Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 3, 355 – 369

Дифференциальный оператор четвертого порядка с локальными точечными взаимодействиями

Наталья И. Голощапова, Леонид Л. Оридорога

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В работе некоторые положения теории операторов Штурма–Лиувилля с локальными точечными взаимодействиями на дискретном множестве переносится на операторы 4-го порядка.

2001 MSC. 47A10, 34L40.

Ключевые слова и фразы. Точечные взаимодействия, симметрический оператор, индексы дефекта, граничные тройки, скобки Лагранжа.

1. Введение

Операторам с точечными взаимодействиями посвящено достаточно много работ ([1–3, 5, 10, 13, 14]). Среди них следует выделить операторы задаваемые формальными дифференциальными выражениями

$$l_{M,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta(x - p_k)$$

и

$$l_{M,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta'(x - p_k),$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака, и $M = \{p_k\}_{k=1}^{n}$, $n \le \infty$.

В настоящей работе мы распространяем часть результатов из [5] на случай дифференциального оператора четвертого порядка. А именно, рассмотрим дифференциальную операцию $\frac{d^4}{dx^4}$ как оператор в гильбертовом пространстве $\bigoplus_i L^2(I_i)$, где $\bigcup_i I_i = (a, b) \setminus \{p_i\}$.

Статья поступила в редакцию 25.06.2007

Максимальный T_M^{max} и минимальный T_M^{min} операторы определяются следующим образом:

$$\operatorname{dom} T_M^{max} = \{f \in L^2(a,b) : f, f', f'', f''' \in AC_{loc}((a,b) \setminus M), \\ f^{IV} \in L^2(a,b)\},$$

$$T_M^{max} f = f^{IV}, \qquad f \in \operatorname{dom} T_M^{max},$$
$$\operatorname{dom} T'_M = \{f \in \operatorname{dom} T_M^{min} : \operatorname{supp} f \quad \text{компактен в} \quad (a,b) \setminus M\},$$
$$T_M^{min} = \overline{T_M^{max} \restriction \operatorname{dom} T'_M}.$$

Как правило, оператор с точечными взаимодействиями в точках $p_i \in M$ определяют (см., например, [1]) как самосопряженное расширение минимального оператора T_M^{min}, добавляя для каждого i граничные условия, связывающие p_i+ и p_i-. Однако, в случае бесконечного числа точек минимальный оператор имеет бесконечные индексы дефекта, что усложняет задачу построения самосопряженных расширений минимального оператора. В [5] для одномерного оператора Шредингера приводится конструкция, позволяющая обойти эту трудность и показывается, что классическая теория Штурма–Лиувилля (см., например, [9,11]) может быть обобщена на случай локальных точечных взаимодействий. В настоящей работе мы распространяем метод, предложенный в [5] на случай оператора четвертого порядка. Основная идея состоит в рассмотрении специального симметрического расширения $T_{0,\{U_p\}}$ (см. (2.6)) минимального оператора T_M^{min}. Оператор $T_{0,\{U_p\}}$ имеет конечные индексы дефекта, что значительно упрощает задачу построения самосопряженных расширений минимального оператора. Именно, мы показываем, что $n_-(T_{0,\{U_p\}}) = n_+(T_{0,\{U_p\}}) \leq 4$, и описываем дифференциальные операторы с точечными взаимодействиями как самосопряженные расширения вспомогательного оператора $T_{0,\{U_p\}}$.

В предложении 3.1 мы указываем граничные условия в точках взаимодействия, при которых справедлива оценка $n_\pm(T_{0,U_p}) \leq 3$. В предложении 3.2 для оператора Шредингера с локальными точечными взаимодействиями указаны условия, при которых индексы дефекта $n_\pm(T_{0,U_p})$ не являются максимальными, то есть принимают значения 0, либо 1.

2. Минимальный и максимальный операторы

Пусть $I = (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ — открытый конечный, или бесконечный интервал, $I \subseteq \mathbb{R}$. Минимальный T_0^I и максимальный операторы T^I, действующие в гильбертовом пространстве $L^2(I)$ и соответствующие дифференциальному выражению $\frac{d^4}{dx^4}$, определяются стандартным образом:

$$\operatorname{dom} T^I = \{f \in L^2(I) : f, f', f'', f''' \in AC_{loc}(I), f^{IV} \in L^2(I)\},$$

$$T^I f = f^{IV}, \quad f \in \operatorname{dom} T^I; \tag{2.1}$$

$$T_0^I = \overline{T^I \upharpoonright \operatorname{dom} T'}, \tag{2.2}$$

где

$$\operatorname{dom} T' = \{f \in \operatorname{dom} T^I : \operatorname{supp} f \text{ компактен в } I\}.$$

Отметим очевидное равенство $(T_0^I)^* = T^I$.

