Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 3, 437 – 451

О спектре одномерных возмущений вольтерровых операторов в пространствах Соболева

Галина С. Ромащенко

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В работе исследованы вопросы полноты и базисности системы собственных и присоединенных векторов конечномерных возмущений вольтерровых операторов в пространстве Соболева $W_p^m[0,1]$.

2000 MSC. 81Q15, 47G10, 34L10, 47A55.

Ключевые слова и фразы. Вольтерровый оператор, оператор интегрирования, конечномерное возмущение, собственный вектор, полнота системы собственных функций.

1. Введение

Одномерное возмущение $R_1 = J + Q_1 = J + (\cdot, \phi)\psi$ оператора интегрирования

$$J : f \to \int_0^x f(t)\,dt \tag{1.1}$$

изучалось множеством авторов: [7–10, 13, 15–17, 19].

Так, в работе И. И. Кальмушевского [13] доказана полнота системы собственных и присоединенных векторов (СПВ) одномерного возмущения оператора интегрирования (1.1) в терминах функций ϕ и ψ. В работе М. М. Маламуда [17] найдены условия, при которых система СПВ оператора R_1 образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,1]$. Оказалось (см. [17]), что полнота и базисность системы СПВ оператора R_1 тесно связаны с полнотой и базисностью систем экспонент в

Статья поступила в редакцию 25.06.2007

ISSN 1810 – 3200.

пространстве $L_2[0,1]$. Так, в [13] для доказательства теоремы использован результат Ю. И. Любича о дефекте системы экспонент в пространстве $C[-\pi,\pi]$, а в [17] для доказательства базисности системы экспонент применялась теорема Левина–Головина [7, 14].

В дальнейшем одномерные возмущения оператора интегрирования изучались в работах Г. М. Губреева [9, 10]. В работах Г. М. Губреева и А. И. Коваленко [8], Г. М. Губреева [11] показано, что каждая полная и минимальная система экспонент в пространстве $L_2[0,1]$ совпадает с множеством собственных векторов оператора дифференцирования с подходящими обобщенными краевыми условиями.

Изучению спектральных свойств n-мерного возмущения более общих вольтерровых операторов вида

$$R_n f := K + Q_n = \int\limits_0^x k(x,t)f(t)\,dt + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^l f(t)\overline{\phi_i(t)}\,dt\psi_i(x) \qquad (1.2)$$

посвящены работы М. М. Маламуда [17], Г. М. Губреева [10], А. П. Хромова [19], М. М. Маламуда и Л. Л. Оридороги [18] и др. (см. литературу в [18], [19]). Отметим также, что в работах [10, 17] изучались одномерные возмущения степеней оператора интегрирования J^α.

В [16] вопрос о полноте системы СПВ оператора R_n вида (1.2) с помощью результатов о подобии оператору дробного интегрирования

$$J^\alpha : f \to \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\,dt, \qquad \alpha > 0 \qquad (1.3)$$

сведен к изучению полноты системы СПВ оператора $J^\alpha + Q_n$.

В настоящей работе мы распространяем результаты М. М. Маламуда из [17] случай операторов, действующих в пространствах Соболева $W_2^m[0,1]$. При этом вместо теоремы Левина–Головина мы используем результаты В. В. Власова и С. А. Иванова [6]. Сначала мы показываем, что система СПВ оператора R_1 не является полной, в отличие от случая пространства $L_2[0,1]$. Ее дефект равен m. После соответствующего добавления m векторов она образует базис Рисса в $W_2^m[0,1]$.

Автор благодарит своего научного руководителя М. М. Маламуда и Л. Л. Оридорогу за оказанную помощь в подготовке работы.

2. Обозначения и предварительные результаты

2.1. Пространства Лиувилля–Соболева

Обозначим $W_p^m[0,1]$ — пространство Соболева функций f, имеющих $m-1$ абсолютно непрерывную производную, причем $f^{(m)} \in L_p[0,1]$.

Обозначим $L_p^s[0,1]$ — пространство Лиувилля-Соболева. По определению, $f \in L_p^s[0,1]$, если f имеет обобщенную дробную производную $f^{(s-[s])}$ порядка $s-[s]$ и $f^{(s-[s])} \in W_p^{[s]}[0,1]$. Функции $f \in L_p^s[0,1]$ характеризуются следующим интегральным представлением:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{[s]+1} c_m \frac{x^{s-m}}{\Gamma(s-m+1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x (x-t)^{s-1} g(t)\, dt, \tag{2.1}$$

где $c_m = f^{(s-m)}(0)$ и $g(x) = f^{(s)}(x)$, (см. [12]).

