Український математичний вісник
Том 4 (**2007**), № 2, 265 – 305

# Об экстремальных задачах теории приближений в линейных пространствах. Часть II[1]

Александр И. Степанец

**Аннотация.** В работе даётся обзор результатов, связанных с построением теории приближений в произвольных линейных пространствах.

**2000 MSC.** 41A65.

**Ключевые слова и фразы.** Линейное пространство, наилучшее приближение, поперечник по Колмогорову, наилучшее $n$-членное приближение, базисные поперечники.

## 4.8. Наилучшие $n$-членные приближения

Пусть $S^{p,\mu}_{\varphi} = S^{p,\mu}_{\varphi}(\mathfrak{X})$ — пространство, определяющееся пространством $\mathfrak{X}$, системой $\varphi$, числом $p > 0$ и последовательностью $\mu$. Пусть, далее, $f \in S^{p,\mu}_{\varphi}$ и $E_{\gamma_n}(f)_{p,\,\mu}$ — величина наилучшего приближения элемента $f$ посредством полиномов, построенных по заданному набору $\gamma_n$ из $n$ базисных векторов, определяемая равенством (4.41). Величина

$$e_n(f)_{p,\,\mu} = \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_{p,\,\mu} \tag{4.50}$$

называется наилучшим $n$-членным приближением элемента $f$ в пространстве $S^{p,\mu}_{\varphi}$, а величина

$$e_n(\mathfrak{N})_{p,\,\mu} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} e_n(f)_{p,\,\mu} \tag{4.51}$$

— наилучшим $n$-членным приближением подмножества $\mathfrak{N}$ из $S^{p,\mu}_{\varphi}$ в пространстве $S^{p,\mu}_{\varphi}$. Ясно,что величины $e_n(f)_{p,\,\mu}$ и $e_n(\mathfrak{N})_{p,\,\mu}$ соответствуют величинам (3.4) и (3.5).

*Статья поступила в редакцию* 17.01.2005

[1]Часть I данной статьи была представлена в предыдущем номере журнала

ISSN 1810 – 3200. 

Величины, аналогичные определяемым равенством (4.51), впервые по-видимому, рассматривались С. Б. Стечкиным [37], и затем изучались в теории приближений периодических функций многими авторами (см., например, [38–50]).

В качестве множеств $\mathfrak{N}$ будем рассматривать множества $\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda}$ $\psi$-интегралов всех элементов из единичных шаров в пространствах $S_{\varphi}^{q,\lambda}$, при условиях, обеспечивающих включение

$$S_{\varphi}^{q,\lambda} \subset S_{\varphi}^{p,\mu}.$$

**Теорема 4.7.** *Пусть числа $p$ и $q$ — действительные числа такие, что $p \geq q > 0$; $\psi, \mu$ и $\lambda$ — последовательности, удовлетворяющие условию* (4.25). *Тогда при любом $n \in N$ выполняется равенство*

$$e_n^p(\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda})_{p,\mu} = \sup_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l}(\overline{\psi'}_k)^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}} = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}(\overline{\psi'}_k)^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}},$$

*где $\overline{\psi'} = \{\overline{\psi'}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — перестановка в убывающем порядке последовательности*

$$|\psi_k'| = \left|\frac{\psi_k\,\mu_k}{\lambda_k}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.52}$$

*а $l^*$ — некоторое натуральное число.*

Эта теорема, а также следующая теорема 4.8, в случае, когда $\mu_k = \lambda_k \equiv 1,\ k \in N,$ доказаны в работах [14] и [15] (см. также [18]). В общем случае они получены в [20]. Существенной частью доказательства теоремы 4.7 является следующее утверждение, доказанное в [14] (см. также [18]).

**Лемма 4.1.** *Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, — невозрастающая последовательность положительных чисел, $\alpha_k \geq 0,\ k \in N$, для которой*

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0$$

*и $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, $m_k \geq 0,\ k \in N$, удовлетворяющая условию*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1.$$

*Пусть, далее, $r$ — любое число, $r \geq 1$,*

$$S^{(r)}(m) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\, m_k^r, \qquad S_{\gamma_n}^{(r)}(m) = \sum_{k\in\gamma_n}\alpha_k\, m_k^r,$$

*где* $\gamma_n$ *— произвольный набор из* $n$ *натуральных чисел,*

$$\mathcal{E}_n(m) = \mathcal{E}_n^{\alpha,r}(m) = S^{(r)}(m) - \sup_{\gamma_n} S^{(r)}_{\gamma_n}(m)$$

*и*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{\alpha,r} = \sup_{|m|\le 1} \mathcal{E}_n^{\alpha,r}(m).$$

*Тогда для любого натурального* $n$ *существует число* $l^* > n$ *такое, что*

$$\mathcal{E}_n = (l^* - n)\bigg(\sum_{k=1}^{l^*} \alpha_k^{-1/r}\bigg)^{-r}.$$

*Число* $l^*$ *определяется равенством*

$$\sup_{l>n}(l-n)\bigg(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-1/r}\bigg)^{-r} = (l^*-n)\bigg(\sum_{k=1}^{l^*} \alpha_k^{-1/r}\bigg)^{-r}.$$

*При этом для последовательности* $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, *у которой*

$$m'_k = \begin{cases} \alpha_k^{-1/r}\Big(\sum\limits_{i=1}^{l^*} \alpha_i^{-1/r}\Big)^{-r}, & k = 1,2,\ldots,l^*, \\ 0, & k > l^*, \end{cases}$$

*выполняется равенство*

$$\mathcal{E}_n(m') = (l^*-n)\bigg(\sum_{i=1}^{l^*} \alpha_i^{-1/r}\bigg)^{-r}.$$

В случае, когда $q < p$, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.8.** *Пусть* $p$ *и* $q$ *— произвольные числа, причем* $q > p > 0$, $\psi, \mu$ *и* $\lambda$ *— последовательности, для которых выполняется условие* (4.29). *Тогда при любом* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$e_n^p(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \overline{\sigma}_1^{\,-\frac{p}{q}}\left[(s-n)^{\frac{q}{q-p}} + \overline{\sigma}_1^{\,\frac{q}{q-p}}\, \overline{\sigma}_2\right]^{\frac{q-p}{q}},$$

*где*

$$\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_1(s) = \sum_{k=1}^{s} (\overline{\psi'}_k)^{-q}, \qquad \overline{\sigma}_2 = \overline{\sigma}_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} (\overline{\psi'}_k)^{-pq/(q-p)},$$

$\overline{\psi'} = \{\overline{\psi'}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— перестановка в убывающем порядке последовательности*

$$|\psi'_k| = \left|\psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right|, \qquad k = 1,2,\ldots,$$

*а число $s$ выбрано из условия*

$$(\overline{\psi'}_s)^{-q} \le \frac{1}{s-n} \sum_{k=1}^{s} (\overline{\psi'}_k)^{-q} < (\overline{\psi'}_{s+1})^{-q}.$$

*Такое число $s$ всегда существует и единственно.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующий аналог леммы 4.1, полученной в [16] (см. также [18]).

**Лемма 4.2.** *Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, $\alpha_k \ge 0,\ k \in N$, для которой при данном $r \in (0,1)$*

$$\sum_k \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty,$$

*и $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, $m_k \ge 0,\ n \in N$, удовлетворяющая условию*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1.$$

*Пусть, далее, $S^{(r)}(m)$, $S_{\gamma_n}^{(r)}(m)$, $\mathcal{E}_n(m)$ и $\mathcal{E}_n$ — величины, определенные в лемме* 4.1

*Тогда для любого натурального $n$*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(\alpha; r) = \sigma_1^{-r}(s)\big[(s-n)^{\frac{1}{1-r}} + \sigma_1^{\frac{1}{1-r}}\,\sigma_2(s)\big]^{1-r},$$

*где*

$$\sigma_1(s) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-1/r}, \qquad \sigma_2(s) = \sum_{k=s+1}^{s} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}},$$

*число $s$ выбрано из условия*

$$a_s^{-1/r} \le \frac{\sigma_1(s)}{s-n} \le \alpha_{s+1}^{-1/r}, \qquad s > n.$$

*Такое число $s$ всегда существует и единственно.*

*Верхняя грань в соотношении*

$$\mathcal{E}_n = \sup_{|m|\le 1} \mathcal{E}_n(m)$$

*реализуется последовательностью $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, где*

$$m_k = \begin{cases} \left(\frac{t_s}{\alpha_k}\right)^{1/r}, & k = 1, 2, \ldots, s, \\ \frac{1 - t_s^{1/r}\sigma_1(s)}{\sigma_2(s)}\,\alpha_k^{1/(1-r)}, & k > s, \end{cases}$$

$$t_s = \left(\sigma_1(s) + \left(\frac{\sigma_1(s)}{s-n}\right)^{1/(1-r)} \sigma_2(s)\right)^{-r}.$$

### 4.9. Наилучшие $n$-членные приближения с ограничениями

Пусть $\Gamma_n$ — множество всех наборов $\gamma_n$ из $n$ натуральных чисел.

В этом случае величина $e_n(f)_{p,\mu}$, определяемая равенством (4.50), может быть записана в виде

$$e_n(f)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu}.$$

Наряду с $e_n(f)_{p,\mu}$ можно рассматривать и величины

$$e_n(f;\Gamma'_n)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n \in \Gamma'_n} E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu},$$

где $\Gamma'_n$ — некоторое собственное подмножество из $\Gamma_n$. В связи с этим величину $e_n(f)_{p,\mu}$ удобно назвать абсолютным наилучшим $n$-членным приближением, а величину $e_n(f;\Gamma'_n)_{p,\mu}$ — наилучшим $n$-членным приближением с ограничениями, имея в виду, что здесь термин “ограничение” относится к выбору подмножества $\Gamma'_n$.

В качестве $\Gamma'_n$ будем рассматривать два подмножества $\Gamma_n^{(1)}$ и $\Gamma_n^{(2)}$. Через $\Gamma_n^{(1)}$ обозначается множество наборов

$$\gamma_n^{(1)} = \{i\,n+1,\ i\,n+2, \dots (i+1)n\}, \qquad i = 0, 1, \dots,$$

а через $\Gamma_n^{(2)}$ — множество наборов

$$\gamma_n^{(2)} = \{i+1,\ i+2, \dots i+n\}, \qquad i = 0, 1, \dots.$$

Ясно, что всегда

$$\Gamma_n^{(1)} \subset \Gamma_n^{(2)} \subset \Gamma_n,$$

и поэтому справедливы неравенства

$$e_n(f)_{p,\mu} \le e_n(f;\Gamma_n^{(2)})_{p,\mu} \le e_n(f;\Gamma_n^{(1)})_{p,\mu}.$$

Следовательно, если положить

$$e_n(\mathfrak{N};\Gamma'_n) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_n(f;\Gamma'_n)_{p,\mu},$$

где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $S_\varphi^{p,\mu}$, то будут выполняться оценки

$$e_n(\mathfrak{N})_{p,\mu} \le e_n(\mathfrak{N};\Gamma_n^{(2)})_{p,\mu} \le e_n(\mathfrak{N};\Gamma_n^{(1)})_{p,\mu}. \qquad (4.53)$$

Как и раньше, в качестве множеств $\mathfrak{N}$ будут выступать множества $\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$ $\psi$-интегралов всех элементов единичного шара $U_\varphi^{q,\lambda}$ в пространстве $S_\varphi^{q,\lambda}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $p \ge q > 0$. Справедлива

**Теорема 4.9.** *Пусть $p$ и $q$ — действительные числа такие, что $p \geq q > 0$; $\psi, \mu$ и $\lambda$ — последовательности, для которых величины*

$$|\psi'_k| = \left|\frac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}\right|, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

*не возрастая, стремятся к нулю. Тогда при любом $n \in N$ выполняются равенства*

$$e_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma^{(1)})_{p,\mu} = e_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma^{(2)})_{p,\mu}$$
$$= (l^* - 1)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{l^*} |\,\psi'_{(k-1)n+1}|^{-q}\right)^{-1/q}, \quad (4.54)$$

*где $l^*$ — натуральное число, для которого*

$$\sup_{l>1}(l-1)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{l} |\psi'_{(k-1)n+1}|^{-q}\right)^{-1/q} = (l^*-1)\sum_{k=1}^{l^*} |\psi'_{(k-1)n+1}|^{-q}\Bigg)^{-1/q}.$$

*Такое число $l^*$ всегда существует.*

*Доказательство.* Эта теорема в случае, когда $\mu_k \equiv \lambda_k \equiv 1,\ k \in N$, по существу, доказана в [20]. И в общем случае ее доказательство получается фактически при помощи рассуждений из [20].