Нашей основной целью является описание точечных взаимодействий, сосредоточенных на дискретном множестве $M \subset I$. А именно, нас интересует случай, когда точки множества M накапливаются только к концам интервала I. Случаю, когда M имеет предельные точки внутри I (например, M — канторово множество) посвящены работы [3, 13] (см. также библиографию к ним).

Рассмотрим следующие дифференциальные операторы

$$\operatorname{dom} T_M^{max} = \{f \in L^2(I) : f, f', f'', f''' \in AC_{loc}(I \setminus M), f^{IV} \in L^2(I)\},$$
$$T_M^{max} f = f^{IV}, \quad f \in \operatorname{dom} T_M^{max}; \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{dom} T'_M = \{f \in \operatorname{dom} T_M^{min} : \operatorname{supp} f \quad \text{компактен в} \quad I \setminus M\}, \\ T_M^{min} = \overline{T_M^{max} \upharpoonright \operatorname{dom} T'_M}, \\ T_M^{min} \subset T_M^{max}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Разбивая $I \setminus M = \bigcup I_i$ на интервалы, получим соотношения

$$T_M^{max} = \bigoplus_i T^{I_i}, \qquad T_M^{min} = \bigoplus_i T_0^{I_i}, \qquad (T_M^{min})^* = T_M^{max}.$$

В случае бесконечного множества M симметрический оператор T_M^{min} имеет равные бесконечные индексы дефекта $n_\pm(T_M^{min}) = \infty$. Мы обойдем эту проблему, расширяя вначале T_M^{min} до симметрического оператора с конечными индексами дефекта и затем изучая самосопряженные расширения полученного оператора.

Заметим, что для $f \in \operatorname{dom} T^{max}$ функции f,f',f'',f''' имеют конечные правый и левый пределы во всех точках интервала I и, в частности, в точках множества M, хотя они не обязаны быть непрерывными в этих точках. Для $f, g \in T_M^{max}$ и $t \in I$ определим *скобки Лагранжа*

$$[f,g]_t := \overline{f(t)}g^{(3)}(t) - \overline{f^{(3)}(t)}g(t) + \overline{f'(t)}g^{(2)}(t) - \overline{f^{(2)}(t)}g'(t). \qquad (2.5)$$

Отметим, что скобки Лагранжа могут быть непрерывными в точках множества M даже для разрывных функций f, g и их производных. Мы выберем свойство непрерывности скобок Лагранжа в качестве определяющего при поиске самосопряженных расширений оператора T_M^{min}.

Определение 2.1. *Самосопряженный оператор $\widetilde{T}$ ($T_M^{min} \subset \widetilde{T} \subset T_M^{max}$) будем называть оператором с точечными взаимодействиями на множестве M, если скобки Лагранжа $[f,g]$ непрерывны на интервале I для любой пары $f, g \in \operatorname{dom}\widetilde{T}$.*

Как будет показано в дальнейшем, условие непрерывности скобок Лагранжа накладывается для локализации взаимодействий в отдельных точках, то есть исключает зависимость условий в одной точке от условий в других. Определим теперь симметрические расширения $T_{0,\{U_p\}}$ минимального оператора T_M^{min} следующим образом. Пусть для каждой точки $p \in M$ задана унитарная 4×4-матрица $\{U_p\}$. Положим

$$f_+^-(p) := \begin{pmatrix} f(p-) - if'''(p-) \\ f(p+) + if'''(p+) \\ f'(p-) - if''(p-) \\ f'(p+) + if''(p+) \end{pmatrix}, \quad f_-^+(p) := \begin{pmatrix} f(p+) - if'''(p+) \\ f(p-) + if'''(p-) \\ f'(p+) - if''(p+) \\ f'(p-) + if''(p-) \end{pmatrix}$$

и обозначим через $T_{\{U_p\}}$ и $T_{0,\{U_p\}}$ сужения оператора T_M^{max} на области определения

$$\operatorname{dom} T_{\{U_p\}} = \{f \in \operatorname{dom} T_M^{max} : f_-^+(p) = U_p f_+^-(p), \quad p \in M\},$$

$$\operatorname{dom} T'_{0,\{U_p\}} = \{f \in \operatorname{dom} T_{\{U_p\}} : \operatorname{supp} f \text{ компактен в } I\},$$

$$T_{0,\{U_p\}} = \overline{T_{\{U_p\}} \restriction \operatorname{dom} T'_{0,\{U_p\}}}. \qquad (2.6)$$

Очевидны следующие соотношения $T_M^{min} \subset T_{0,\{U_p\}} \subset T_{\{U_p\}} \subset T_M^{max}$. Забегая вперед, скажем, что смысл указанной конструкции заключается в том, что $T_{0,\{U_p\}}$ — симметрический оператор с конечными индексами дефекта.

