \mathbb{R}$, определенную как

$$\varphi(y) = \int_Q \psi(y(x,t))\, dx\, dt \qquad \forall\, y \in L_{p_3}(Q).$$

Используя условие роста (5.1) и теорему Лебурга о среднем значении, отметим, что функция φ определена коректно и является липшиц-непрерывной на ограниченных множествах из $L_{p_3}(Q)$. Следовательно, она локально липшицева. Таким образом, коректно определен обобщенный градиент Кларка $\partial_{Cl}\varphi : L_{p_3}(Q) \rightrightarrows L_{q_3}(Q)$. Более того, теорема Обена–Кларка (см. [7, с. 83]) гарантирует то, что для каждого $y \in L_{p_3}(Q)$

$$p \in \partial_{Cl}\varphi(y) \;\Rightarrow\; p \in L_{q_3}(Q) \text{ с } p(x,t) \in \partial_{Cl}\psi(y(x,t)) \text{ для п.в } (x,t) \in Q.$$

При соответствующих условиях на коэффициенты A^i_α, данная задача может быть переписана в виде:

$$y' + A_1(y) + A_2(y) + \partial_{Cl}\varphi(y) \ni f, \qquad y(0) = \bar{0}, \tag{5.5}$$

где

$$f \in X^* = L_{q_1}(S; W^{-m_1,q_1}(\Omega)) + L_{q_2}(S; W^{-m_2,q_2}(\Omega)) + L_{q_3}(Q).$$

Каждый элемент $y \in W$, удовлетворяющий (5.5), называется обобщенным решением задачи (5.2)–(5.4).

Определение операторов A_i. Пусть $A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)$, определены в $Q \times \mathbb{R}^{N^i_1} \times \mathbb{R}^{N^i_2}$ и удовлетворяют условиям [17]:

почти для каждого $x,t \in$ Q отображение $\eta,\xi \to A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)$ непрерывно на $\mathbb{R}^{N^i_1} \times \mathbb{R}^{N^i_2}$;

$$\text{для всех } \eta,\xi \text{ отображение } x,t \to A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi) \text{ измеримо на } Q, \tag{5.6}$$

$$\text{для всех } u,v \in L^{p_i}(0,T;V_i) =: \mathcal{V}_i \quad A^i_\alpha(x,t,\delta_i u, D^{m_i}u) \in L^{q_i}(Q). \tag{5.7}$$

Тогда для каждого $u \in \mathcal{V}_i$ отображение

$$w \to a_i(u,w) = \sum_{|\alpha| \le m_i} \int\limits_Q A^i_\alpha(x,t,\delta_i u, D^{m_i}u) D^\alpha w \, dx\, dt,$$

непрерывно на $\mathcal{V}_i$ и тогда

$$\text{существует } A_i(u) \in \mathcal{V}_i^* \text{ такое, что } a_i(u,w) = \langle A_i(u), w\rangle. \tag{5.8}$$

Условия на A_i. Как и в [17, разделы 2.2.5, 2.2.6, 3.2.1], имеем

$$A_i(u) = A_i(u,u), \quad A_i(u,v) = A_{i1}(u,v) + A_{i2}(u),$$

где

$$\langle A_{i1}(u,v), w\rangle = \sum_{|\alpha| = m_i} \int\limits_Q A^i_\alpha(x,t,\delta_i u, D^{m_i}v) D^\alpha w \, dx\, dt,$$

$$\langle A_{i2}(u), w\rangle = \sum_{|\alpha|\le m_i-1} \int_Q A^i_\alpha(x,t,\delta_i u, D^{m_i}u) D^\alpha w\,dx\,dt.$$

Добавим следующие условия:

$$\langle A_{i1}(u,u), u-v\rangle - \langle A_{i1}(u,v), u-v\rangle \ \ge 0 \qquad \forall\, u,v\in \mathcal{V}_i; \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
&\text{если } \ u_j \rightharpoonup u \ \text{ в } \ \mathcal{V}_i, \ \ u'_j \rightharpoonup u' \text{ в } \mathcal{V}_i^* \\
&\text{и если } \langle A_{i1}(u_j,u_j) - A_{i1}(u_j,u), u_j - u\rangle \to 0, \\
&\text{тогда } A^i_\alpha(x,t,\delta u_j, D^{m_i}u_j) \rightharpoonup A^i_\alpha(x,t,\delta u, D^{m_i}u) \ \text{ в } \ L^{q_i}(Q);
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\text{коэрцитивность.} \tag{5.11}$$

Замечание 5.1. Как и в [17, теорема 2.2.8] достаточными условиями для (5.9), (5.10) являются такие:

$$\sum_{|\alpha|=m_i} A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)\xi_\alpha \frac{1}{|\xi|+|\xi|^{p_i-1}} \to +\infty \quad \text{при } \ |\xi|\to\infty$$

для почти всех $x,t\in Q$ и ограниченных $|\eta|$;

$$\sum_{|\alpha|=m_i} (A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi) - A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi^*))(\xi_\alpha - \xi^*_\alpha) > 0 \quad \text{при } \xi\ne\xi^*$$

почти для всех $x,t\in Q$ и $\forall\,\eta$.