Прежде всего убедимся, что в рассматриваемом случае

$$\psi\, U_\varphi^{q,\lambda} \subset S_\varphi^{p,\mu}. \quad (4.55)$$

Действительно, если $f \in \psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$, то в силу (4.6) $\widehat{f}_\varphi(k) = \psi_k \widehat{f}_\varphi{}^\psi(k)$ и

$$\|\widehat{f}^{\,\psi}\|_{q,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} |f_\varphi^\psi(k)|^q \,\lambda_k^q \leq 1. \quad (4.56)$$

Поэтому с учетом неравенства Иенсена

$$\|f\|_{p,\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p \,\mu_k^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^p\, |\widehat{f}_\varphi{}^\psi(k)|^p \,\lambda_k^p \leq |\psi'_1|^p,$$

откуда и следует включение (4.55).

Вследствие соотношения (4.53), для доказательства теоремы достаточно убедиться, что величина $e_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma^{(1)})_{p,\mu}$ не больше, а величина $e_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma^{(2)})_{p,\mu}$ не меньше правой части (4.54).

В силу предложения 4.1 для любого набора $\gamma_n \in \Gamma_n$ и любого элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$

$$E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{p,\mu},$$

поэтому для любого подмножества $\Gamma'_n \subset \Gamma_n$ имеем

$$\begin{aligned}
e_n^p(f;\Gamma'_n)_{p,\mu} &= \inf_{\gamma_n\in\Gamma'_n} \mathcal{E}^p_{\gamma_n}(f)_{p,\,\mu} \\
&= \inf_{\gamma_n\in\Gamma'_n} \|f - S_{\gamma_n}(f)\|^p_{p,\,\mu} = \inf_{\gamma_n\in\Gamma'_n} \sum_{k\overline{\in}\gamma_n} |\widehat{f_\varphi}(k)|^p\,\mu_k^p \\
&= \inf_{\gamma_n\in\Gamma'_n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\,\widehat{f_\varphi}(k)|^p\,\mu_k^p - \sum_{k\in\gamma_n} |\widehat{f_\varphi}(k)|^p\,\mu_k^p\right) \\
&= \|\,f\|^p_{p,\,\mu} - \sup_{\gamma_n\in\Gamma'_n} \sum_{k\in\gamma_n} |\,\widehat{f_\varphi}(k)|^p\,\mu_k^p. \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (4.6),

$$\begin{aligned}
&e_n^p(\psi\, U_\varphi^{q,\,\lambda};\Gamma_n^{(1)})_{p,\,\mu} \\
&= \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{q,\,\lambda}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^p\,|\widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(k)|^p\,\mu_k^p - \sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(1)}} \sum_{k\in\gamma_n} |\psi_k|^p\,|\widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(k)|^p\,\mu_k^p\right).
\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (4.56) и полагая $m_k = |\,\widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(k)\lambda_k|^q$, получаем

$$\begin{aligned}
e_n^p(\psi\, U_\varphi^{q,\,\lambda};\Gamma_n^{(1)})_{p,\,\mu} \le \sup\Bigg\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^p\, m_k^r - \sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(1)}} \sum_{k\in\gamma_n} |\psi'_k|^p\, m_k^r, \\
r = \frac{p}{q}:\ \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1,\ m_k \ge 0\Bigg\}. \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

Для нахождения точного значения правой части (4.58), воспользуемся следующей леммой, доказанной в [20]. □

**Лемма 4.3.** *Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, для которой*

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0 \qquad (4.59)$$

*и $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел такая, что*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1. \qquad (4.60)$$

*(В этом случае записываем $\alpha \in A$ и , соответственно, $m \in \mathcal{M}$).*

*Пусть, далее, при каждом $n \in N$*

$$F_{n,r}(\alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k\, m_k^r, \qquad \alpha \in A,\ m \in \mathcal{M},\ r > 0,$$

*и*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_{n,r}(\alpha, m).$$

*Тогда при любом $r \geq 1$ и $n \in N$ выполняется равенство*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{q>1} (q-1) \biggl( \sum_{i=1}^{q} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \biggr)^{-r}. \tag{4.61}$$

*Верхняя грань в правой части* (4.61) *всегда достигается при некотором значении $q^*$. При этом для последовательности $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{M}$,*

$$m'_k = \begin{cases} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \Bigl( \sum\limits_{j=1}^{q^*} \alpha_{(j-1)n+1}^{-1/r} \Bigr)^{-1}, & k = (i-1)n+1,\ i = 1, 2, \ldots q^*, \\ 0 & \textit{при остальных значениях } k, \end{cases} \tag{4.62}$$

*выполняется равенство*

$$F_{n,r}(\alpha, m') = (q^*-1) \biggl( \sum_{i=1}^{q^*} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \biggr)^{-r}.$$

Полагая $\alpha_k = |\psi'_k|^p,\ k \in N$, видим, что для нахождения значений правой части (4.58) применима лемма 4.3, согласно которой находим

$$e_n^p(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(1)})_{p,\mu} \leq \sup_{l>1} (l-1) \biggl( \sum_{i=1}^{l} |\psi'_{(i-1)n+1}|^{-q} \biggr)^{-\frac{p}{q}}, \tag{4.63}$$

при этом существует значение $l^*$, реализующее верхнюю грань правой части этого соотношения. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что величина $e_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma^{(2)})_{p,\mu}$ не меньше правой части (4.63). Для этого покажем, что в множестве $\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$ имеется элемент $f_*$, для которого

$$e_n^p(f_*; \Gamma_n^{(2)})_{p,\mu} = (l^*-1) \left( \sum_{i=1}^{l^*} |\,\psi'_{(i-1)n+1}|^{-q} \right)^{-p/q}. \tag{4.64}$$

С этой целью, исходя из соотношения (4.62), положим

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

где числа $c_k$ подобраны так, что

$$c_k^q = \begin{cases} \frac{|\psi'_{(i-1)n+1}|^{-q}}{\lambda^q_{(i-1)n+1}} \Big( \sum\limits_{j=1}^{l^*} |\psi'_{(j-1)n+1}|^{-q} \Big)^{-1}, & k=(i-1)n+1,\ i=1,2,\dots l^*; \\ 0 & \text{при остальных значениях k.} \end{cases} \tag{4.65}$$

Элемент $h$ является линейной комбинацией конечного числа элементов системы $\varphi$, поэтому он принадлежит всем пространствам $S^p_\varphi$ при любом $p>0$, и так как

$$\|h\|^q_{q,\lambda} = \sum_{k=1}^\infty c_k^q \, \lambda_k^q = 1,$$

то $h \in U^{q,\lambda}_\varphi$. Поэтому, полагая $f_* = \mathcal{J}^\psi h$, видим, что $f_* \in U^{q,\lambda}_\varphi$ и $f_*^\psi = h$. В то же время (см. (4.57))

$$e_n^p(f_*; \Gamma_n^{(2)})_{p,\mu} = \sum_{k=1}^\infty |\psi_k|^p \, |\widehat{f}_*^{\,\psi}(k)|^p \, \mu_k^p - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(2)}} \sum_{k \in \gamma_n} |\psi_k|^p \, |\widehat{f}_*^{\,\psi}(k)|^p \, \mu_k^p$$
$$= \sum_{k=1}^\infty |\psi_k|^p \, c_k^p \, \mu_k^p - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(2)}} \sum_{k \in \gamma_n} |\psi_k|^p \, c_k^p \, \mu_k^p.$$

Согласно (4.65)

$$c_k^p = \begin{cases} \frac{|\psi'_{(i-1)n+1}|^{-p}}{\lambda^p_{(i-1)n+1}} \Big( \sum\limits_{j=1}^{l^*} |\psi'_{(j-1)n+1}|^{-q} \Big)^{-\frac{p}{q}}, & k=(i-1)n+1,\ i=1,2,\dots l^*; \\ 0 & \text{при остальных значениях } k. \end{cases} \tag{4.66}$$

Следовательно, учитывая, что множество $\gamma_n \subset \Gamma_n^{(1)}$ может содержать только одно число вида $(i-1)n+1, i=\overline{1,l^*}$, получаем равенство (4.64):

$$e_n^p(f_*; \Gamma_n^{(2)})_{p,\mu} = \sum_{i=1}^{l^*} |\psi_{(i-1)n+1}|^p \, c^p_{(i-1)n+1} \, \mu^p_{(i-1)n+1}$$
$$- \max_{1 \le i \le l^*} |\psi_{(i-1)n+1}|^p \, c^p_{(i-1)n+1} \, \mu^p_{(i-1)n+1}$$
$$= (l^*-1) \left( \sum_{i=1}^{l^*} |\,\psi'_{(i-1)n+1}|^{-q} \right)^{-p/q},$$

и поскольку при любом $i$, $i=\overline{1,l}$, согласно (4.66),

$$|\psi_{(i-1)n+1}|^p \, c^p_{(i-1)n+1} \, \mu^p_{(i-1)n+1} = \left( \sum_{j=1}^{l^*} |\,\psi'_{(i-1)n+1}|^{-q} \right)^{-p/q}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $q > p > 0$ и докажем следующее утверждение.

**Теорема 4.10.** *Пусть $p$ и $q$ — действительные числа такие, что $q > p > 0$; $\psi, \mu$ и $\lambda$ — последовательности, для которых величины (4.54) не возрастая, стремятся к нулю и, кроме того, удовлетворяют условию (4.29). Тогда при любом $n \in N$ выполняется равенство*

$$e_n^p(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(1)})_{p,\mu} = \widetilde{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}}(s)\, \left[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \widetilde{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\, \widetilde{\sigma}_2(s)\right]^{\frac{q-p}{q}}, \quad (4.67)$$

*в котором*

$$\widetilde{\sigma}_1(s) = \sum_{k=1}^{s} \left( \sum_{i=(k-1)n+1}^{k\,n} |\psi_i'|^{\frac{p\,q}{q}} \right)^{-\frac{q-p}{q}}, \quad (4.68)$$

$$\widetilde{\sigma}_2(s) = \sum_{k=s\,n+1}^{\infty} |\psi_k'|^{\frac{p\,q}{q-p}}. \quad (4.69)$$

*Число $s$ выбрано из условия*

$$\left( \sum_{k=(s-1)n+1}^{s\,n} |\psi_k'|^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{-\frac{q-p}{p}} \le \frac{\widetilde{\sigma}_1(s)}{s-1} < \left( \sum_{k=s\,n+1}^{(s+1)n} |\psi_k'|^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{-\frac{q-p}{p}}. \quad (4.70)$$

*Такое число $s$ всегда существует и единственное.*

*Доказательство.* Получим необходимую оценку сверху величины $e_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(1)})_{p,\mu}$. Для этого будем пользоваться неравенством (4.58), которое справедливо и в рассматриваемом случае, а также следующим аналогом леммы 4.3.