Теорема 2.1. *(i) Для любых $f, g \in \operatorname{dom} T_{\{U_p\}}$ скобки Лагранжа $[f,g]_t$ непрерывны на интервале $I = (a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$.*

Кроме того, пределы $[f,g]_{a+}$ *и* $[f,g]_{b-}$ *существуют, и справедливо тождество Лагранжа*

$$(T_{\{U_p\}}f,g)-(f,T_{\{U_p\}}g)=[f,g]_{b-}-[f,g]_{a+}=:[f,g]_a^b. \qquad (2.7)$$

(ii) $T_{0,\{U_p\}}$ *симметричен и*

$$T_{0,\{U_p\}}{}^*=T_{\{U_p\}}.$$

Доказательство. (i) Непрерывность скобок Лагранжа в любой точке $p\in M$ вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}[f,g]_{p-}-[f,g]_{p+}&=\frac{i}{2}(f_+^-(p),g_+^-(p))_{\mathbb{C}^4}-\frac{i}{2}(f_-^+(p),g_-^+(p))_{\mathbb{C}^4}\\&=\frac{i}{2}(U_pf_+^-(p),U_pg_+^-(p))_{\mathbb{C}^4}-\frac{i}{2}(f_-^+(p),g_-^+(p))_{\mathbb{C}^4}=0. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Пусть дан отрезок $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Так как множество $[\alpha,\beta]\cap M$ конечно, мы имеем

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\Big(\overline{(T_{\{U_p\}}f)(t)}g(t)-\overline{f(t)}(T_{\{U_p\}}g)(t)\Big)\,dt&=[f,g]_{\beta-}-[f,g]_{\alpha+}\\&+\sum_{p\in[\alpha,\beta]\cap M}([f,g]_{p-}-[f,g]_{p+})=[f,g]_{\beta-}-[f,g]_{\alpha+}. \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Устремляя α и β к концам интервала I, убеждаемся в существовании пределов $[f,g]_{a+}$, $[f,g]_{b-}$, а также в справедливости тождества Лагранжа.

(ii) Пусть $f\in\operatorname{dom}T_{0,\{U_p\}}$. Тогда согласно (2.9), для всех $g\in\operatorname{dom}T_{\{U_p\}}$ имеем $[f,g]_b^a=0$, то есть

$$(T_{0,\{U_p\}}f,g)=(f,T_{\{U_p\}}g).$$

Следовательно, оператор $T_{0,\{U_p\}}$ симметрический, и $T_{\{U_p\}}\subset T^*_{0,\{U_p\}}$. Остается лишь доказать включение $\operatorname{dom}T^*_{0,\{U_p\}}\subset\operatorname{dom}T_{\{U_p\}}$. Так как $\operatorname{dom}T^*_{0,\{U_p\}}\subset\operatorname{dom}T_M^{max}$, то достаточно проверить, что любая функция $f\in\operatorname{dom}T^*_{0,\{U_p\}}$ удовлетворяет соотношению

$$U_pf_+^-(p)=f_-^+(p),\quad p\in M. \qquad (2.10)$$

Выберем интервал $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ так, чтобы $(\alpha,\beta)\cap M=\{p\}$. Для любого $\xi\in\mathbb{C}^4$ существует функция $g\in\operatorname{dom}T_{0,\{U_p\}}$ с носителем в

(α, β) такая, что $\xi = g_-^+(p)$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}0 &= ({T_{0,\{U_p\}}}^* f, g) - (f, T_{0,\{U_p\}} g)\\ &= \int\limits_\alpha^\beta \left(\overline{(T_M^{max} f)(t)} g(t) - \overline{f(t)} (T_M^{max} g)(t)\right) = [f,g]_{p-} - [f,g]_{p+}\\ &\qquad = \frac{i}{2}(U_p f_+^-(p), U_p g_+^-(p))_{\mathbb{C}^4} - \frac{i}{2}(f_-^+(p), g_-^+(p))_{\mathbb{C}^4}\\ &\qquad\qquad = \frac{i}{2}(U_p f_+^-(p) - f_-^+(p), \xi)_{\mathbb{C}^4}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Полученное равенство доказывает соотношение (2.10), так как $\xi \in \mathbb{C}^4$ выбирается произвольно. □