Следующее условие достаточно для коэрцитивности:

$$\sum_{|\alpha|=m_i} A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)\xi_\alpha \ge c|\xi|^{p_i} \ \text{ для достаточно больших } |\xi|.$$

Достаточным условием для (5.7) (см. [17, с. 332]) является:

$$|A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)| \le c[|\eta|^{p_i-1} + |\xi|^{p_i-1} + k(x,t)], \qquad k\in L_{q_i}(Q). \tag{5.12}$$

Повторяя доказательства [17, теорема 3.2.1] и [17, 2, утверждение 2.2.6], получим следующее предложение

Предложение 5.1. *Пусть оператор* $A_i : \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_i^*$ $(i=1,2)$*, определенный в* (5.8)*, удовлетворяет* (5.6)*,* (5.7)*,* (5.9)*,* (5.10) *и* (5.11)*. Тогда* A_i *является псевдомонотонным на* W_i (*в классическом смысле*)*. Более того, он ограниченный, если выполняется* (5.12)*.*

При выполнении описанных выше условий, для каждого $f\in X^*$ существует обобщенное решение задачи (5.2)–(5.4) $y\in W$, полученное методом сингулярных возмущений.

Литература

[1] J.-P. Aubin, I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Mir, Moscow, 1988.

[2] J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhauser, 1990.

[3] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Editura Acad., Bucuresti, 1976.

[4] H. Brezis, *Problems unilatéraux* // J. Math. Pures Appl., **51** (1972), 1–168.

[5] F. E. Browder, P. Hess, *Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces* // J. Funct. Anal., **11** (1972), 251–294.

[6] S. Carl, D. Motreanu, *Extremal solutions of quasilinear parabolic inclusions with generalized Clarke's gradient* // Electronic J. Differential Equations, **191** (2003), 206—233.

[7] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1990.

[8] Z. Denkowski, S. Migorski and N.S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis. Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 2003.

[9] Yu. A. Dubinski, *Weak convergence in non-linear elliptic and parabolic equations* // Mat. Sb., **67** (1965), 609–642. (translated in Am. Math. Soc., II, Ser. **67**, (1968), 226–258).

[10] I. R. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[11] M. I. Kamenskii, V. V. Obukhovskii, P. Zecca, *On semilinear differential inclusions with lower semicontinuous nonlinearities* // Annali di Matem. pura ed appl.(IV) (1999), CLXXV.

[12] P. O. Kasyanov, *Galerkin method for a class of differential-operator inclusions with set-valued mappings of pseudomonotone type* // Naukovi visti NTUU "KPI" (2005), N 2, 139–151.

[13] P. O. Kasyanov, *Galerkin's method for one class of differential-operator inclusions* // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. (2005), N 9, 20–24.

[14] P. O. Kasyanov, V. S. Melnik, *Faedo-Galerkin method differential-operator inclusions in Banach spaces with maps of w_{λ_0}-pseudomonotone type* // Nats. Acad. Sci. Ukr., Kiev, Inst. Math. **2** (2005), N 1, 82–105.

[15] P. I. Kogut, O. V. Musejko, *On the S-homogenization of variational inequalities in Banach spaces* // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky (2001), N 5, 73–76.

[16] A. A. Kovalevsky, Fr. Nicolosi, *Boundedness of solutions of variational inequalities with nonlinear degenerated elliptic operators of high order* // Appl. Anal. **65** (1997), N 3–4, 225–249.

[17] J. L. Lions, *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[18] V. S. Melnik, *Multivariational inequalities and operational inclusions in Banach spaces with maps of a class $(S)_+$* // Ukr. Mat. Zh. **52** (2000), 1513–1523.

[19] V. S. Melnik, *About critical points of some classes multivalued maps* // Cybernetics and Systems Analysis (1997), N 2, 87–98.

[20] V. S. Melnik, *On operational inclusions in Banach spaces with densely defined operators* // System Research & Information Technologies (2003), N 3, 120–126.

[21] V. S. Melnik, *The topological methods in the theory of operator inclusions in Banach spaces* // Ukr. Mat. Zh. **58** (2006), N 2,4.

[22] V. S. Melnik, M. Z. Zgurovsky, *Ky Fan inequality and operational inclusions in Banach spaces* // Cybernetics and Systems Analysis (2002), N 2, 70–85.

[23] V. S. Melnik, M. Z. Zgurovsky, *Nonlinear Analysis and Control of Physical Processes and Fields*, Springer, Berlin, 2004.

[24] B. Pshenichniy, *Convex analysis and extremal problems*, Nauka, Moscow, 1980.

[25] M. Reed and B. Simon, *Methods of Mathematical Physics 1: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.

[26] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[27] I. V. Skrypnik, *Methods of investigation of nonlinear elliptic boundary problems*, Nauka, Moscow, 1990.

[28] A. A. Tolstonogov, *About solutions of evolutionary inclusions 1* // Siberian Math. J. **33** (1992), 145–162.

[29] A. A. Tolstonogov, J. I. Umanski, *About solutions of evolutionary inclusions 2* // Siberian Math. J. **33** (1992), 163–174.

[30] M. M. Vainberg, *Variational methods and method of monotone operators*, Wiley, New York, 1973.

[31] A. N. Vakulenko, V. S. Melnik, *On solvability and properties of solutions of one class of operator inclusions in Banach spaces* // Naukovi visti NTUU "KPI" (1999), N 3, 105–112.

[32] A. N. Vakulenko, V. S. Melnik, *On a class of operator inclusions in Banach spaces* // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. (1998), N 8, 20–25.

[33] A. N. Vakulenko, V. S. Melnik, *On topological method in operator inclusions whith densely defined mappings in Banach spaces* // Nonlinear Boundary Value Probl. (2000), N 10, 125–142.

Сведения об авторах

Павел О. Касьянов

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64
01033 Киев,
Украина
E-Mail: kasyanov@univ.kiev.ua