**Лемма 4.4.** *Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (4.59) и, кроме того, при данном $r \in (0,1)$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty,$$

*а $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, для которой выполняется условие (4.60). (В этом случае записываем $\alpha \in A_r$ и, как и раньше, $m \in \mathcal{M}$).*

*Пусть, далее, при каждом $n \in N$*

$$F_{n,r}(\alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r, \quad \alpha \in A_r,\ m \in \mathcal{M},\ r \in (0,1), \quad (4.71)$$

*и*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m\in\mathcal{M}} F_{n,r}(\alpha, m). \tag{4.72}$$

*Тогда при любых* $r \in (0,1)$ *и* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \overline{\sigma}_1^{-r}(s)\, \left[(s-1)^{\frac{1}{1-r}} + \overline{\sigma}_1^{\frac{r}{1-r}}(s)\, \overline{\sigma}_2(s)\right]^{1-r}, \tag{4.73}$$

*где*

$$\overline{\sigma}_1(s) = \overline{\sigma}_1(\alpha; s) = \sum_{k=1}^{s} \Bigg( \sum_{i=(k-1)n+1}^{k\,n} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}} \Bigg)^{-\frac{1-r}{r}}, \tag{4.74}$$

$$\overline{\sigma}_2(s) = \overline{\sigma}_2(\alpha; s) = \sum_{k=s\,n+1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}},$$

*число* $s$ *выбрано из условия*

$$a_s^{-\frac{1}{r}} \le \frac{\overline{\sigma}_1(s)}{s-1} < a_{s+1}^{-\frac{1}{r}}, \qquad a_j = \Bigg( \sum_{i=(j-1)n+1}^{j\,n} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}} \Bigg)^{1-r},\ j = 1, 2, \dots, \tag{4.75}$$

*такое число* $s$ *всегда существует и единственное.*

*Верхняя грань в* (4.72) *реализуется последовательностью* $m^*$, *для которой*

$$m_k^* = \mu_i^*\, \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\, a_i^{-\frac{1}{1-r}}, \qquad (i-1)n + 1 \le k \le i\,n,\ i = 1, 2, \dots, \tag{4.76}$$

*где*

$$\mu_i^* = \begin{cases} \left(\frac{t_s}{a_i}\right)^{1/r}, & i = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{1 - t_s^{\frac{1}{r}}\, \overline{\sigma}_1(s)}{\overline{\sigma}_2(s)}\, a_i^{\frac{1}{1-r}}, & i > s, \\ t_s = \left(\overline{\sigma}_1(s) + \left(\frac{\overline{\sigma}_1(s)}{s-1}\right)^{\frac{1}{1-r}} \overline{\sigma}_2(s)\right)^{-r}. \end{cases}$$

*Доказательство леммы* 4.4. Ясно, что при сделанных предположениях точная верхняя грань в (4.71) всегда достигается для некоторого (возможно не единственного) набора $\gamma_n' \in \Gamma_n^{(1)}$ и равно некоторому числу $S$:

$$\sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k\in\gamma_n} \alpha_k\, m_k^r = \sum_{k\in\gamma_n'} \alpha_k\, m_k^r = S.$$

Отметив это, ряд в (4.71) при данной $m \in \mathcal{M}$ представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, m_k^r = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(\alpha,\, m), \qquad A_i(\alpha,\, m) = \sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n} \alpha_k\, m_k^r. \tag{4.77}$$

Для оценки сверху величины $A_i(\alpha, m)$ воспользуемся следующим утверждением, которое легко следует из неравенства Гельдера (его доказательство имеется в [18, § 11.7]).

**Утверждение 4.1.** *Если*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k^r, \qquad \alpha \in A_r,\ 0 < r < 1,\ n \in N,$$

*то*

$$\sup\left\{ f_n(x) : x_k \ge 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k \le c,\ c > 0 \right\} = f_n(x^*),$$

*где*

$$x_k^* = \frac{c\, \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}}.$$

Отсюда получаем

**Следствие 4.1.** *Пусть* $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty},\ \mu_k \ge 0,$ *и*

$$M_i = \sum_{j=(i-1)n+1}^{i\,n} \mu_j, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

*Тогда*

$$A_i(\alpha,\, \mu) \le A_i(\alpha,\, \overline{\mu}) = \sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n} \alpha_k\, \overline{\mu}\,_k^r,$$

*где*

$$\overline{\mu}_k = M_i\, \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \left( \sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right)^{-1},$$

*так что*

$$A_i(\alpha,\, \overline{\mu}\,) = a_i\, M_i^r, \qquad a_i = \left( \sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right)^{1-r},\ i = 1, 2, \ldots . \tag{4.78}$$

Руководствуясь этим фактом для данной $m \in \mathcal{M}$, получим оценки величин $A_i(\alpha,\, m)$. Пусть

$$M_i = \sum_{j=(i-1)n+1}^{i\,n} m_j, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Если для данного $i$ будет $a_i\, M_i^r \le S$, то положим $\overline{M}_i = M_i$; если же будет $a_i\, M_i^r > S$, то через $\overline{M}_i$ обозначим число, для которого $a_i\, \overline{M}_i^{\,r} = S$. В этом случае всегда $\overline{M}_i \le M_i$, и следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{M}_i \le \sum_{i=1}^{\infty} M_i = \sum_{k=1}^{\infty} m_k = |m\,| \le 1.$$

В то же время

$$A_i(\alpha,\, m\,) \le a_i\, \overline{M}_i^{\,r},$$

поэтому и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, m_k^r \ \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \overline{M}_i^{\,r}. \tag{4.79}$$

Рассмотрим выражение

$$\sum(\,a,\, \overline{M}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \overline{M}_i^{\,r} - \sup_{i\ge 1}\, a_i\, \overline{M}_i^{\,r}. \tag{4.80}$$

По построению

$$\sup_i\, a_i\, M_i^r \le S,$$

следовательно, согласно (4.71) и (4.79), имеем

$$F_{n,\,r}(\alpha, m) \le \sum(a,\, \overline{M}),$$

и, значит,

$$\sup_{|m\,|\le 1} F_{n,\,r}(\alpha, m) \le \sup_{|\overline{M}\,|\le 1} \sum(a,\, \overline{M}), \qquad |\overline{M}| = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{M}_i. \tag{4.81}$$

Но в силу (4.80)

$$\sup_{|\overline{M}\,|\le 1} \sum(a,\, \overline{M}) = \sup_{|\mu\,|\le 1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \mu_k^r - \sup_{k\ge 1}\, a_k\, \mu_k^r \right) = \mathcal{E}_1(a; r), \tag{4.82}$$

где через $\mathcal{E}_1(a; r)$ обозначена величина $\mathcal{E}_n(\alpha; r)$ из леммы 4.2 при $n = 1$ и $\alpha = a$.

Последовательность $a$, образованная числами $a_i$ из (4.78), удовлетворяет всем требованиям леммы 4.2: числа $a_i$ не возрастают и $a_i > 0$ при всех $i \in N$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{1}{1-r}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=(i-1)n+1}^{\infty} \alpha_j^{\frac{1}{1-r}} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}} < \infty.$$

Применяя лемму 4.2, находим

$$\mathcal{E}_1(a;r) = \overline{\sigma}_1^{-r}(s)[(s-1)^{\frac{1}{1-r}} + \overline{\sigma}_1^{\frac{r}{1-r}}(s)\overline{\sigma}_2(s)]^{1-r}, \tag{4.83}$$

где число $s$ выбрано из условия (4.75), а величины $\overline{\sigma}_1(s)$ и $\overline{\sigma}_2(s)$ определены соотношениями (4.73) и (4.74). При этом точная верхняя грань в (4.82) реализуется последовательностью $\mu^*$, для которой

$$\mu_k^* = \begin{cases} \left(\frac{t_s}{a_k}\right)^{1/r}, & k = 1, 2, \ldots, s, \\ \frac{1 - t_s^{\frac{1}{r}}\,\overline{\sigma}_1(s)}{\overline{\sigma}_2(s)}\, a_k^{\frac{1}{1-r}}, & k > s, \\ t_s = \left(\overline{\sigma}_1(s) + \left(\frac{\overline{\sigma}_1(s)}{s-1}\right)^{\frac{1}{1-r}}\overline{\sigma}_2(s)\right)^{-r}. \end{cases} \tag{4.84}$$

Объединяя соотношения (4.72) и (4.81)–(4.83), получим

$$\sigma_{n,r}(\alpha) \le \overline{\sigma}_1^{-r}(s)\,[(s-1)^{\frac{1}{1-r}} + \overline{\sigma}_1^{-\frac{r}{1-r}}(s)\,\overline{\sigma}_2(s)]^{1-r}, \tag{4.85}$$

и для завершения доказательства леммы остается показать, что величина $F_{n,r}(\alpha;\, m^*)$ равна правой части (4.85) и что $m^* \in \mathcal{M}$.

Согласно (4.71) и (4.77)

$$F_{n,r}(\alpha,\, m^*) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(\alpha,\, m^*) - \sup_i A_i(\alpha, m^*)$$

и в силу (4.76)

$$A_i(\alpha, m^*) = a_i\,\mu_i^{*r} = \begin{cases} t_s, & i = 1, 2, \ldots, s \\ \left(\frac{1 - t_s^{\frac{1}{r}}\,\overline{\sigma}_1(s)}{\overline{\sigma}_2(s)}\right)^r a_i^{\frac{1}{1-r}}, & i > s. \end{cases} \tag{4.86}$$

Последовательность $\mu^*$ является экстремальной в лемме 4.2 (при $n = 1$ и $\alpha = a$) и, как показано при доказательстве этой леммы в [18], обладает тем свойством, что числа $a_i\,\mu_i^{*r}$ не возрастают. Поэтому из (4.85) и (4.86) заключаем, что

$$\begin{aligned} F_{n,r}(\alpha,\, m^*) = \sum_{i=2}^{\infty} A_i(\alpha,\, m^*) &= \sum_{i=2}^{s} A_i(\alpha, m^*) + \sum_{i=s+1}^{\infty} A_i(\alpha, m^*) \\ &= (s-1)t_s + (1 - t_s^{1/r}\,\overline{\sigma}_1(s))^r\,(\overline{\sigma}_2(s))^{1-r}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значение $t_s$, убеждаемся в справедливости требуемого равенства. Тот факт, что $m^* \in \mathcal{M}$, проверяется непосредственно: $m^* \ge 0$, и согласно (4.76),

$$|m^*| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n} m_k^* = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^* = 1.$$

Лемма 4.4 доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы.

Полагая $\alpha_k = |\psi'_k|^p,\ k \in N,$ замечаем, что для нахождения значений правой части (4.58) в рассматриваемом случае применима лемма 4.4, в силу которой

$$e_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(1)})_{p,\mu} \le \widetilde{\sigma}_1^{-1/q}(s)[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \widetilde{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\,\widetilde{\sigma}_2(s)]^{\frac{q-p}{q\,p}}, \quad (4.87)$$

где величины $\widetilde{\sigma}_1(\cdot)$, $\widetilde{\sigma}_2(\cdot)$ и число $s$ определяются соотношениями (4.67)–(4.70) и для завершения доказательства теоремы теперь следует показать, что в соотношении (4.87) строгого неравенства быть не может. Понятно, что для этого достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ во множестве $\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$ есть элемент $f_\varepsilon$ , для которого значение $e_n(f_\varepsilon; \Gamma_n^{(1)})$ отличается от правой части (4.87) не больше, чем на $\varepsilon$.

Выберем число $s$ из условия (4.70). Поскольку $\widetilde{\sigma}(s) = \overline{\sigma}_1(|\psi'|^p; s)$, где $\overline{\sigma}_1(|\psi'|^p; s)$ — величина из (4.74) при $\alpha = |\psi'|^p$, то, согласно лемме 4.4, такое число всегда существует и единственное.