Теорема 2.2. *Оператор $\widetilde{T}$ является оператором с точечными взаимодействиями на множестве M тогда и только тогда, когда $\widetilde{T}$ — самосопряженное расширение оператора $T_{0,\{U_p\}}$ для некоторого набора унитарных 4×4-матриц $\{U_p : \ p \in M\}$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение было доказано в теореме 2.1. С другой стороны, для каждой точки $p \in M$ из непрерывности скобок Лагранжа следует метрическая эквивалентность отображений $f \mapsto f_+^-(p)$ и $f \mapsto f_-^+(p)$:

$$\begin{aligned}0 &= ([f,g]_{p-} - [f,g]_{p+})\\ &= \frac{i}{2}(f_+^-(p), g_+^-(p))_{\mathbb{C}^4} - \frac{i}{2}(f_-^+(p), g_-^+(p))_{\mathbb{C}^4}, \quad f, g \in \operatorname{dom} \widetilde{T}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Отсюда следует существование унитарной матрицы U_p такой, что $U_p f_+^-(p) = f_-^+(p)$ для всех $f \in \operatorname{dom} T_{\{U_p\}}$. Таким образом, $\widetilde{T} \subset T_{\{U_p\}}$ и справедливы соотношения

$$T_{0,\{U_p\}} = T_{\{U_p\}}^* \subset \widetilde{T}^* = \widetilde{T}. \tag{2.13}$$

□

3. Индексы дефекта

В этой части мы займемся характеризацией индексов дефекта оператора $T_{0,\{U_p\}}$. Возьмем унитарную 4×4-матрицу

$$U_p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Равенство (2.10) перепишем следующим образом

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_1 & a_3 & -a_3 \\ b_1-1 & -b_1-1 & b_3 & -b_3 \\ c_1 & -c_1 & c_3 & -c_3 \\ d_1 & -d_1 & d_3-1 & -d_3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(p-) \\ if'''(p-) \\ f'(p-) \\ if''(p-) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-a_2 & -1-a_2 & -a_4 & -a_4 \\ -b_2 & -b_2 & -b_4 & -b_4 \\ -c_2 & -c_2 & 1-c_4 & -1-c_4 \\ -d_2 & -d_2 & -d_4 & -d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(p+) \\ if'''(p+) \\ f'(p+) \\ if''(p+) \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Ясно, что различные матрицы U_p порождают различные условия в точке $p \in M$. Выделим два вида точек, для которых мы охарактеризуем индексы дефекта.

Определение 3.1. *i) Точка $p \in M$, для которой обе матрицы в* (3.1) *невырождены, называется связывающей.*

ii) Точка $p \in M$, для которой обе матрицы в (3.1) *имеют ранг равный двум, называется несвязывающей.*

В первом случае условия справа линейно выражаются через условия слева и наоборот. Во втором случае условия независимы. Необходимо отметить, что возможен третий тип условий. Например,

$$f(p-) = f'''(p-), \quad f(p+) = f'''(p+), \quad f'(p\mp) = f''(p\pm).$$

В данном случае условия в точке взаимодействия p связываются лишь частично. Очевидно, что в случае оператора второго порядка подобная ситуация не может иметь места. Случай частично связывающих точек будет исследован в другой работе.

Отметим, что оператор $T_{0,\{U_p\}}$ имеет равные индексы дефекта. Доказательство может быть получено аналогично доказательству [5, теорема 3.1]), и мы его не приводим.

Определение 3.2. *Пусть $g \in L^1_{loc}(I)$ и $z \in \mathbb{C}$. Назовем функцию f решением уравнения $(\tau_{\{U_p\}} \pm z)f = g$, если $f, \dots, f'''$ локально абсолютно непрерывны в $I \setminus M$, $f^{IV} - zf = g$ и $U_p f^-_+(p) = f^+_-(p)$ для всех $p \in M$.*

Согласно этому определению мы имеем

$$\ker(T_{\{U_p\}} \pm i) \subset \{\text{решения уравнения } (\tau_{\{U_p\}} \pm i)u = 0\}. \tag{3.2}$$

Таким образом, число линейно независимых решений $(\tau_{\{U_p\}} \pm i)u = 0$ — верхняя грань индексов дефекта оператора $T_{0,\{U_p\}}$.

Теорема 3.1. *Число линейно независимых решений* $(\tau_{\{U_p\}} \pm z)u = 0$ *для* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *равно:*

(1) 4*, если* M *содержит конечное число несвязывающих точек;*

(2) 2*, если несвязывающие точки накапливаются к одному из концов интервала* I*, но не к обоим сразу;*

(3) 0*, если несвязывающие точки накапливаются к обоим концам интервала* I.