Положим $L_{p,0}^s[0,1] := \{f \in L_p^s[0,1] \colon f^{(s-m)}(0) = 0,\ 1 \le m \le [s]+1\}$ и $L_{p,0}^0[0,1] := L_p^0[0,1] := L_p[0,1]$.

2.2. Базисность систем экспонент в пространстве Соболева

Напомним некоторые факты, касающиеся полноты и базисности систем экспонент в пространствах $W_2^m[0,1]$.

Впервые базисность Рисса системы экспонент в пространстве Соболева $W_2^m[0,1]$ при целых m была исследована Д. Л. Расселом в [5]. Им получен следующий результат:

Теорема 2.1. *Пусть семейство экспонент $\{e^{\lambda_n t}\}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,1]$. Тогда, добавляя к нему m экспонент $\{e^{\mu_k t}\}$, где $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ и все μ_k различные, и проводя соответствующую нормировку, получим базис Рисса в пространстве $W_2^m[0,1]$.*

Начиная с работ Б. Я. Левина [14] и В. Д. Головина [7], базисность системы экспонент $\{e^{\lambda_n t}\}_{i=1}^\infty$ формулируют в терминах целой функции с корнями $\{\lambda_n\}_{i=1}^\infty$, которые являются показателями экспонент. Такая функция называется порождающей для системы $\{\lambda_n\}_{i=1}^\infty$.

В работе [6] рассмотрены следующие порождающие функции

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} a_{kj} \lambda^j e^{-\lambda h_k} + \sum_{j=0}^{m} \int_0^h B_j(\tau) e^{-\lambda\tau}\, d\tau.$$

Здесь $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_n = h$, $B_j(\tau) \in L_2(0,h)$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}$ — нули функции $L(\lambda)$ с кратностями ν_i. Для произвольного $\lambda \in \Lambda$ обозначим $D_\lambda(r)$ — круг радиуса r с центром в точке λ. Далее, обозначим $G^{(q)}(r)$, $q = 1,2,\ldots$ — компоненту связности множества $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda(r)$. Пусть $\Lambda^{(q)}(r)$ — последовательность точек из Λ, лежащих в $G^{(q)}(r)$, а $\mathcal{L}^{(q)}(r)$ — подпространство, образованное соответствующими экспонентами $x^n e^{\lambda x}$, $\lambda \in \Lambda^{(q)}(r)$, $n \in \{0,1,\ldots,k_\lambda - 1\}$. Впоследствии нам будет необходима следующая теорема, доказанная в [6].

Теорема 2.2 (см. [6]). *Пусть $a_{0m} \neq 0$ и $a_{nm} \neq 0$. Тогда семейство подпространств $\{\mathcal{L}^{(q)}(r)\}$ образует базис Рисса в пространстве $W_2^m[-h,0]$.*

Лемма 2.1 ([6]). *Пусть семейство*

$$E = \{e^{i\lambda_i x}, xe^{i\lambda_i x}, \ldots, x^{\nu_i - 1}e^{i\lambda_i x}\}_{i=1}^{\infty}$$

со спектром $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ минимально в пространстве $W_2^m[-h,0]$ и его дефект равен 1. Тогда добавляя к семейству E элемент $e^{\mu t}$, где $\mu \in \mathbb{C}\setminus\Lambda$, либо элемент $t^r e^{\mu_q t}$ (если элементы $e^{\mu_q t}, te^{\mu_q t}, \ldots, t^{r-1}e^{\mu_q t}$ уже лежат в E), получим полную в $W_2^m[-h,0]$ систему.

3. Основные результаты

3.1. n-мерные возмущения вольтерровых операторов

Рассмотрим оператор $R_n = K + Q_n$ вида

$$R_n : f \to \int_0^x k(x,t)f(t)\,dt + \int_0^l f(t)\overline{\phi_1(t)}\,dt\,\psi_1(x) + \cdots + \int_0^l f(t)\overline{\phi_n(t)}\,dt\,\psi_n(x). \quad (3.1)$$

Следующая теорема распространяет теорему 1 из [17] на случай пространства Соболева $W_2^m[0,1]$ и совпадает с ней при $m = 0$, т. е. в случае пространства $L_2[0,1]$.

Теорема 3.1. *Пусть ядро $k(x,t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $k(x,x) = 1$;
2. $D_t D_x k(x,t) \in W_p^m(\Omega)$, *где* $\Omega = \{(x,t) : 0 < t < x < 1\}$;

а $\phi_i(t), \psi_i(t) \in W_2^m[0,1]$.