При выбранном $s$ найдем значение $\widetilde{t}_s$ по формуле

$$\widetilde{t}_s = \left(\widetilde{\sigma}_1(s) + \left(\frac{\widetilde{\sigma}_1(s)}{s-1}\right)^{\frac{q}{q-p}}\,\widetilde{\sigma}_2(s)\right)^{-\frac{p}{q}}, \quad (4.88)$$

где $\widetilde{\sigma}_2(s) = \overline{\sigma}_2(|\psi'|^p; s)$, и положим

$$\widetilde{\mu}_i = \begin{cases} \left(\frac{\widetilde{t}_s}{\widetilde{a}_k}\right)^{\frac{q}{p}}, & i = 1, 2, \ldots, s, \\ \frac{1 - \widetilde{t}_s^{\frac{q}{p}}\,\widetilde{\sigma}_1(s)}{\widetilde{\sigma}_2(s)}\,\widetilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}}, & i > s, \end{cases} \quad (4.89)$$

где

$$\widetilde{a}_i = \left(\sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n} |\psi'_k|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}},$$

$$\widetilde{m}_k = \widetilde{\mu}_i |\psi'_k|^{\frac{qp}{q-p}}\,\widetilde{a}_i^{-\frac{q}{q-p}}, \qquad (i-1)n + 1 \le k \le i\,n,\ i = 1, 2 \ldots. \quad (4.90)$$

При каждых $k_0 \in N$ и $n \in N$ рассмотрим элемент

$$h_{k_0} = \sum_{k=1}^{k_0\,n} c_k\,\varphi_k, \quad (4.91)$$

у которого

$$c_k = \frac{\widetilde{m}_k^{\frac{1}{q}}}{\lambda}. \quad (4.92)$$

Элемент $h_{k_0}$, являясь линейной комбинацией конечного числа элементов $\varphi_k$, принадлежит всем пространствам $S_\varphi^{p,\mu}$ и $S_\varphi^{q,\lambda}$ при любых значениях $p>0$ и $q>0$, и так как $\|h_{k_0}\|^q_{q,\lambda}=\sum_{k=1}^{k_0}c_k^q\lambda_k^q=\sum_{k=1}^{k_0}\widetilde{m}_k\le 1$, то $h_{k_0}\in U_\varphi^{q,\lambda}$. Следовательно, если положим $f_{k_0}=\mathcal{J}^\psi h_{k_0}$, то увидим, что $f_{k_0}\in\psi\,U_\varphi^{q,\lambda}$ и $\|f^\psi_{k_0}\|\le 1$.

Считая число $k_0$ достаточно большим, пользуясь формулой (4.57), найдем значение $e_n^p(f_{k_0};\Gamma_n^{(1)})$. С учетом соотношений (4.88)–(4.92) имеем

$$\begin{aligned}
e_n^p(f_{k_0};\Gamma_n^{(1)})_{p,\mu} &= \|f_{k_0}\|^p_{p,\mu}-\sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(1)}}\sum_{k\in\gamma_n}|\widehat{f}_{k_0}(k)|^p\,\mu_k^p\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k\,|^p\,|\widehat{f}^{\,\psi}_{k_0}(k)|^p|\mu_k|^p-\sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(1)}}\sum_{k\in\gamma_n}|\psi_k|^p\,|\widehat{f}^{\,\psi}_{k_0}(k)|\mu_k^p\\
&=\sum_{k=1}^{k_0\,n}|\psi'_k|^p\,\widetilde{m}_k^{\frac{p}{q}}-\sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(1)}}\sum_{k\in\gamma_n}|\psi'_k|^p\,\widetilde{m}_k^{\frac{p}{q}}\\
&=\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n}|\psi'_k|^p\,\widetilde{m}_k^{\frac{p}{q}}-\sup_{i\le k_0}\sum_{j=(i-1)n+1}^{i\,n}|\psi'_k|^p\,|\widetilde{m}_k^{\frac{p}{q}}. \qquad (4.93)
\end{aligned}$$

Полагая

$$\widetilde{A}_i=\sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n}|\psi'_k|^p\,|\widetilde{m}_k^{\frac{p}{q}}, \qquad (4.94)$$

с учетом формул (4.88)–(4.90), находим

$$\widetilde{A}_i=\widetilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}}\,\widetilde{a}_i^{-\frac{p}{q-p}}\sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n}|\psi'_k|^{\frac{p\,q}{q-p}}=\widetilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}}\,\widetilde{a}_i, \qquad i=1,2,\dots k_0.$$

Поэтому

$$\widetilde{A}_i=\begin{cases}\widetilde{t}_s, & i=1,2,\dots,s,\\ \Big(\frac{1-\widetilde{t}_s^{\frac{q}{p}}\,\widetilde{\sigma}_1(s)}{\widetilde{\sigma}_2(s)}\Big)^{\frac{p}{q}}\,\widetilde{a}_i^{\frac{p}{q-p}}, & i=s+1,\dots k_0.\end{cases} \qquad (4.95)$$

Объединяя соотношения (4.92)–(4.95), имеем

$$e_n^p(f_{k_0};\Gamma_n^{(1)})_{p,\mu}=\sum_{i=1}^{k_0}\widetilde{a}_i\,\widetilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}}\ -\sup_{i\le k_0}\widetilde{a}_i\,\widetilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}}$$

Если в формулах (4.88)–(4.90) положить $|\psi'_k|^p=\alpha_k$ и $\frac{p}{q}=r$, то получим $\widetilde{a}_i=a_i$, $\widetilde{t}_s=t_s$, и следовательно, $\widetilde{\mu}=\mu_i^*$, где величины $a_i,t_s$ и $\mu_i^*$ определяются равенствами (4.75) и (4.84).

Числа $a_i\,\mu^{*\,r}$, как уже отмечалось, не возрастают. Следовательно,

$$e_n^p(f_{k_0};\Gamma_n^{(1)})_{p,\,\mu} = \sum_{i=2}^{k_0} \widetilde{a}_i\,\widetilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}}$$

$$= (s-1)\widetilde{t}_s + \Big(\frac{1-\widetilde{t}_s^{\frac{q}{p}}\ \widetilde{\sigma}_1(s)}{\widetilde{\sigma}_2(s)}\Big)^{\frac{p}{q}} \sum_{i=s+1}^{\infty} \widetilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}} - R_{k_0},$$

где

$$R_{k_0} = \Big(\frac{1-\widetilde{t}_s^{\frac{q}{p}}\ \widetilde{\sigma}_1(s)}{\widetilde{\sigma}_2(s)}\Big)^{\frac{p}{q}} \sum_{i=k_0+1}^{\infty} \widetilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}}.$$

Но

$$\sum_{i=s+1}^{\infty} \widetilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}} = \sum_{i=i+1}^{\infty} \sum_{k=(i-1)n+1}^{i\,n} |\psi_k'|^{\frac{p\,q}{q-p}} = \sum_{k=s\,n}^{\infty} |\psi_k'|^{\frac{p\,q}{q-p}} = \widetilde{\sigma}_2(s),$$

и значит,

$$\sum_{i=k_0+1}^{\infty} \widetilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}} = \widetilde{\sigma}_2(k_0).$$

Таким образом,

$$e_n^p(f_{k_0};\Gamma_n^{(1)})_{p,\,\mu} = (s-1)\widetilde{t}_s + (1-\widetilde{t}_s^{\frac{q}{p}}\ \sigma_2(s))\sigma_2^{\frac{p}{q}-1} - R_{k_0}, \tag{4.96}$$

при этом $R_{k_0}$ имеет вид

$$R_{k_0} = \Big(\frac{1-\widetilde{t}_s^{\frac{q}{p}}\ \widetilde{\sigma}_1(s)}{\widetilde{\sigma}_2(s)}\Big)^{\frac{p}{q}} \widetilde{\sigma}_2(k_0).$$

Подставляя в (4.96) значения $\widetilde{t}_s$ из (4.88) и замечая, что в силу (4.29) и (4.69) величина $\widetilde{\sigma}_2(k_0)$ является остатком сходящегося ряда, приходим к выводу, что при любом $\varepsilon > 0$ во множестве $\psi\,U_\varphi^{q,\,\lambda}$ действительно имеется элемент $f_\varepsilon$, для которого выполняется равенство

$$e_n^p(f_\varepsilon;\Gamma_n^{(1)})_{p,\,\mu} = \widetilde{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}}(s)[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \widetilde{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\ \widetilde{\sigma}_2(s)]^{\frac{q-p}{q}} - \varepsilon.$$

$\square$

## 4.10. Величины $e_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma_n^{(2)})_{p,\mu}$ при $q > p > 0$

Рассмотрим вопрос об аналоге теоремы 4.10 для величины $e_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma_n^{(2)})_{p,\mu}$. Прежде всего заметим, что при выполнении условий теоремы 4.10, в силу соотношений (4.53) и (4.67), справедливо неравенство

$$e_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma_n^{(2)})_{p,\mu} \le \tilde{\sigma}_1^{-\frac{1}{q}}(s)\left[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \tilde{\sigma}_1^{\frac{q}{q-p}}(s)\tilde{\sigma}_2(s)\right]^{\frac{q-p}{qp}}. \qquad (4.97)$$

Если теперь показать, что при любом $\varepsilon > 0$ в множестве $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ найдется элемент $f_\varepsilon$, для которого значение $e_n(f_\varepsilon;\Gamma_n^{(2)})_{p,\,\mu}p,\, \mu$ отличается от правой части (4.97) не больше, чем на $\varepsilon$, то это будет означать, что соотношение (4.97) на самом деле является равенством.

Ясно, что такой элемент $f_\varepsilon$ удастся сконструировать подобно тому, как это делалось при завершении доказательства теоремы 4.10, по крайней мере всякий раз, когда экстремальная последовательность $m^*$, определяемая соотношением (4.76), будет реализовать верхнюю грань не только в соотношении (4.72), но и в соотношении

$$\sigma'_{n,r}(\alpha) = \sup_{m\in\mathcal{M}} F'_{n,r}(\alpha,m),$$

где

$$F'_{n,r}(\alpha,m) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k\in\gamma_n}\alpha_k m_k^r, \quad \alpha\in A_r,\ m\in\mathcal{M},\ r\in(0,1),$$

причем в том случае, когда

$$\sup_{m\in\mathcal{M}} F'_{n,r}(\alpha,m) = F'_{n,r}(\alpha,m^*) = F_{n,r}(\alpha,m^*).$$

Последнее же равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$e_n = \sup_{k'\ge 1}\sum_{k=k'}^{k'+n-1}\alpha_k m_k^{*r} = \sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(1)}}\sum_{k\in\gamma_n}\alpha_k m_k^{*r} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k m_k^{*r}. \qquad (4.98)$$

Для установления условий справедливости равенств (4.98), докажем следующее утверждение.

**Лемма 4.5.** *При выполнении предположений теоремы* 4.10 *достаточным условием справедливости равенств* (4.98) *является выполнение неравенств*

$$\sum_{k=(i-1)n+1}^{in}\alpha_k m_k^{*r} \ge \sum_{k=k_i}^{k_i+n-1}\alpha_k m_k^{*r}, \qquad (i-1)n \le k_i \le in+1, \quad (4.99)$$

*при всех натуральных значениях $i$.*

*Выполнение неравенств* (4.99) *при всех $i \le s$ является также и необходимым условием для справедливости равенств* (4.98).

*Доказательство.* Ясно, что всегда

$$\sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(2)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^{*r} \ge \sum_{k=1}^{n} \alpha_k m_k^{*r},$$

а из условий (4.99), если они выполняются при всех $i \in N$, следует, что в этом соотношении строгого неравенства быть не может. Этим достаточная часть утверждения леммы установлена.

В то же время, согласно (4.76),

$$\sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k m_k^{*r} = \mu_i^{*r} a_i^{-\frac{r}{1-r}} \cdot a_i^{\frac{1}{1-r}} = a_i \mu_i^{*r} = t_s, \quad i = 1, 2, \dots s. \tag{4.100}$$

Поэтому, если бы при некотором $i$, $i \le s$, условие (4.99) не выполнялось, то было бы справедливым неравенство $e_n > t_s$, что вследствие (4.100) противоречило бы равенству (4.98).