Доказательство. (1) Если все точки множества M связывающие, то решение уравнения $(\tau_{\{U_p\}} \pm z)u = 0$, определенное на подынтервале $I_0 \subset I$, может быть единственным образом продолжено на весь интервал I. Таким образом, мы имеем 4 линейно независимых решения. Если же в M содержится конечное число несвязывающих точек, то обозначим через x и y наименьшую и наибольшую несвязывающие точки, соответственно. Сужение решения $(\tau_{\{U_p\}} \pm z)u = 0$ на интервал (x, y) дает собственную функцию самосопряженного оператора, определяемого в $L^2(x, y)$ дифференциальным выражением $\tau_{\{U_p\}}$ и граничными условиями $\{U_p\}$, соответствующую $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Таким образом, $u \equiv 0$ в (x, y).

Далее, слева от x с точностью до констант определены два линейно независимых решения u_{1-} и u_{2-}, задаваемые граничными условиями в точке x. Аналогично, 2 решения u_{1+} и u_{2+} определены справа от y. Расширим теперь $u_{1-}, u_{2-}, u_{1+}, u_{2+}$ нулем на весь интервал I. Тогда общее решение уравнения $(\tau_{\{U_p\}} \pm z)u = 0$ имеет вид $\alpha_1 u_{1-} + \alpha_2 u_{2-} + \beta_1 u_{1+} + \beta_2 u_{2+}$, что доказывает пункт (1).

(2) Доказательство вытекает из тех же соображений, причем в этом случае либо u_{1-} и u_{2-}, либо u_{1+} и u_{2+} не существуют.

(3) $u_{1-}, u_{2-}, u_{1+}, u_{2+}$ не существуют. □

Определение 3.3. *Говорят, что решение* $(\tau_{\{U_p\}} \pm z)u = 0$ *лежит слева (справа) в* $L^2(a, b)$*, если и интегрируемо с квадратом в некоторой окрестности точки* a *(точки* b*).*

Теорема 3.2. *Лишь одно из следующих условий выполняется:*

(1) *несвязывающие точки не накапливаются к* b *и для любого* $z \in \mathbb{C}$ *каждое решение* $(\tau_{\{U_p\}} \pm z)u = 0$ *лежит справа в* $L^2(a, b)$*;*

(2) *несвязывающие точки накапливаются к* b*, или для любого* $z \in \mathbb{C}$ *по крайней мере одно решение* $(\tau_{\{U_p\}} \pm z)u = 0$ *не лежит справа в* $L^2(a, b)$.

В первом случае мы говорим, что имеет место *случай максимальной размерности* в точке b. Аналогичное утверждение справедливо и для точки a.

Теорема 3.3. *Индексы дефекта оператора $T_{0,\{U_p\}}$ не меньше удвоенного числа концевых точек интервала (a,b), для которых имеет место случай максимальной размерности.*

Доказательство. Если все точки связывающие, то утверждение очевидно. Если же точка $x \in M$ — несвязывающая, то $T_{0,\{U_p\}} = T_{(a,x)} \oplus T_{(x,b)}$. Отметим, что $T_{(x,b)}$ — самосопряженный оператор в $L^2(x,b)$, если несвязывающие точки накапливаются к b. С другой стороны, $T_{(x,b)}$ является ортогональной суммой конечного числа самосопряженных регулярных операторов и оператора $T_{(y,b)}$, действующего в $L^2(y,b)$, $y > x$, с самосопряженными граничными условиями в точке y. Таким образом, $T_{(y,b)}$, а значит и $T_{(p,x)}$, имеет индексы дефекта 2, 1 или 0 (в зависимости от того, лежат ли решения справа в $L^2(a,b)$). Аналогично рассматриваем оператор $T_{(a,x)}$. Учитывая представление $T_{0,\{U_p\}}$ в виде ортогональной суммы, получим требуемый результат. □

В следующем предложении приводится достаточное условие понижения индексов дефекта оператора $T_{0,\{U_p\}}$ не менее, чем на 1.