Тогда оператор R_n *вида* (3.1) *либо не имеет собственных чисел, отличных от нуля, либо имеет их бесконечно много.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [17]. В [2] показано, что при выполнении условий теоремы операторы K и J подобны в пространствах Соболева $W_2^m[0,1]$. Это означает, что существует ограниченный и ограниченно обратимый в пространстве $W_2^m[0,1]$ оператор V, который сплетает операторы K и J: $V^{-1}KV = J$. Легко видеть, что

$$V^{-1}R_nVf = Jf + \int_0^l f(t)\overline{\tilde{\phi}_1(t)}\,dt\tilde{\psi}_1(x) + \cdots + \int_0^l f(t)\overline{\tilde{\phi}_n(t)}\,dt\tilde{\psi}_n(x), \quad (3.2)$$

где функции $\tilde{\phi}_i(x) := V^*\phi$ и $\tilde{\psi}_i(x) := V^{-1}\psi_i$ принадлежат пространству $W_2^m[0,1]$. Следовательно, доказательство достаточно провести для оператора интегрирования J (1.1). В дальнейшем вместо $\tilde{\phi}_j$ и $\tilde{\psi}_j$ в (3.2) мы будем просто писать ϕ_j и ψ_j, что не приведет к недоразумению.

Пусть $R_nf = \lambda f$, т. е. $(J - \lambda I)f = -\sum_{i=1}^n b_i(f)\psi_i(x)$, откуда

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k(f)}{\lambda}\left[\psi_k(x) + \frac{1}{\lambda}\int_0^x \psi_k(t)e^{(x-t)\lambda}\,dt\right], \quad (3.3)$$

где $b_k(f) = (f, \phi_k) = \int_0^l f(t)\overline{\phi_k(t)}\,dt$. Отметим, что не все числа $b_k(f)$ равны нулю. В противном случае из соотношения (3.3) следовало бы, что $f(x) = 0$. Умножив последовательно равенство (3.3) скалярно на $\phi_i(x)$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$, получим систему уравнений

$$b_i(f) = \sum_{k=1}^n b_k(f)\left[\frac{a_{ik}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^l e^{t/\lambda}P_{ik}\right], \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \quad (3.4)$$

Здесь

$$P_{ik}(t) := \int_t^l \overline{\phi_i(x)}\psi_k(x-t)\,dx, \quad a_{ik} := (\psi_k, \phi_i) = \int_0^l \overline{\phi_i(x)}\psi_k(x)\,dx. \quad (3.5)$$

Система уравнений (3.4) имеет нетривиальное решение, поскольку не все $b_k(f)$ $(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$ равны нулю и, следовательно, все отличные от нуля собственные числа оператора R_n удовлетворяют уравнению

$$F(\lambda) = \det \|\delta_{ij} + c_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1}^{n} = 0, \tag{3.6}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера и

$$c_{ij}(\lambda) := -\left[\frac{a_{ij}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^l e^{t/\lambda} P_{ij}(t)\,dt\right]. \tag{3.7}$$

Докажем обратное, т. е. что все корни уравнения $F(\lambda) = 0$ $(\lambda \neq 0)$ являются собственными числами оператора $J + Q_n$. Для этого заметим, что если $F(\lambda) = 0$ для некоторого $\lambda \neq 0$, то система уравнений (3.3) имеет нетривиальное решение $b_i(f)$ $(i \in \{1, 2, \dots, n\})$. Составим вектор $f = \sum_{k=1}^{n} b_k (J - \lambda E)^{-1} \psi_k$ и покажем, что он будет собственным для оператора R_n. Обозначив для этого через $\tilde{Q}_i$ функционал $\tilde{Q}_i g = (g, \phi_i)$, получим

$$\begin{aligned}
(R_n - \lambda E)f &= (J + Q_n - \lambda E)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i (J - \lambda E)^{-1}\psi_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i\psi_i + Q_n\left(\sum_{k=1}^{n} b_k (J - \lambda E)^{-1}\psi_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i\psi_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i\left[\sum_{k=1}^{n} b_k (J - \lambda E)^{-1}\psi_k\right]\psi_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[b_i + \sum_{k=1}^{n} b_k (\tilde{Q}_i)(J - \lambda E)^{-1}\psi_k\right]\psi_i(x).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Поскольку b_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, определялись как решение системы (3.4) и

$$\tilde{Q}_i (J - \lambda E)^{-1}\psi_k = -\frac{a_{ik}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^l P_{ik}(t) e^{t/\lambda}\,dt, \tag{3.9}$$

то из выражения (3.8) следует, что $(R_n - \lambda E)f = 0$, чем и доказано обратное утверждение. Используя абсолютную непрерывность функций $\psi(x)$ $(i \in \{1, \dots, n\})$, проинтегрируем по частям выражение для $c_{ik}(\lambda)$ из (3.7), полагая $z = 1/i\lambda$. В результате найдем

$$C_{ik}(z) = -iz\int\limits_0^l e^{izt} u_{ik}(t)\,dt, \tag{3.10}$$

где

$$u_{ik}(t) = \psi_k(0)\overline{\phi_i(t)} + \int\limits_t^l \overline{\phi_i(x)}\psi_k'(x-t)\,dx. \tag{3.11}$$