Теперь найдем достаточные условия на последовательности $\alpha \in A_r$, при которых выполняется (4.99) для всех $i \in N$. Имеем

$$\begin{aligned} R_i(\alpha) = \sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k m_k^{*r} - \sum_{k=k_i}^{k_i+n-1} \alpha_k m_k^{*r} \\ = \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} \alpha_k m_k^{*r} - \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k m_k^{*r}. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Пусть сначала $i < s$. В этом случае согласно (4.76)

$$\alpha_k m_k^{*r} = \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} t_s a_i^{-\frac{1}{1-r}}, \qquad k \in [(i-1)n+1, k_i],$$

и

$$\alpha_k m_k^{*r} = \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} t_s a_{i+1}^{-\frac{1}{1-r}}, \qquad k \in [in+1, k_i+n-1].$$

Следовательно, с учетом (4.75),

$$R_i(\alpha) = t_s \Bigg( a_i^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} - a_{i+1}^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \Bigg)$$

$$= t_s a_i^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \Bigg( \Bigg( \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \Bigg)^{-1} \times \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} - \left( \frac{a_i}{a_{i+1}} \right)^{\frac{1}{1-r}} \Bigg).$$

Для сокращения записи положим $\alpha_k^{\frac{1}{1-r}} = x_k$ и

$$\Bigg( \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} x_k \Bigg)^{-1} \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} x_k = f_{i,n}(k_i).$$

Тогда согласно (4.75)

$$\left( \frac{a_i}{a_{i+1}} \right)^{\frac{1}{1-r}} = f_{i,n}(in+1)$$

и значит,

$$R_i(\alpha) = t_s a_i^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} x_k (f_{i,n}(k_i) - f_{i,n}(in+1)).$$

Отсюда видим, что неравенство $R_i(\alpha) \geq 0$ при $i < s$ эквивалентно неравенству

$$f_{i,n}(in+1) \leq f_{i,n}(k_i), \qquad k_i \in [(i-1)n+1, in]. \tag{4.102}$$

Пусть теперь $i > s$. Полагая

$$\nu_s = \frac{1 - t_s^{\frac{1}{r}}\ \tilde{\sigma}_1(s)}{\tilde{\sigma}_2(s)}$$

в этом случае, согласно (4.76), имеем

$$\alpha_k m_k^{*r} = \nu_s^r \qquad \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}, \quad k > s. \tag{4.103}$$

Поэтому, согласно (4.101),

$$R_i(\alpha) = \nu_s^r \Bigg( \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} - \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \Bigg).$$

Так как $\alpha \in A_r$, то числа $\alpha_k$ не возрастают. Значит,

$$R_i(\alpha) \geq 0, \qquad i > s.$$

Пусть, наконец, $i = s$. Тогда в силу (4.76)

$$\alpha_k m_k^{*r} = \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\, t_s\, a_s^{-\frac{1}{1-r}}, \qquad k \in [(s-1)n+1, k_s],$$

и, согласно (4.103),

$$\alpha_k m_k^{*r} = \nu_s^r \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}, \qquad k \in [sn+1, k_s+n].$$

Поэтому

$$R_i(\alpha) = t_s a_s^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=(s-1)n+1}^{k_s-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} - \nu_s^r \sum_{k=sn+1}^{k_s+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}$$

$$= t_s a_s^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=sn+1}^{k_s+n-1} x_k \Bigg( \Bigg( \sum_{k=sn+1}^{k_s+n-1} x_k \Bigg)^{-1} \sum_{k=(s-1)n+1}^{k_s-1} x_k - \frac{\nu_s^r}{t_s} a_s^{\frac{1}{1-r}} \Bigg).$$

Видим, что неравенство $R_s(\alpha) \geq 0$ эквивалентно соотношению

$$f_{s,n}(k_s) \geq \frac{\nu_s^r}{t_s} a_s^{\frac{1}{1-r}} = \left( \frac{\tilde{\sigma}_1(s)}{s-1} \right)^{\frac{r}{1-r}} a_s^{\frac{1}{1-r}}. \tag{4.104}$$

$\square$

Резюмируем доказанное в виде следующего утверждения.

**Теорема 4.11.** *При выполнении предположений теоремы* 4.10 *необходимым и достаточным условием справедливости неравенств* (4.99) *при всех* $i \in N$ *является выполнение неравенств* (4.102) *при всех* $i = 1, 2, \dots s-1$ *и неравенства* (4.104) *при* $i = s$.

*Если неравенства* (4.102) *и* (4.104) *выполняются, то справедливо равенство*

$$e_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(2)})_{p,\mu} = \tilde{\sigma}_1^{-\frac{1}{q}}(s) \big[ (s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \tilde{\sigma}_1^{\frac{q}{q-p}}(s) \tilde{\sigma}_2(s) \big]^{\frac{q-p}{qp}}. \tag{4.105}$$

Отметим несколько простейших случаев, когда выполняются условия (4.102) при $i < s$ и неравенство (4.104). С этой целью заметим, что в силу (4.75)

$$\left( \frac{\tilde{\sigma}_1(s)}{s-1} \right)^{\frac{r}{1-r}} < a_{s+1}^{-\frac{1}{1-r}}.$$

Поэтому соотношение (4.104) следует из неравенства

$$f_{s,n}(k_s) \geq \left( \frac{a_s}{a_{s+1}} \right)^{\frac{1}{1-r}} = f_{s,n}(sn+1).$$

Таким образом, достаточным условием для справедливости (4.105) является выполнение неравенств (4.102) при всех $i \le s$, которые заведомо будут иметь место в том случае, когда числа $f_{i,n}(k_i)$ на промежутках $[(i-1)n+1, in]$, $i = 1, 2, \ldots, s$, не возрастают.

Полагая

$$\sigma_1 = \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} x_k, \qquad \sigma_2 = \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} x_{k+n},$$

имеем

$$f_{i,n}(k_i) - f_{i,n}(k_i+1) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{\sigma_1 + x_{k_i}}{\sigma_2 + x_{k_i+n}} = \frac{\sigma_1 x_{k_i+n} - \sigma_2 x_{k_i}}{\sigma_2(\sigma_2 + x_{k_i+n})}.$$

Знак этой разности совпадает со знаком величины

$$r_i = \sigma_1 x_{k_i+n} - \sigma_2 x_{k_i} = \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} (x_k x_{k_i+n} - x_{k+n} x_{k_i}),$$

поэтому отсюда заключаем, что числа $f_{i,n}(k_i)$ на указанных промежутках действительно не возрастают, если будут выполняться неравенства

$$x_k x_{k_i+n} - x_{k+n} x_{k_i} \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots k_i - 1,\ k_i \in [(i-1)n+1, in],\ i = \overline{1, s}. \tag{4.106}$$

Теперь докажем следующее утверждение.

**Лемма 4.6.** *Обозначим через* $\mathfrak{N}'$ *множество выпуклых вниз при всех* $t \ge 1$ *функций* $\varphi(\cdot)$, *для которых*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0, \tag{4.107}$$

*и, кроме того, таких, что функция*

$$\xi(t) = -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}, \qquad \varphi(t) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi'(t+0), \tag{4.108}$$

*на множестве* $t > 1$ *не возрастает. Тогда при любых натуральных* $n > 1$ *и* $i \ge 1$ *выполняются соотношения*

$$\triangle_{k,i} = \varphi(k)\varphi(k_i+n) - \varphi(k+n)\varphi(k_i) \ge 0, \tag{4.109}$$

$$k = 1, 2, \ldots k_i - 1, \quad k_i \in [(i-1)n+1, in].$$

*Доказательство.* Имеем

$$\frac{d}{dt}\ln\varphi(t) = -\xi(t).$$

Отсюда

$$\varphi(t) = \exp\left(-\int\limits_1^t \xi(t)\,d\tau + C\right), \qquad C = \ln\varphi(1).$$

Следовательно,

$$\triangle_{k,i} = \exp\left[-\left(\int\limits_1^k + \int\limits_1^{k_i+n}\right)\xi(t)\,dt+C\right]-\exp\left[-\left(\int\limits_1^{k+n} + \int\limits_1^{k_i}\right)\xi(t)\,dt+C\right],$$

и тогда неравенство $\triangle_{k,i} \geq 0$ будет эквивалентно соотношению

$$\left(\int\limits_1^k + \int\limits_1^{k_i+n}\right)\xi(t)\,dt \leq \left(\int\limits_1^{k+n} + \int\limits_1^{k_i}\right)\xi(t)\,dt,$$

или соотношению

$$-\int\limits_k^{k_i}\xi(t)\;dt + \int\limits_{k+n}^{k_i+n}\xi(t)\;dt \leq 0, \tag{4.110}$$

которое выполняется для любой невозрастающей функции $\xi(t)$, откуда и следует утверждение леммы. □

Будем говорить, что последовательность $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}'$, если существует в $\mathfrak{M}'$ функция $\varphi = \varphi(t)$ такая, что $\varphi(k) = \varphi_k$ при всех $k \in N$. В этом случае из леммы 4.6 заключаем, что если последовательность $\varphi = \{\alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит к $\mathfrak{M}'$, то соотношения (4.106) выполняются.

Теперь заметим, что последовательности $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\alpha^s = \{\alpha_k^s\}_{k=1}^{\infty}$ при любом $s > 0$ принадлежат к $\mathfrak{M}'$ одновременно. Действительно, пусть функция $\alpha = \alpha(t)$ такая, что $\alpha(k) = \alpha_k$, $k \in N$, и $\varphi(t) = \alpha^s(t)$. Тогда

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = s\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$$

и, следовательно, функции $\varphi'(t)/\varphi(t)$ и $\alpha'(t)/\alpha(t)$ не возрастают одновременно. Отсюда заключаем, что соотношения (4.106) будут выполненными для любой $\alpha \in \mathfrak{M}'$. Таким образом, на основании теоремы 4.11 получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.11$'$.** *Пусть $p$ и $q$ — действительные числа такие, что $q > p > 0$; $\psi$, $\mu$ и $\lambda$ — последовательности, для которых величины*

$$\nu_k = |\psi_k'| = \left|\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}\right|, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

*не возрастая, стремятся к нулю,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^{pq/(q-p)} < \infty,$$

*и последовательность $\nu = \{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит к $\mathfrak{N}'$. Тогда при любом натуральном $n$ выполняется равенство* (4.105).

По сравнению с теоремой 4.10, эта теорема имеет дополнительное условие: $\nu \in \mathfrak{N}'$. Отправляясь от определения, заключаем, что к множеству $\mathfrak{N}'$ принадлежат функции $\varphi(t) = t^{-s}$, $t \geq 1$, при любом $s > 0$; $\varphi(t) = t^{-s}\ln^r(t+e)$, $t \geq 1$, при любых действительных $r$ и любых $s > 0$. Функция $\varphi_r(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $t \geq 1$, принадлежит к $\mathfrak{N}'$ при любых $\alpha > 0$ и $r \in (0, 1]$ и не принадлежат $\mathfrak{N}'$, если $r > 1$, поскольку $\frac{\varphi_r'(t)}{\varphi_r(t)} = -\alpha r t^{r-1}$.

Таким образом, если, к примеру,

$$\nu_k = k^{-s}\ln^r(k+e), \qquad k \in N,\ s > 0,\ r \in R^1,$$

или же

$$\nu_k = \exp(-\alpha k^r), \qquad k \in N,\ \alpha > 0,\ r \in (0, 1],$$

то равенство (4.105) согласно теореме 4.11$'$ выполняется.

Условие принадлежности последовательности $\nu_k$ к множеству $\mathfrak{N}'$, являясь достаточным для выполнения неравенств (4.102), а следовательно, и для гарантии равенства (4.105), являются также в следующем смысле и необходимым.