Предложение 3.1. *Пусть последовательность $\{p_k\}$ лежит на интервале (a,b) и монотонно возрастает, причём $\lim_{k\to\infty} p_k = b$. Пусть последовательность чисел μ_k такова, что выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \prod_{j=1}^{k} \mu_j \right|^2 (p_{k+1} - p_k) = \infty. \tag{3.3}$$

Пусть матрицы U_{p_k} взаимодействий в точках p_k имеют вид

$$U_{p_k} = \begin{pmatrix} \frac{2\mu_k}{1+|\mu_k|^2} & \frac{|\mu_k|^2-1}{1+|\mu_k|^2} & 0 & 0 \\ \frac{1-|\mu_k|^2}{1+|\mu_k|^2} & \frac{2\overline{\mu}_k}{1+|\mu_k|^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,k} & c_{4,k} \\ 0 & 0 & d_{3,k} & d_{4,k} \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} c_{3,k} & c_{4,k} \\ d_{3,k} & d_{4,k} \end{pmatrix}$ — унитарные матрицы, в которых $d_{4,k} \neq 0$.

Тогда для индексов дефекта оператора $T_{0,\{U_p\}}$ верна оценка $n_\pm(T_{0,\{U_p\}}) \leq 3$.

Доказательство. Согласно теореме 3.2, если оператор $T_{0,\{U_p\}}$ имеет максимальный дефект, то при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ (и, в частности, при $\lambda = 0$) все решения уравнения $T_{\{U_p\}}f(x) = \lambda f(x)$ лежат в пространстве $L^2(a,b)$. Поэтому, если хотя бы одно решение уравнения $T_{\{U_p\}}f(x) = 0$ не принадлежит пространству $L^2(a,b)$, то индекс дефекта оператора $T_{0,\{U_p\}}$ не может быть равен $(4,4)$.

В нашем случае связь между значениями в точках p_k- и p_k+ имеет вид

$$f(p_k+) = \mu_k f(p_k-), \quad f'''(p_k+) = \frac{1}{\overline{\mu_k}} f'''(p_k-),$$

$$\begin{aligned} f'(p_k+) = \frac{1}{2d_{4,k}}&((1 + c_{4,k} - d_{3,k} - c_{4,k}d_{3,k} + c_{3,k}d_{4,k})f'(p_k-) \\ &+ +i(1 + c_{4,k} + d_{3,k} + c_{4,k}d_{3,k} - c_{3,k}d_{4,k})f''(p_k-)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(p_k+) = \frac{1}{2d_{4,k}}&(i(-1 + c_{4,k} + d_{3,k} - c_{4,k}d_{3,k} + c_{3,k}d_{4,k})f'(p_k-) \\ &+ +(1 - c_{4,k} + d_{3,k} - c_{4,k}d_{3,k} + c_{3,k}d_{4,k})f''(p_k-)). \end{aligned}$$

Поскольку значения функции и её производных в точках p_k+ однозначно выражаются через значения функции и её производных в точках p_k-, то все точки p_k связывающие. При этом решение уравнения $T_{\{U_p\}}f(x) = 0$ с начальными условиями $f(a) = 1$, $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0$ на каждом из промежутков (p_k, p_{k+1}) постоянно и равно $\prod_{j=1}^{k} \mu_j$. Вследствие условия (3.3) данная функция не лежит в $L^2(a,b)$, и, следовательно, индекс дефекта построенного оператора $T_{0,\{U_p\}}$ не равен $(4,4)$. □

Замечание 3.1. Из предложения 3.1 следует, что для индексов дефекта оператора $T_{0,\{U_p\}}$ справедлива оценка $n_\pm(T_{0,\{U_p\}}) \le 2$, если одновременно выполняются условия:

(i) точки последовательности $\{p_k\}$ накапливаются к обоим концам интервала (a,b);

(ii) внутри интервала (a,b) найдется хотя бы одна несвязывающая точка;

(iii) справедливо (3.3).

Оказывается, что для дифференциального оператора второго порядка $-\frac{d^2}{dx^2}$ с точечными взаимодействиями возможно указать достаточное условие, при котором его индексы дефекта равны 0 или 1 даже в случае конечного интервала (по поводу бесконечного интервала и оператора с δ-взаимодействиями см. работу [14]). Отметим, что общая конструкция самосопряженных расширений для оператора $-d^2/dx^2$ с точечными взаимодействиями приведена в [5].

Предложение 3.2. *Пусть последовательность* $\{p_k\}$ *лежит на интервале* (a, b) *и монотонно возрастает, причём* $\lim_{k\to\infty} p_k = b$. *Пусть последовательность чисел* μ_k *такова, что выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \prod_{j=1}^{k} \mu_j \right|^2 (p_{k+1} - p_k) = \infty. \tag{3.4}$$

Пусть матрицы U_{p_k} *взаимодействий в точках* p_k *имеют вид*

$$U_{p_k} = \begin{pmatrix} \frac{2\mu_k}{1+|\mu_k|^2} & \frac{|\mu_k|^2-1}{1+|\mu_k|^2} \\ \frac{1-|\mu_k|^2}{1+|\mu_k|^2} & \frac{2\overline{\mu}_k}{1+|\mu_k|^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда индекс дефекта оператора $T_{0,\{U_p\}}$ *равен* $(1, 1)$.