Рассмотрим матрицу

$$\{u_{ik}(t)\}_{i,k=1}^n = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \dots & u_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}(t) & u_{n2}(t) & \dots & u_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\sigma_k(t)$ сумму ее главных миноров k-го порядка, подсчитанную так, что под умножением двух функций $f(t)$ и $g(t)$ понимается их свертка $(f * g)(t)$. Например, для матрицы $\{u_{ik}(t)\}_{i,k=1}^2$ второго порядка $\sigma_2(t) = (u_{11} * u_{22})(t) - (u_{12} * u_{21})(t)$.

Раскроем определитель в выражении (3.6), считая $z = 1/i\lambda$ и пользуясь выражением (3.10) для $C_{ik}(z)$:

$$F(1/iz) := \tilde{F}(z) = 1 + \sum_{k=1}^n (-iz)^k \int\limits_0^{kl} e^{izt}\sigma_k(t)\,dt. \tag{3.12}$$

Проинтегрировав по частям в выражении (3.11), убедимся, что $u_{ik}(t) \in W_1^m[0,l]$, так как $\phi_k, \psi_k \in W_2^m[0,l]$ по условию. Можно показать, что $\sigma_k(t) \in W_1^{k-1}[0,kl]$ и

$$\begin{aligned} \sigma_k(0) = \sigma_k'(0) = \dots = \sigma_k^{(k-2)}(0) \\ = \sigma_k(kl) = \sigma_k'(kl) = \dots = \sigma_k^{(k-2)}(kl) = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Таким образом, возможно интегрирование по частям в выражении (3.12), которое с учетом последних соотношений дает

$$\tilde{F}(z) = 1 - iz \int\limits_0^{nl} e^{izt}\left[\sigma_1(t) + \sigma_2'(t) + \dots + \sigma_n^{(n-1)}(t)\right] dt. \tag{3.14}$$

При этом, так как носитель функции $\sigma_k(t)$ содержится в отрезке $[0,kl]$, считаем $\sigma_k(t)$ продолженной нулем на отрезок.

Если $\tilde{F}(z)$ имеет хотя бы один корень z_0 ($\tilde{F}(z_0) = 0$), то ее легко преобразовать к виду $\tilde{F}(z) = (z - z_0)G(z)$, где

$$G(z) = -i\int\limits_0^{nl} e^{izt}\left[s(t) + iz_0\int\limits_l^{nl} e^{iz_0(\xi - t)}s(\xi)\,d\xi\right] dt, \tag{3.15}$$

$$s(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2'(t) + \dots + \sigma_n^{(n-1)}(t). \tag{3.16}$$

Целая функция $G(z)$ имеет бесконечно много нулей. Таким образом, оператор R_n либо не имеет собственных чисел, либо имеет их бесконечно много. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть* $\phi(t), \psi(t) \in W_2^m[0,1]$. *Тогда оператор* $R_1 f = (J+Q_1)f = Jf+(f,\phi)\psi$, $(Q_1 \neq 0)$ *не имеет собственных чисел тогда и только тогда, когда*

$$u(t) = \psi(0)\overline{\phi(t)} + \int_t^l \overline{\phi(x)}\psi'(x-t)\,dx \equiv 1. \tag{3.17}$$

Доказательство. В доказательстве предыдущей теоремы было показано, что отсутствие у оператора R_1 собственных чисел эквивалентно отсутствию корней у функции $\tilde{F}(z)$. При $n=1$ из общего вида (3.14) следует, что функция $\tilde{F}(z)$ не будет иметь корней в том и только том случае, если $u(t) \equiv 0$ ($\tilde{F}(z) = 1$) либо $u(t) \equiv -1$ ($\tilde{F}(z) = e^{izt}$). Покажем, что первый случай невозможен. Если $\psi(0) \neq 0$, то из равенства

$$u(t) = \psi(0)\overline{\phi(t)} + \int_t^l \overline{\phi(x)}\psi'(x-t)\,dx = 0 \tag{3.18}$$

имеем $\phi(t) \equiv 0$. Если $\psi(0) = 0$, то, применяя теорему Тичмарша, из равенства (3.18) получаем $\psi'(x) = 0$ $(0 \le x \le \alpha)$ и $\phi(x) = 0$ $(\alpha \le x \le l)$. Но тогда $\psi(x) \equiv 0$ $(0 \le x \le \alpha)$, так как $\psi(0) = 0$ и $\psi(x) \in W_2^m[0,1]$, а отсюда $Q_1 = 0$, т. е. $R_1 = J$. $\square$