Пусть $\mathfrak{N}''$ — множество выпуклых вниз при всех $t \geq 1$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию (4.107), для которых функция $\xi(t)$, определяемая формулой (4.108), строго возрастает. Если $\varphi \in \mathfrak{N}''$, то для неё знак в соотношении (4.110), а следовательно, и в (4.109) поменяется на противоположный. Поэтому, если $\alpha \in \mathfrak{N}''$, то вместо соотношения (4.102) будет неравенство

$$f_{i,n}(in+1) > f_{i,n}(k_i), \qquad k_i \in [(i-1)n+1, in],\ i = 1, 2, \dots, s-1,$$

что, в свою очередь, приведет к невыполнению неравенств (4.99), по крайней мере, для случая, когда $i = 1$ и $k_1 = 2$, а значит, и к нарушению равенства (4.98). Заметим, что функция $\varphi_r(t)$ при $r > 1$ как раз и принадлежит к $\varphi \in \mathfrak{N}''$. Впрочем, это ещё не означает, что если $\nu \in \mathfrak{N}''$, то равенство (4.105) не выполняется. Вопрос о выяснении условий, обеспечивающих выполнение равенства (4.105), и тем более, вопрос о нахождении значений величины $e_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(2)})_{p,\mu}$ в общем случае остается открытым.

## 5. Приближение индивидуальных элементов в пространствах $S_\Phi^p$

В §4 рассматривались экстремальные задачи для различных аппроксимационных характеристик множеств $\psi\, U_\varphi^{p,\,\mu}$. В данном же разделе приводятся результаты для наилучших приближений индивидуальных элементов из пространств $S_\Phi^p$.

Пусть, как и в п. 4.3,

$$E_n(f) = E_n(f)_{\psi,\,p,\,\mu} = \inf_{c_k} \Bigg\| f - \sum_{k \in g_{n-1}^{\psi}} c_k\, \varphi_k \Bigg\|_{p,\,\mu} \tag{5.1}$$

— наилучшее приближение элемента $f \in \psi\, S_\varphi^{p,\,\mu}$ полиномами, построенными по областям $g_{n-1}^{\psi}$. В случае, когда последовательность $\mu$ такова, что $\mu_k \equiv 1$, индекс $\mu$ во всех рассматриваемых объектах условимся опускать. При таких обозначениях в [16] доказаны следующие утверждения.

**Теорема 5.1.** *Пусть $f \in S_\varphi^p$, $p > 0$, и последовательность $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию (4.7). Тогда ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\,\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f)_{\psi,p}$$

*сходится, и при любом $n \in N$ справедливо равенство*

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^p\, E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p)\, E_k^p(f^\psi)_{\psi,p}, \tag{5.2}$$

*в котором величины $E_n(x)_{\psi,p}$ определяются равенством (5.1), а $\varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ — элементы характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.*

**Теорема 5.2.** *Пусть $f \in S_\varphi^p$, $p > 0$, и последовательность $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию (4.7). Пусть, далее,*

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1}\, E_k(f)_{\psi,p} = 0.$$

*Тогда для того, чтобы выполнялось включение*

$$f \in S^p_\varphi,$$

*необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} ( \varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}.$$

*Если этот ряд сходится, то при любом* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p}\, E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p})\, E_k^p(f)_{\psi,p}\ ,$$

*в котором величины* $E_n(x)_{\psi,p}$ *и* $\varepsilon_k$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* (5.1).

Теорема 5.1 устанавливает связь между наилучшим приближением элемента $f$ и наилучшими приближениями его производных. Подобные утверждения в теории приближений, как хорошо известно, принято называть прямыми теоремами. Теорема 5.2 в этом смысле является обратной: в ней по свойствам наилучшего приближения элемента $f$ указывается о наличии у него производных и дается информация о наилучшем приближении этих производных.

Величины $\varepsilon_n$ строго убывают, поэтому из (5.2) следует оценка

$$E_n^p(f)_{\psi,p} \le \varepsilon_n^p\, E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} \qquad \forall\, f \in \psi\, S^p_\varphi, \quad \forall\, n \in N. \tag{5.3}$$

Заметим, что в силу предложения 4.1 всегда

$$\lim_{n\to\infty} E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = 0.$$

На важных подмножествах $\mathfrak{N}$ из $\psi\, S^p_\varphi$ соотношение (5.3) дает точный результат. Отметим один из таких случаев.

Возьмем в качестве $\mathfrak{N}$ множество $\psi\, U^q_\varphi$ при $0 < q < p$. Если $f \in \psi\, U^q_\varphi$, то $f^\psi \in U^q_\varphi$ и, тем более, $f^\psi \in U^p_\varphi$. Значит, $\|f^\psi\|_p \le 1$. Следовательно, и $E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} \le 1$. Поэтому

$$E_n^p(f)_{\psi,p} \le \varepsilon_n^p \qquad \forall\, f \in \psi\, U^q_\varphi, \quad 0 < q \le p. \tag{5.4}$$

С другой стороны, пусть $k'$ — любая точка из множества $g_n^\psi \setminus g_{n-1}^\psi$ и $f_* = \psi_{k'}\,\varphi_{k'}$ $\quad (\psi_{k'} \neq 0)$. Так как $f_*^\psi = \varphi_{k'}$, то при любом $q > 0$ $\|f_*^\psi\|_q = 1$. Следовательно, $f_* \in \psi\, U^q_\varphi$ при любом $q > 0$. Но ясно, что

$$E_n(f_*)_{\psi,p} = \|f_*\|_{\varphi,p} = \psi_{k'} = \varepsilon_n. \tag{5.5}$$

Таким образом, объединяя соотношения (5.4) и (5.5) и полагая

$$E_n(\psi\,U_\varphi^q)_{\psi,p}=\sup_{f\in\psi\,U_\varphi^q}E_n(f)_{\psi,p},\qquad \mathcal{E}_n(\psi\,U_\varphi^q)_{\psi,p}=\sup_{f\in\psi\,U_\varphi^q}\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p},$$

приходим к следующему утверждению.

**Теорема 5.3.** *Пусть $\psi=\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условиям* (4.7) *и* (4.15). *Тогда при любых $n\in N$ и $0<q\le p<\infty$ справедливы равенства*

$$E_n(\psi\,U_\varphi^q)_{\psi,p}=\mathcal{E}_n(\psi\,U_\varphi^q)_{\psi,p}=\varepsilon_n,$$

*где $\varepsilon_n$ — $n$-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.*

Заметим, что это утверждение является частным случаем теоремы 4.1.

## 6. Приложения полученных результатов к задачам приближения периодических функций многих переменных

Рассмотрим одну из возможных конкретизаций пространств $S_\varphi^p=S_\varphi^p(\mathfrak{X})$, позволяющую из полученных в §4 и §5 общих результатов получать утверждения о приближениях периодических функций.

Пусть $R^m$ — $m$-мерное, $m\ge 1$, евклидово пространство, $x=(x_1,\dots,x_m)$ — его элементы, $Z^m$ — целочисленная решетка в $R^m$ — множество векторов $k=(k_1,\dots,k_m)$ с целочисленными координатами, $x\,y=x_1\,y_1+\ldots+x_m\,y_m$, $|x|=\sqrt{(x,x)}$ и, в частности, $k\,x=k_1\,x_1+\ldots+k_m\,x_m$, $|k|=\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}$.

Пусть, далее, $L=L(R^m)$ — множество всех $2\pi$-периодических по каждой их переменных функций $f(x)=f(x_1,\dots,x_m)$, суммируемых на кубе периодов $Q^m$,

$$Q^m=\{x:\ x\in R^m,\ -\pi\le x_k\le\pi,\quad k=1,\dots,m\}.$$

Если $f\in L$, то через $S[f]$ обозначается ряд Фурье функции $f$ по тригонометрической системе

$$(2\pi)^{-m/2}\,e^{ikx},\qquad k\in Z^m, \tag{6.1}$$

т.е.

$$S[f]=(2\pi)^{-m/2}\sum_{k\in Z^m}\widehat{f}(k)\,e^{ikx},\qquad \widehat{f}(k)=(2\pi)^{-m/2}\int\limits_{Q^m}f(t)\,e^{ikt}\,dt. \tag{6.2}$$

Если считать неразличимыми функции, эквивалентные относительно меры Лебега, то в качестве $\mathfrak{X}$ можно взять пространство $L(R^m)$, а в качестве системы $\varphi$ — тригонометрическую систему $\tau = \{\tau_s\}$, $s \in N$, где

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2}\, e^{ik_s\, x}, \qquad k_s \in Z^{\,m},\ s = 1, 2, \ldots, \tag{6.3}$$

полученную из системы (1.6) путем произвольной фиксированной нумерации ее элементов; скалярное произведение в этом случае задается известным образом:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(t)\, e^{-ik_s\, t}\, dt = \widehat{f}(k_s) = \widehat{f_\tau}(k_s). \tag{6.4}$$

При фиксированном $p \in (0, \infty)$ согласно (1.6) положим

$$S^p_\tau = S^p_\tau\,(L(R^m)) = \Big\{ f \in L(R^m)) : \sum_{S=1}^{\infty} |\widehat{f}(k_s)|^p \leq \infty \Big\}. \tag{6.5}$$

"$\varphi$-норма" в пространстве $S^p_\tau$ вводится согласно (1.7):

$$\|\, f\,\|_{p,\tau} = \bigg( \sum_{S=1}^{\infty} \big|\widehat{f}(k_s)\big|^p \bigg)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.6}$$

В силу равенств (6.5) и (6.6), величины $\|\cdot\|_{p,\tau}$ и сами пространства $S^p_\tau$ не зависят от нумерации системы (6.1) и поэтому в дальнейшем полагаем $S^p_\tau = S^p$.

Пусть теперь $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ — произвольная система комплексных чисел — кратная последовательность. Для функций $f \in L$ наряду с (6.2) рассмотрим ряд

$$(2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \psi(k)\, \widehat{f}(k)\, e^{ikx}. \tag{6.6$'$}$$

Если этот ряд для данной функции $f$ и системы $\psi$ является рядом Фурье некоторой функции $F$ из $L$, то $F$ назовем $\psi$-интегралом функции $f$ и будем писать $F(x) = \mathcal{J}^\psi(f; x)$. При этом иногда удобно функцию $f$ называть $\psi$-производной функции $F$ и писать $f(x) = D^\psi(F; x) = F^\psi(x)$. Множество $\psi$-интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через $L^\psi$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L$, то $L^\psi\,\mathfrak{N}$ будет обозначать множество $\psi$-интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$. Ясно, что если $f \in L^\psi$, то коэффициенты Фурье функций $f$ и $f^\psi$ связаны соотношением

$$\widehat{f}(k) = \psi(k)\, \widehat{f}^{\,\psi}(k), \qquad k \in Z^m. \tag{6.7}$$

Будем рассматривать в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар $U^p$ в пространстве $S^p$:

$$U^p = \{f: \quad f \in S^p, \ \|f\|_p \le 1\}. \tag{6.8}$$

В этом случае полагаем $L^\psi U^p = L_p^\psi = L_p^\psi(R^m)$. Относительно системы $\psi$ предполагается, что

$$\lim_{|k|\to\infty} \psi(k) = 0. \tag{6.9}$$

Заметим, что если $f \in L^\psi S^p$ и $|\psi(k)| \le C, \ k \in Z^m, \ C > 0$, то $f \in S^p$, т.е. условие (6.9) всегда гарантирует включение $L_p^\psi \subset S^p$.

Определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ следующим образом: $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — множество значений величин $|\psi(k)|, \ k \in Z^m$, упорядоченное по их убыванию; $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^\infty$, где

$$g_n = g_n^\psi = \{k \in Z^m: \quad |\psi(k)| \ge \varepsilon_n\},$$

$\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$, где $\delta_n = \delta_n^\psi = |g_n|$ — количество чисел $k \in Z^m$, принадлежащих множеству $g_n$.

Ввиду условия (6.9), в рассматриваемом случае последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$, определяются как и в п. 4.3, с учетом того, что на этот раз $k \in Z^m$. Как и раньше считается, что $g_0 = g_0^\psi$ есть пустое множество и что $\delta_0 = \delta_0^\psi = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для функций $f \in L^\psi$ рассмотрим тригонометрические полиномы — аналоги сумм (4.9):

$$S_n(f;x) = S_{g_n^\psi}(f;x) = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k\in g_n^\psi} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}, \qquad n \in N, \tag{6.10}$$

$$S_0(f;x) = 0,$$

где $g_n^\psi$ — элементы последовательности $g(\psi)$.