Доказательство. Согласно [5, теореме 4.4], если оператор $T_{0,\{U_p\}}$ имеет максимальный дефект, то при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ (и, в частности, при $\lambda = 0$) все решения уравнения $T_{\{U_p\}} f(x) = \lambda f(x)$ лежат в пространстве $L^2(a, b)$. Поэтому, если хотя бы одно решение уравнения $T_{\{U_p\}} f(x) = 0$ не принадлежит пространству $L^2(a, b)$, то индекс дефекта оператора $T_{0,\{U_p\}}$ не может быть равен $(2, 2)$.

В нашем случае связь между значениями в точках p_k- и p_k+ имеет вид

$$f(p_k+) = \mu_k f(p_k-), \qquad f'(p_k+) = \frac{1}{\overline{\mu_k}} \cdot f'(p_k-)$$

Поскольку значения функции и её производных в точках p_k+ однозначно выражаются через значения функции и её производных в точках p_k-, то все точки p_k связывающие. При этом решение уравнения $T_{\{U_p\}} f(x) = 0$ с начальными условиями $f(\frac{a+b}{2}-) = 1$, $f'(\frac{a+b}{2}-) = 0$ (начальные условия задаются в крайней справа несвязывающей точке) постоянно на каждом из промежутков (p_k, p_{k+1}) и равно $\prod_{j=1}^{k} \mu_j$. Вследствие условия (3.4) данная функция не лежит в $L^2(a, b)$, и, следовательно, индекс дефекта построенного оператора $T_{0,\{U_p\}}$ равен $(1, 1)$. $\square$

Замечание 3.2. Из предложения 3.2 очевидно вытекает, что оператор $T_{0,\{U_p\}}$ является самосопряженным, если одновременно выполняются условия:

(i) точки последовательности $\{p_k\}$ накапливаются к обоим концам интервала (a,b);

(ii) внутри интервала (a,b) найдется хотя бы одна несвязывающая точка;

(iii) справедливо (3.4).

4. Граничные тройки и операторы с точечными взаимодействиями

Здесь мы выясняем связь техники, используемой в работе [5], с теорией граничных троек симметрических операторов [7, 8]. Рассмотрим дифференцирование четвертого порядка на всей оси при дополнительном условии

$$|p_k - p_j| > \delta > 0, \quad k \neq j, \quad p_k, p_j \in M. \tag{4.1}$$

Напомним необходимые определения и обозначения теории граничных троек (см. [7, 8]).

Определение 4.1 ([8]). *Пусть A — замкнутый симметрический оператор с равными индексами дефекта и плотной областью определения в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а A^* — сопряженный к нему оператор. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, Γ_0 и Γ_1 — ограниченные линейные отображения из* $\operatorname{dom} A^*$ *в $\mathcal{H}$, называется граничной тройкой для A^*, если выполнены следующие условия:*

$i)$ *справедлива формула Грина*

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \operatorname{dom} A^*; \tag{4.2}$$

$ii)$ *отображение* $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\} : \quad \operatorname{dom} A^* \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *сюрьективно.*

Отметим, что граничная тройка существует для каждого симметрического оператора A с конечными индексами дефекта, и выбор граничной тройки не единственен. С каждой граничной тройкой $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ естественным образом связаны два самосопряженных расширения $A_i := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_i$.

Следующая теорема дает простое достаточное условие самосопряженности расширений симметрического оператора A в терминах граничных троек.

Теорема 4.1 ([6]). *Пусть A — симметрический оператор с равными индексами дефекта, и $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^*. Пусть также $\widetilde{A}$ — некоторое расширение симметрического оператора A.*

(1) *Если для расширения $\widetilde{A}$ существуют ограниченные в $\mathcal{H}$ отображения C и D такие, что $\operatorname{dom}\widetilde{A} = \ker\{C\Gamma_1 - D\Gamma_0\}$, и при этом*

$$DC^* = CD^*, \qquad 0 \in \rho(CC^* + DD^*), \tag{4.3}$$
$$C^*D = D^*C, \qquad 0 \in \rho(C^*C + D^*D), \tag{4.4}$$

то расширение $\widetilde{A}$ симметрического оператора A является самосопряженным ($\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$).