3.2. Одномерные возмущения оператора J^α

Теорема 3.2. *Пусть* $k(x) \in L_2^{\alpha+m-2}[0,1]$ *при некотором вещественном* α, *которое удовлетворяет условию* $\alpha > m - 1/2$ *либо* $\alpha \in \mathbb{N}$, $k(x) \in L_{2,0}^{\alpha}[0,1] \cap L_1^{\alpha+1}[0,1]$, $k^{(\alpha-1)}(0) = 1$. $\phi(x)$, $\psi(x) \in W_2^m[0,1]$. *Тогда оператор*

$$Rf = (K+Q)f = \int_0^x k(x-t)f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\phi(t)\,dt\psi(x) \tag{3.19}$$

имеет в $W_2^m[0,1]$ *бесконечно много собственных чисел, если* $Q \neq 0$.

Доказательство. Согласно теореме 3.5 из [4], оператор K подобен оператору J^α $(\alpha > 1)$ в пространстве $W_2^m[0,1]$. Поэтому достаточно доказать теорему для оператора $R_1 := J^\alpha + Q$. Пусть $R_1 f = \lambda f$

($\lambda \neq 0$). Тогда $(J^\alpha - \lambda E) = -Qf$, откуда $f = -(J^\alpha - \lambda E)^{-1}Qf$. Но $Qf = c\psi$, где $c = (f, \phi)$, причем $c \neq 0$, иначе бы $f(x) = 0$. Итак, если λ ($\lambda \neq 0$) — собственное значение оператора R_1, то отвечающий ему собственный вектор пропорционален $(J^\alpha - \lambda E)^{-1}\psi$. Отсюда

$$\begin{aligned}0 = (J^\alpha + Q - \lambda E)(J^\alpha - \lambda E)^{-1}\psi \\ = \psi(x) + Q(J^\alpha - \lambda E)^{-1}\psi \\ = \psi(x) + [\tilde{Q}(J^\alpha - \lambda E)^{-1}\psi]\psi(x) \\ = [1 + \tilde{Q}(J^\alpha - \lambda E)^{-1}\psi]\psi(x), \quad (3.20)\end{aligned}$$

где $\tilde{Q}$ — функционал вида $\tilde{Q}f = (f, \phi) = \int_0^l f(t)\phi(t)\,dt$. Учитывая, что $\psi(x) \not\equiv 0$, из выражения (3.20) для собственных чисел оператора R_1 получаем уравнение

$$F(\lambda) = 1 + \tilde{Q}(J^\alpha - \lambda E)^{-1}\psi = 0. \tag{3.21}$$

Наоборот, пусть λ_0 — корень уравнения (3.21), т. е. $F(\lambda_0) = 0$. Тогда из равенств (3.20) получаем $g(x) = (J^\alpha - \lambda_0 E)^{-1}\psi(x)$ — собственный вектор оператора R_1, отвечающий числу λ_0. Так нули $F(\lambda)$ ($\lambda \neq 0$) и только они суть собственные числа оператора R_1. Распишем $F(z)$ ($z = 1/\lambda$) более подробно:

$$\begin{aligned}F(z) = 1 - z\tilde{Q}(E - zJ^\alpha)^{-1}\psi \\ = 1 - z\int_0^l \psi(x)\overline{\phi(x)}\,dx - z^2\int_0^l \overline{\phi(x)}\,dx \int_0^x H(x-t,\lambda)\psi(t)\,dt \\ = 1 - za - z^2\int_0^l H(t,\lambda)q(t)\,dt, \quad (3.22)\end{aligned}$$

где

$$a = (\psi, \phi); \qquad q(t) = \int_t^l \psi(x-t)\overline{\phi(x)}\,dx;$$

$$H(x-t,\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda^{k-1}(x-t)^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)} = (x-t)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha;\alpha).$$

Здесь $E_{1/\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha;\alpha)$ — функция Миттаг–Леффлера. Если $q(t) \not\equiv 0$, то $F(z)$ имеет бесконечно много нулей, так как это целая функция порядка роста $1/\alpha$ ($\alpha > 1$). Если $q(t) \equiv 0$, то из теоремы Титчмарша получаем $\psi(x) = 0$ ($0 \leq x \leq \gamma$) и $\phi(x) = 0$ ($l-\beta \leq x \leq l$), где $\gamma+\beta \geq l$. Но тогда $Q = 0$, т. е. $R_1 = K$.

□

3.3. Одномерные возмущения оператора J. Базисность системы СПВ

Следующая теорема является основным результатом данной работы. Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из [16].