Пусть $p$ и $q$ — произвольные числа, $p, q > 0$,

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p} = \|f(x) - S_{n-1}(f;x)\|_{S^p}, \tag{6.11}$$

$$\mathcal{E}_n(L_q^\psi)_p = \sup_{f\in L_q^\psi} \mathcal{E}(f)_{\psi,p}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.12}$$

$$E_n(f)_{\psi,p} = \inf_{a_k} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k\in g_{n-1}^\psi} a_k\, e^{ikx} \right\|_{S^p} \tag{6.13}$$

и

$$E_n(L_q^\psi)_p = \sup_{f\in L_q^\psi} E_n(f)_{\psi,p}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.14}$$

Пусть, далее,

$$
\begin{gathered}
d_n(L^\psi_p)_p = \inf_{F_n\in G_n}\ \sup_{f\in L^\psi_p}\ \inf_{u\in F_n}\|f-u\|_{S^p}, \qquad n\in N,\\
d_0(L^\psi_p)_p \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in L^\psi_p}\|f\|_{S^p},
\end{gathered}
\tag{6.15}
$$

где $G_n$ — множество всех $n$-мерных подпространств в $S^p$, — поперечники по Колмогорову классов $L^\psi_p$ и

$$
e_n(L^\psi_q)_p = \sup_{f\in L^\psi_q}\ \inf_{a_k,\gamma_n}\left\|f(x)-(2\pi)^{-m/2}\sum_{k\in\gamma_n}a_k\,e^{ikx}\right\|_{S^p}, \tag{6.16}
$$

где $\gamma_n$ — произвольный набор из $n$ векторов $k\in Z^m$, — величина наилучшего $n$-членного приближения класса $L^\psi_q$ в пространстве $S^p$.

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения — аналоги, а по существу — частные случаи теорем, доказанных в §§ 4 и 5.

**Теорема 6.1.** *Пусть $\psi=\{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющих условиям* (6.9) *и таких, что*

$$
\psi(k)\neq 0 \qquad \forall\, k\in Z^m. \tag{6.17}
$$

*Тогда при любых $n\in N$ и $0<q\le p<\infty$ справедливы равенства*

$$
E_n(L^\psi_q)_p=\mathcal{E}_n(L^\psi_q)_p=\varepsilon_n\,, \tag{6.18}
$$

$$
e_n(L^\psi_q)_p=\sup_{l>n}\,(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l}\overline{\psi}_k^{\,-q}\right)^{-\frac{p}{q}}=(l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}_k^{\,-q}\right)^{-\frac{p}{q}}, \tag{6.19}
$$

*где $\overline{\psi}=\{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность, определяющаяся соотношениями*

$$
\overline{\psi}_k=\varepsilon_n \qquad \text{при} \quad k\in(\delta_{n-1},\delta_n],\ n=1,2,\ldots, \tag{6.20}
$$

*$\varepsilon_n$ и $\delta_n$ — члены характеристических последовательностей системы $\psi$, а $l^*$ — некоторое натуральное число, которое в условиях теоремы всегда существует.*

Аналогами теорем 5.1 и 5.2 являются следующие утверждения.

**Теорема 6.2.** *Пусть $f\in L^\psi_p$, $p>0$, и $\psi=\{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условиям* (6.9)*. Тогда ряд*

$$
\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^p-\varepsilon_{k-1}^p)E_k^p(f^\psi)_{\psi,p}
$$

*сходится и при любых $n \in N$ справедливо равенство*

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^p\, E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f^\psi)_{\psi,p},$$

*где величины $E_\nu(\cdot)_{\psi,p}$ определяются равенством* (6.13), *а $\varepsilon_k$ — элементы характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$ системы $\psi$.*

**Теорема 6.3.** *Пусть $f \in S^p$, $p > 0$, и система $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ удовлетворяет условию* (6.13). *Пусть, далее,*

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1}\, E_k(f)_{\psi,p} = 0.$$

*Тогда для того, чтобы выполнялось включение $f \in L_p^\psi$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}.$$

*Если этот ряд сходится, то при любом $n \in N$ справедливо равенство*

$$E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p}\, E_n^p(f)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p},$$

*в котором величины $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ и $\varepsilon_k$ имеют тот же смысл, что и в теореме* 6.2.

*Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ — произвольная система чисел, удовлетворяющая условию* (6.9). *Перенумеруем все векторы $k \in Z^m$ в какомнибудь порядке, используя натуральный индекс $s$. Будем говорить, что система $\psi$ принадлежит множеству $A_{p,q}$ при некоторых значениях $p$ и $q$, $q > p > 0$, если*

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\psi(k_s)|^{\frac{pq}{q-p}} < \infty. \qquad (6.21)$$

*Ясно, что множества $A_{p,q}$ не зависят от способа нумерации чисел $k \in Z^m$, а полностью определяются величинами $|\psi(k)|$ и числами $p$ и $q$.*

**Теорема 6.4.** *Пусть система $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ при данных $p$ и $q$, $q > p > 0$, принадлежит множеству $A_{p,q}$. Тогда*

$$E_n(L_q^\psi)_p = \mathcal{E}_n(L_q^\psi)_p = \left( \sum_{k=\delta_{n-1}+1}^{\infty} \overline{\psi}^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad (6.22)$$

*и*

$$e_n^p(L_q^\psi)_p = \widetilde{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}}(s)[(s-n)^{\frac{q}{q-p}} + \widetilde{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\,\widetilde{\sigma}_2(s)]^{\frac{q-p}{q}}, \qquad (6.23)$$

*где*

$$\widetilde{\sigma}_1(s) = \sum_{k=1}^{s} \overline{\psi}_k^{\,-q}, \qquad \widetilde{\sigma}_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \overline{\psi}_k^{\,\frac{pq}{q-p}},$$

$\overline{\psi} = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность, для которой*

$$\overline{\psi}_k = \varepsilon_k \qquad \text{при} \quad k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \; n = 1, 2, \ldots, \qquad (6.24)$$

$\varepsilon_n$ *и* $\delta_n$ *— члены характеристических последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta_\psi$*; число* $s$ *в* (6.19) *выбрано из условия*

$$\overline{\psi}_s^{\,-q} \le \frac{1}{s-n} \sum_{k=1}^{s} \overline{\psi}_k^{\,-q} < \overline{\psi}_{s+1}^{\,-q}. \qquad (6.25)$$

*Такое число* $s$ *всегда существует и единственно.*

*Доказательства* этих теорем получаются из соответствующих теорем предыдущих параграфов следующим образом.

Отправляясь от заданных систем $\psi$, фигурирующих в этих утверждениях, перенумеруем все векторы $k \in Z^m$ так, чтобы числами $s$ при $s \in (\delta_{n-1}, \delta_n]$ были перенумерованы все векторы $k$ из множеств $g_n^\psi \setminus g_{n-1}^\psi$ в каком-нибудь фиксированном порядке. Затем определим последовательность $\psi' = \{\overline{\psi}_s\}_{s=1}^{\infty}$, положив

$$\psi'_s = \psi(k_s), \qquad s = 1, 2, \ldots. \qquad (6.26)$$

Тогда

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = (2\pi)^{-m/2} \sum_{s=1}^{\infty} \widehat{f}(k_s)\, e^{i\,k_s\,x}, \qquad (6.27)$$

и, согласно (6.26),

$$\mathcal{J}^{\psi'}(f;x) = (2\pi)^{-m/2} \sum_{s=1}^{\infty} \psi(k_s)\widehat{f}(k_s)\, e^{i\,k_s\,x} = \mathcal{J}(f;x) \quad \forall\, f \in L. \; (6.28)$$

Следовательно, $L^{\psi'} = L^\psi$. Заметим далее, что $L_p^{\psi'} = \psi' U^p$, где $\psi' U^p$ — множество, определяющееся согласно равенству $(4.8')$:

$$\psi' U^p = \{f \in L: \;\; f^{\,\psi'} \in U^p\},$$

в котором $U^p = U^p_\varphi$ и $\varphi = \{2\pi^{-m/2}e^{i\,k_s\,x}\}_{s=1}^\infty$. Кроме того, последовательности $\varepsilon(\psi')$ и $\varepsilon(\psi)$, а также $\delta(\psi')$ и $\delta(\psi)$ совпадают и справедливы равенства

$$S_{g_n^{\psi'}}(f) = S_{g_n^\psi}(f;x), \quad \mathcal{E}_n(f)_{\psi',p} = \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p}, \quad \mathcal{E}_n(\psi' U^q)_p = \mathcal{E}_n(L^\psi_q)_p,$$

$$E_n(f)_{\psi',p} = E_n(f), \qquad E_n(\psi' U^q)_p = E_n(L^\psi_q)_p,$$

в которых левые части определяются равенствами (4.9), (4.10), а правые — соотношениями (6.10)–(6.14) соответственно. Ясно также, что и $e_n(L^\psi_q)_p = e_n(\psi' U^q)$ и $\overline{\psi'} = \overline{\psi}$. Отсюда заключаем, что равенство (6.18) следует из (4.14); равенство (6.19) — из теоремы 4.7; теоремы 6.2 и 6.3 вытекают из теорем 5.1 и 5.2; теорема 6.4 следует из теорем 4.4 и 4.8.

Ради полноты изложения, приведем здесь переформулировку утверждения теоремы 4.2 для колмогоровских поперечников множеств $L^\psi_p$.

**Теорема 6.5.** *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условиям* (6.9) *и* (6.17), *и $p \in [1,\infty)$. Тогда при любом $n \in N$*

$$d_{\delta_{n-1}}(L^\psi_p; S^p) = d_{\delta_{n-1}+1}(L^\psi_p; S^p) = \cdots = d_{\delta_{n-1}}(L^\psi_p; S^p) = \mathcal{E}_n(L^\psi_p)_p = \varepsilon_n, \tag{6.29}$$

*где $\varepsilon_n$ и $\delta_n$ — члены характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi)$ и $\delta(\psi)$.*

## 7. Замечания

**1. О последовательностях** $\Psi$. Во всех предыдущих построениях центральное место отводится последовательностям $\psi$: они определяют приближаемые множества, по ним строится аппарат приближения и через них выражаются аппроксимационные характеристики. Кроме условий вида (6.9) и (6.21), без которых рассмотрения становятся почти бессодержательными, в настоящей работе на последовательности $\psi$ никаких ограничений не налагается. Поэтому сами системы $\psi$, а с ними и их характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ в общем случае могут быть достаточно сложными.

В многомерном случае, по-видимому, наиболее простыми и естественными являются системы $\psi$, у которых числа $\psi(k)$ представляются произведениями

$$\psi(k) = \psi(k_1,\ldots,k_m) = \prod_{j=1}^m \psi_j(k_j), \qquad k_j \in Z^1,\ j = \overline{1,m}, \tag{7.1}$$

значений одномерных последовательностей $\psi_j = \{\psi_j(k_j)\}_{k_j=1}^{\infty}$. Если к тому же

$$\psi(-k_j) = \overline{\psi_j(k_j)}, \qquad j = \overline{1,m},$$

(через $\overline{z}$ обозначено число, комплексно сопряженное с $z$), то множества $g_n^{\psi}$ будут симметричными относительно всех координатных плоскостей и, как нетрудно убедиться,

$$\sum_{k\in Z^m} \psi(k)\, e^{ikt} = \sum_{k\in Z_+^m} 2^{m-q(k)} \prod_{j=1}^{m} |\psi_j(k_j)| \cos(k_j t_j - \frac{\beta_{k_j}\pi}{2}), \qquad (7.2)$$

где $Z_+^m = \{k \in Z^m,\ k_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}\}$, $q(k)$ — количество координат вектора $k$, равных нулю, а числа $\beta_{k_j}$ определяются равенствами

$$\cos\frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{\operatorname{Re}\psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}, \qquad \sin\frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{\operatorname{Im}\psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}.$$

В этом случае множество $L^{\psi}$— $\psi$-интегралов действительных функций $\varphi$ из $L(R^m)$ — состоит из действительных функций $f$ и если при этом ряд в (7.2) является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\mathcal{D}_{\psi}(t)$, то необходимым и достаточным условием включения $f \in L^{\psi}\mathfrak{N}$ является возможность представления $f$ сверткой вида

$$f(x) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{Q^m} \varphi(x-t)\, \mathcal{D}_{\psi}(t)\, dt,$$

в которой $\varphi \in \mathfrak{N}$ и почти всюду $\varphi(x) = f^{\psi}(x)$. Это, в частности, означает, что классы $L^{\psi}\mathfrak{N}$ охватывают классы функций, представимых свертками с фиксированными суммируемыми ядрами (см., например, [51, §1.9]).