(2) *Если дополнительно $\operatorname{dom}\widetilde{A} \cap \ker\Gamma_0 = \operatorname{dom} A$ (в этом случае говорят, что расширения $\widetilde{A}$ и A_0 дизъюнктны) и существует самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор $B = B^*$ такой, что $\operatorname{dom}\widetilde{A} = \ker\{\Gamma_1 - B\Gamma_0\}$, то расширение $\widetilde{A}$ симметрического оператора A является самосопряженным.*

Замечание 4.1. Отметим, что в случае пространства $\mathcal{H}$ конечной размерности эквивалентность условия (4.3) самосопряженности расширения $\widetilde{A}$ установлена Ф. С. Рофе-Бекетовым (см. [4]).

Нетрудно проверить, что при условии (4.1) совокупность $\Pi = \{l^2(\mathbb{C}^4), \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой

$$\begin{aligned} \Gamma_0 f &= \bigoplus_k \{f(p_k-), f(p_k+), f''(p_k-), f''(p_k+)\}, \\ \Gamma_1 f &= \bigoplus_k \{f'''(p_k-), -f'''(p_k+), f'(p_k-), -f'(p_k+)\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

будет граничной тройкой для оператора T_M^{max} вида (2.3) (для оператора второго порядка аналогичное утверждение содержится в [10]).

Пусть $\widetilde{A}$ — оператор с локальными точечными взаимодействиями на M. Теория граничных троек дает достаточно “прозрачную” интерпретацию условия непрерывности скобок Лагранжа. Именно, условие непрерывности скобок Лагранжа накладывает ограничение на вид матриц C и D (см. теорему 4.1(1)) — в данном случае C и D будут блочно-диагональными матрицами (не обязательно конечномерными) с блоками из 4×4-матриц, которые удовлетворяют дополнительным соотношениям (4.3)–(4.4). При этом одного условия блочно-диагональности не достаточно для непрерывности скобок Лагранжа, так как матрицы C и D могут задавать несамосопряженные условия в точках $p_k \in M$. Несвязывающие условия порождаются матрицами C и D с блоками следующего вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & b_4 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & d_4 \end{pmatrix},$$

где $a_1, a_3, b_2, b_4, c_1, c_3, d_2, d_4$ — ненулевые действительные числа. Как видим, терминология граничных троек оказывается очень наглядной, однако описывает лишь частный случай общей задачи. При невыполнении условия (4.1) возникают существенные трудности с построением граничной тройки в терминах граничных значений функций $f \in \operatorname{dom} T_M^{max}$. В частности, если нарушено условие (4.1), то (4.5) уже не будет граничной тройкой оператора T_M^{max}.

Литература

[1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Springer, New York, 1988.

[2] S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular pertrubations of differentional operators*. London Math. Soc. Lecture Notes Ser., vol. 271, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[3] S. Albeverio, L. Nizhnik, *A Schrodinger operator with a δ'-interaction on a Cantor set and Krein-Feller operators* // Math. Nachr., **279** (2006), N 5–6, 467–476.

[4] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом прсранстве, т. 2.* М: Наука, 1978, 170 с.

[5] D. Buschmann, G. Stolz, J. Weidmann, *One-dimensional Schrödinger operators with local point interactions* // J. reine Agnew. Math., (1995), 169–186.

[6] V. A. Derkach, S. Hassi, M. M. Malamud and H. S. V. de Snoo, *Generalized resolvents of symmetric operators and admissibility* // Methods Funct. Anal. Topology, **6** (2000), N 3, 24–55.

[7] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundaru value problems for Hermitian operators with gaps* // J. Funct. Anal., **95** (1991), N 1, 1–95.

[8] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.* Киев: Наук. думка, 1984.

[9] А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* Москва: Изд-во иностр. лит., 1958.

[10] А. Н. Кочубей, *Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи* // Матем. Заметки, **25** (1979), N 3, 425–434.

[11] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию.* Москва, 1970.

[12] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* Москва: Наука, 1968, 526 С.

[13] Л. П. Нижник, *Оператор Шрёдингера с δ'-взаимодействием* // Функц. анализ и его прил., **37** (2003), N 1, 85–88.

[14] C. Shubin Christ, G. Stolz, *Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions* // J. Math. Anal. Appl., **184** (1994), 491–516.

Сведения об авторах

Наталья Ивановна Голощапова, Леонид Леонидович Оридорога	Донецкий национальный университет ул. Университетская 24, 83055, Донецк, Украина *E-Mail:* `ng85@bk.ru`, `ORIDOROGA@SKIF.NET`