Теорема 3.3. *Пусть $\phi(t), \psi(t) \in W_2^m[0,l]$, причем $u(l) \neq 0$, $u(0) \neq -1$, где $u(t)$ определяется равенством*

$$u(t) = \psi(0)\overline{\phi(t)} + \int\limits_t^l \overline{\phi(x)}\psi'(x-t)\,dx. \tag{3.23}$$

Тогда:

(*i*) *система собственных и присоединенных векторов F оператора*

$$R_1 f = (J+Q)f = \int\limits_0^x f(t)\,dt + \int\limits_0^l f(t)\overline{\phi(t)}\,dt\,\psi(x) \tag{3.24}$$

образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в $W_2^m[0,l]$. Ее дефект равен m.

(*ii*) *После добавления к семейству СПВ оператора R_1 некоторого семейства $\{h_i\}_{i=1}^m$ из m векторов полученная система $F \cup \{h_i\}$ образует базис Рисса в пространстве $W_2^m[0,1]$.*

Доказательство. (*i*) Пусть $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность собственных чисел оператора R_1 и

$$k_i = \dim \operatorname{span}\,\{(R_1-\lambda_i)^j : j \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Из доказательства теоремы 2.2 следует, что все корни порождающей функции $F(\lambda)$ вида (3.21) ($\alpha = 1$) являются собственными числами оператора R_1 и наоборот.

Покажем, что кратность $k(\lambda_i)$ произвольного нуля $\lambda_i \neq 0$ функции $F(\lambda)$ совпадает с размерностью k_i корневого подпространства оператора R_1, соответствующего числу λ_i. Действительно, если λ_i — нуль кратности $k(\lambda_i)$ для $F(\lambda)$, то $F^{(p)}(\lambda_i) = p!Q(J^\alpha - \lambda_i E)^{-(p+1)}\psi = 0$ ($1 \leq p \leq k(\lambda_i)$). Отсюда по индукции получаем, что вектор $(J^\alpha - \lambda_i E)^{-(p+1)}\psi$ является присоединенным вектором p-го порядка оператора R_1. Действительно, для $p = 0$ это следует из равенства (3.20) и вида (3.21) порождающей функции $F(\lambda)$. Предполагая, что это верно для $0 \le p \le m < k_i$, докажем его для $p = m+1$. Имеем

$$(J^\alpha + Q - \lambda_i E)^{m+1}(J^\alpha - \lambda_i E)^{-(m+1)}\psi$$
$$= (J^\alpha - \lambda_i E + Q)^m[(J^\alpha - \lambda_i E)^{-m}\psi + Q(J^\alpha - \lambda_i E)^{-(m+1)}\psi]$$
$$= (J^\alpha - \lambda_i E + Q)^m(J^\alpha - \lambda_i E)^{-m}\psi = 0. \quad (3.25)$$

Учитывая линейную независимость векторов $(J^\alpha - \lambda_i E)^{-(p+1)}\psi$ $(0 \le p \le k_i)$, получаем $k(\lambda_i) \le k_i$. Обращая доказательство, получим обратное неравенство.

Таким образом, λ_i — корень функции $F(\lambda)$ кратности k_i.

Пусть, $F = \{f_n, f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(k_n-1)}\}_{n=1}^{\infty}$ — система собственных и присоединенных векторов оператора R_1. Полагая $\lambda^{-1} = iz$, получаем

$$f_n^{(p-1)}(x) = (J - \lambda_n E)^{-p}\psi$$
$$= (iz_n)^p\left[\psi(x) + \sum_{k=1}^{p} C_p^k (iz_n)^k \int_0^x \frac{e^{iz_n t}}{(k-1)!}\psi(x-t)\,dt\right]$$
$$= (iz_n)^p\left[\psi(x) + \sum_{k=1}^{p} C_p^k \alpha_{k-1}(x, iz_n)\psi(0)\right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{p} C_p^k \alpha_{k-1}(0, iz_n)\psi(x) + \sum_{k=1}^{p} C_p^k \int_0^x \alpha_{k-1}(x, iz_n)\psi'(x-t)\,dt\right]$$
$$= (\psi(0)E + G)\left\{\sum_{k=1}^{p} C_p^k \alpha_{k-1}(x, iz_n)\right\}, \quad (3.26)$$

где

$$\alpha_k(x, iz) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{t^{k-m}(iz)^{k-m}}{(k-m)!} e^{izt} \quad (3.27)$$

и введен оператор

$$(\psi(0)E + G)f = \psi(0)f(x) + \int_0^x \psi'(x-t)f(t)\,dt. \quad (3.28)$$

Из (3.26) следует, что присоединенный вектор $g_n^{(p-1)}(x)$ p-го порядка, который не является присоединенным вектором порядка $p-1$, имеет вид

$$g_n^{(p-1)}(x) = (\psi(0)E + G)\left\{\frac{x^{p-1}e^{iz_nx}}{(p-1)!}\right\}$$
$$= \psi(0)\frac{x^{p-1}e^{iz_nx}}{(p-1)!} + \int_0^x \psi'(x-t)\frac{t^{p-1}e^{iz_nt}}{(p-1)!}\,dt. \quad (3.29)$$

Поскольку $\psi(0) \neq 0$, то оператор $\psi(0)E + G$ ограничен и имеет ограниченный обратный в $W_2^m[0,1]$. Следовательно, для доказательства теоремы необходимо установить, что система

$$E = \{e^{iz_ix}, xe^{iz_ix}, \ldots, x^{k_i-1}e^{iz_ix}\}_{i=1}^{\infty} \quad (3.30)$$

порождает базис Рисса в $L_2[0,l]$.

Отметим, что z_n — корни функции

$$F(z) = 1 - iz\int_0^l e^{izt}u(t)\,dt. \quad (3.31)$$

Здесь $u(t)$ определяется равенством (3.23). Поскольку $u(t) \in W_1^m[0,1]$ вместе в $\phi(x)$ и $\psi(x)$, то возможно интегрирование по частям:

$$F(z) = 1 + u(0) - u(l)e^{izt} - \int_0^l e^{izt}u'(t)\,dt. \quad (3.32)$$

Применяя теорему 2.2 при $m = 0$ и учитывая, что $u(0) \neq -1$ и $u(l) \neq 0$, получаем что система E вида (3.30) образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,l]$. Из теоремы 2.1 следует, что система F образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в $W_2^m[0,1]$, и ее дефект в $W_2^m[0,1]$ равен m.

(ii) Применим лемму 2.1 к системе E, т.е. пополним ее набором экспонент вида e^{μ_it}, где $\mu_i \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, $\mu_i \neq \mu_k$ при $i \neq k$. По теореме Д. Л. Рассела 2.1 новая система экспонент $E_1 := E \cup \{e^{\mu_it}\}_{i=1}^m$ образует базис Рисса в пространстве $W_2^m[0,1]$. После чего применяя к полученной системе ограниченный оператор $(\psi(0)E+G)^{-1}$ и используя формулу (3.29), получим систему векторов, которая образует базис Рисса в $W_2^m[0,1]$. □

Замечание 3.1. Из равенства (3.32) следует, что оператор R_1 имеет конечное число кратных собственных значений.

3.4. Одномерные возмущения вольтеррова оператора

Следствие 3.2. *Пусть ядро* $k(x,t)$ *оператора*

$$Rf := \int_0^x k(x,t)f(t)\,dt + \varepsilon \int_0^l f(t)\overline{\phi(t)}\,dt\psi(x) \tag{3.33}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1. $k(x,x) = 1$*;*
2. $D_t D_x k(x,t) \in W_p^m(\Omega)$*, где* $\Omega = \{(x,t) : 0 < t < x < 1\}$*,*

а $\phi(t), \psi(t) \in W_2^m[0,1]$*, причем* $u(l) \neq 0$*, где* $u(t)$ *определяется равенством* (3.23)*. Тогда*

(*i*) *при всех* $\varepsilon \neq 0$*, кроме, быть может, одного, система* F *собственных и присоединенных векторов оператора* R *вида (3.33) образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в* $W_2^m[0,l]$*. Ее дефект равен* m*.*

(*ii*) *После добавления к семейству СПВ оператора* R *некоторого семейства* $\{h_i\}_{i=1}^m$ *из* m *векторов полученная система* $F \cup \{h_i\}$ *образует базис Рисса в пространстве* $W_2^m[0,1]$*.*

Доказательство. При выполнении условий 1 и 2 на ядро $k(x,t)$ операторы K и J подобны в пространствах Соболева $W_2^m[0,1]$ (см. [2]). Это означает, что существует ограниченный и ограниченно обратимый в пространстве $W_2^m[0,1]$ треугольный оператор V следующего вида:

$$V : f \to e^{\left(\int_0^x D_x k(t,t)dt\right)}\left(f(x) + \int_0^x N(x,t)f(t)\,dt\right), \tag{3.34}$$

который сплетает операторы K и J: $V^{-1}KV = J$. Тогда

$$V^{-1}RVf = Jf + \int_0^l f(t)\overline{\tilde{\phi}(t)}\,dt\tilde{\psi}(x), \tag{3.35}$$

причем $\tilde{\phi}(x) := V^*\phi, \tilde{\psi}(x) := \varepsilon V^{-1}\psi_i \in W_2^m[0,1]$. Из общего вида оператора преобразования V находим: $\tilde{\psi}(0) = \varepsilon\psi(0)$ и $\tilde{\phi}(l) = \phi(l)$, следовательно, выполнено условие $u(l) = \tilde{\psi}(0)\overline{\tilde{\phi}(l)} \neq 0$, где $u(t)$ определено равенством (3.23).

Исключим из рассмотрения то значение ε_0, при котором $u(0) = -1$. Покажем, что таких ε_0 не более одного. Действительно, из равенства

$$u(0) = \varepsilon\psi(0)\overline{\phi(0)} + \varepsilon \int\limits_0^l \overline{\phi(x)}\psi'(x)\,dx = -1$$

следует, что либо

$$\varepsilon = -\left(\psi(0)\overline{\phi(0)} + \int\limits_0^l \overline{\phi(x)}\psi'(x)\,dx\right)^{-1},$$

либо

$$\psi(0)\overline{\phi(0)} + \int\limits_0^l \overline{\phi(x)}\psi'(x)\,dx = 0,$$

и такого ε не существует.

Далее доказательство повторяет ход доказательства теоремы 3.3 для оператора $J + (\cdot, \tilde{\phi})\tilde{\psi}$.

$\square$

Литература

[1] S. A. Avdonin, S. A. Ivanov, *The Levin-Golovin Theorem for Sobolev Spaces* // Math. Notes, **68** (2000), N 2, 145–153.

[2] G. S. Dud'eva, *On similarity of Volterra operators in Sobolev spaces* // Methods of Funct. Analysis and Topology, **5** (1999), N 2, 1–11.

[3] R. Paley, N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain.* Publ. Amer. Mat. Soc., New York, 1934.

[4] G. S. Romashchenko, *On similarity of convolution Volterra operators in Sobolev spaces* // Methods of Funct. Analysis and Topology, **12** (2006), N 3, 286–295.

[5] D. L. Russel, *Nonharmonic Fourier series in the control theory of distributed parameter systems* // J. Math. Anal., **18** (1967), N 3, 542–559.

[6] V. V. Vlasov, S. A. Ivanov, *Sobolev space estimates for solutions of equations with delay, and the basis of divided differences* // St. Petersburg Math. J., **15** (2004), 545–561.

[7] В. Д. Головин, *О биортогональных разложениях в* L_2 // Зап. мех.-мат. ф-та ХГУ и Харьк. мат. о-ва, **30** (1964), N 4, 18–29.

[8] Г. М. Губреев, А. И. Коваленко, *Критерий полноты корневых подпространств оператора дифференцирования с абстрактными краевыми условиями* // Мат. зам., **30** (1981), N 4, 543–552.

[9] Г. М. Губреев, *Об одном классе безусловных базисов гильбертовых пространств и о проблеме подобия диссипативных вольтерровых операторов* // Матем. сб., **183** (1992), N 9, 105–146.

[10] Г. М. Губреев, *О спектральном разложении конечномерных возмущений диссипативных операторов* // Труды ММО, М., УРСС, **64** (2003), 90–140.

[11] Г. М. Губреев, *Спектральный анализ биортогональных разложений функций в ряды экспонент* // Изв. РАН. Сер. матем., **53** (1989), N 6, 1236–1268.

[12] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М.: Наука, 1966.

[13] И. И. Кальмушевский, *О полноте собственных и присоединенных функций некоторых операторов в* $L_2[0,1]$ // Изв. вузов, (1970), N 1, 60–64.

[14] Б. Я. Левин, *О базисах из показательных функций в* L_2 // Зап. мех.-мат. ф-та ХГУ и Харьк. мат. о-ва, **27** (1961), N 4, 39–48.

[15] Ю. И. Любич, *О собственных и присоединенных функциях оператора диференцирования* // Изв. вузов, (1959), N 4, 94–103.

[16] М. М. Маламуд, *Об одномерных возмущениях вольтерровых операторов* // Докл. АН УССР, сер. А, (1980), N 7, 26–29.

[17] М. М. Маламуд, *Замечания о спектре одномерных возмущений вольтерровых операторов* // Математ. физика, **32** (1982), 99–105.

[18] M. M. Malamud, L. L. Oridoroga, *Analog of the Birkhoff Theorem and the Completeness Results for Fractional Order Differential Equations* // Russian J. Math. Phys., **8 (3)** (2001), 287—308.

[19] А. П. Хромов, *О порождающих функциях вольтерровых операторов* // Мат. сб., **102** (1977), N 3, 457–472.

Сведения об авторах

Галина С. Ромащенко

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: gal_romash@mail.ru