**2. О связи между пространствами** $S^p$ **и** $L_p$. Пусть $L_p = L_p(R^m)$, $p \in [1,\infty)$, — пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_p}$,

$$\|f\|_{L_p} = \left( \int\limits_{Q^m} |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}. \qquad (7.3)$$

Связь между множествами $L_p$ и $S^p$ устанавливает известная теорема Хаусдорфа–Юнга (см., например, [52, п. XII.2]), утверждающая, что

(I) Если $f \in L_p$, $p \in (1,2]$, и $\widehat{f}(k)$ — коэффициенты Фурье функции $f$, определяемые формулой

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(t)\, e^{-ikt} dt, \qquad (7.4)$$

то

$$\left(\sum_{k\in Z^m} |\widehat{f}(k)|^{p'}\right)^{1/p'} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\,\|f\|_{L_p}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

(II) Пусть $\{c_k\}_{k\in Z^m}$ — последовательность комплексных чисел, для которой

$$\sum_{k\in Z^m} |c_k|^p<\infty, \qquad p\in(1,2].$$

Тогда существует функция $f\in L_{p'}$, для которой $\widehat{f}(k)=c_k$ и

$$\|f\|_{L'_p} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\left(\sum_{k\in Z^m} |c_k|^p\right)^{1/p}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Из этой теоремы следует, что если $p\in(1,2]$, то

$$L_p\subset S^{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{S^{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\,\|f\|_{L_p}, \tag{7.5}$$

$$S^p\subset L_{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{L'_p} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\,\|f\|_{S^p}. \tag{7.6}$$

В частности, при $p=p'=2$ справедливы равенства

$$L_2=S^2 \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{L_2}=\|\cdot\|_{S^2}. \tag{7.7}$$

В силу соотношений (7.5) и (7.6), теоремы, доказанные для пространств $S^p$, содержат информацию и для пространств $L_p$, которая является более полной вследствие (7.7) в случае, когда $p=2$.

Ввиду особой важности этого случая, приведем точные формулировки соответствующих утверждений.

Пусть, как и раньше, $\psi=\{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ — произвольная система комплексных чисел и $L^\psi\mathfrak{N}$ — множество $\psi$-интегралов всех функций $f\in\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L=L(R^m)$, $m\ge 1$. Возьмем в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар $U_{L_2}$ в пространстве $L_2$:

$$U_{L_2}=\{f:\ \ f\in L_2,\ \|f\|_{L_2}\le 1\}. \tag{7.8}$$

Здесь норма $\|\cdot\|_{L_2}$ определяется равенством (7.3) при $p=2$. В этом случае положим $L^\psi U_{L_2}=U^\psi_{L_2}$.

Считая выполненным условие (6.9), определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$, а также полиномы $S_n(f;x)$ согласно формул (6.10) и для $f\in U^\psi_{L_2}$ положим

$$\mathcal{E}^\psi_n(f)_{L_2}=\|f(x)-S_{n-1}(f;x)\|_{L_2}, \qquad \mathcal{E}_n(U^\psi_{L_2})_{L_2}=\sup_{f\in U^\psi_{L_2}}\mathcal{E}^\psi_n(f)_{L_2},$$

$$E_n^{\psi}(f)_{L_2} = \inf_{a_k} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k\in g_{n-1}^{\psi}} a_k\, e^{ikx} \right\|_{L_2}$$

и

$$E_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = \sup_{f\in U_{L_2}^{\psi}} E_n^{\psi}(f)_{L_2}.$$

Пусть еще

$$d_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = \inf_{F_n\in G_n} \sup_{f\in L_p^{\psi}} \inf_{u\in F_n} \|f-u\|_{L_2}, \qquad n\in N,$$

$$d_o(U_{L_2}^{\psi}) = \sup_{f\in U_{L_2}^{\psi}} \|f\|_{L_2},$$

где $G_n$ — множество всех $n$-мерных подпространств в $L_2$ и

$$e_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = \sup_{f\in U_{L_2}^{\psi}} \inf_{a_k,\gamma_n} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k\in\gamma_n} a_k\, e^{ikx} \right\|_{L_2},$$

где $\gamma_n$ — произвольный набор из $n$ векторов $k \in Z^m$ — величина наилучшего $n$-членного приближения класса $U_{L_2}^{\psi}$ в пространстве $L_2$. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 7.1.** *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условиям* (6.5) *и* (6.13)*. Тогда при любых $n \in N$ выполняются равенства*

$$E_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = \mathcal{E}_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = \varepsilon_n, \tag{7.9}$$

$$d_{\delta_{n-1}}(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = d_{\delta_{n-1}+1}(U_{L_2}^{\psi}) = \dots = d_{\delta_n-1}(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = E_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = \varepsilon_n, \tag{7.10}$$

$$e_n^2(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = \sup_{l>n}(q-n)/\sum_{s=1}^{l} \overline{\psi}_s^{\,-2} = (l^*-n)/\sum_{s=1}^{l^*} \overline{\psi}_s^{\,-2}. \tag{7.11}$$

*В этих равенствах $\varepsilon_s$ и $\delta_s$ — элементы характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi)$ и $\delta(\psi)$, $\delta_0 = 0$, $l^*$ — некоторое натуральное число и*

$$\overline{\psi}_s = \varepsilon_n, \qquad \delta_{n-1} < s < \delta_n, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

*Доказательство.* В силу (7.7) и (7.8) видим, что $U_{L_2} = U^2$ и, следовательно, $U_{L_2}^{\psi} = L_2^{\psi}$. Поэтому справедливы равенства

$$\mathcal{E}_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = \mathcal{E}_n(L_2^{\psi})_2, \quad E_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = E_n(L_2^{\psi})_2, \quad d_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = d_n(L_2^{\psi})_2$$

и

$$e_n(U_{L_2}^{\psi})_{L_2} = e_n(L_2^{\psi})_2, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Отсюда заключаем, что равенства (7.9)–(7.11) следуют из соотношений (6.18), (6.25) и (6.19). ☐

Отметим, что равенства (7.9) и (7.10) в одномерном случае, т.е. при $m = 1$ в несколько другой терминологии были получены еще в 1936 г. в известной работе А. Н. Колмогорова [53], положившей начало исследованию поперечников различных функциональных классов. В общем случае эти равенства можно получить и путем анализа результатов и рассуждений §4.4 книги В. М. Тихомирова [54].

Равенство (7.11), по-видимому, является новым даже и в одномерном случае.

Отметим также, что, как следует из равенств (7.9) и (7.10), в пространстве $L_2$ значения поперечников множеств $U^{\psi}_{L_2}$ реализуют приближения суммами (6.10), т.е. полиномами, которые являются наилучшими в смысле поперечников в пространствах $S^p$ при всех $p \in [1, \infty)$ для классов $L^{\psi}_p$. Это позволяет предположить, что именно суммы (6.10) будут наилучшим аппаратом приближения (опять-таки в смысле колмогоровских поперечников) и в пространствах $L_p$ при всех $p \geq 1$ для соответствующих множеств $U^{\psi}_{L_p}$,

$$U^{\psi}_{L_p} = L^{\psi} U_{L_p}, \;\; U_{L_p} = \{f : \;\; f \in L_p, \;\; \|f\|_{L_p} \leq 1\},$$

являющихся прямым обобщением известных пространств Соболева, которые получаются из $U^{\psi}_{L_p}$, если взять $\psi(k)$ в виде (7.1) в случае, когда

$$\psi_j(k_j) = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ (ik_j)^{r_j}, & k_j \neq 0, \; j = \overline{1, m} \end{cases} \tag{7.12}$$

где $r_j$ — некоторые действительные числа.

Пусть $m = 2$ и последовательности $\psi_1(k_1)$ и $\psi_2(k_2)$ заданы равенствами (7.12) при условии $r_1 = r_2 = r > 0$.

Классы $U^{\psi}_{L_2}$, определяющиеся такими последовательностями, с точки зрения нахождения их поперечников впервые рассматривались К. И. Бабенко в [1, 2]. Им в этом случае фактически было получено и соотношение (7.10).

В данной ситуации характеристическая последовательность $\varepsilon(\psi)$ состоит из элементов $\varepsilon_n = n^{-r}, \; n \in N$, множества $g^{\psi}_n$ — множества векторов $k = (k_1, k_2) \in Z^2$, удовлетворяющих условию

$$k'_1 k'_2 \leq n,$$

где

$$k'_j = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ |k_j|, & k_j \neq 0, \; j = 1, 2. \end{cases}$$

Такие множества впервые появились в упомянутых работах К. И. Бабенко и сейчас их принято называть гиперболическими крестами.

Все эти комментарии приведены автором в [15]. Там же имеются и более детальные результаты для периодического случая — вплоть до конкретных численных примеров.

## Литература


[1] К. И. Бабенко, *О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами* // ДОКЛ. АН СССР. **132** (1960), N 2, 247–250.

[2] К. И. Бабенко, *О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами* // ДАН СССР. **132** (1960), N 5, 982–985.

[3] С. А. Теляковский, *Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных* // Сиб. мат. журн. **4** (1963), N 6, 1404–1411.

[4] С. А. Теляковский, *Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами* // Мат. сборник. **63(105)** (1964), 426–444.

[5] Я. С. Бугров, *Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной* // Мат. сборник. **64 (106)** (1964), 410–418.

[6] Н. С. Никольская, *Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике $L_p$* // ДОКЛ. АН СССР. **208** (1973), N 5, 1283–1285.

[7] Н. С. Никольская, *Приближение периодических функций класса $SH^r_{p^*}$ суммами Фурье* // Сиб. мат. журн. **16** (1975), N 4, 761–780.

[8] Э. М. Галеев, *Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $L_p$* // Успехи мат. наук. **32** (1977), N 4, 251–252.

[9] Э. М. Галеев, *Приближение сумами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными* // Мат. заметки. **23** (1978), N 2, 197–212.

[10] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. **178** (1986), 1–112.

[11] П. В. Задерей, *Приближение $(\overline{\psi}, \overline{\beta})$-дифференцируемых периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн. **45** (1993), N 3, 367–377.

[12] А. С. Романюк, *О приближении классов периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн. **44** (1992), N 5, 662–672.

[13] А. С. Романюк, *Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве $L_q$* // Укр. мат. журн. **43** (1991), N 10, 1398–1408.

[14] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств $S^p_\varphi$*. Киев, 2001, 85 с. (Препр./ НАН Украины, Ин-т математики; 2001.2).

[15] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств $S^p_\varphi$* // Укр. мат. журн. **53** (2001), N 3, 392–416.

[16] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств $S^p_\varphi$ в разных метриках* // Укр. мат. журн. **53** (2001), N 8, 1121–1146.

[17] А. И. Степанец, А. С. Сердюк, *Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве $S^p$* // Укр. мат. журн. **54** (2002), N 1, 106–124.

[18] А. И. Степанец, *Методы теории приближений: в 2 ч.* // Праці Ін-ту математики НАН Украини. **40**, Київ: Ін–т математики НАН Украини, 2002, ч. II, 468 с.

[19] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств $S^p$* // Теорія наближень та гармонійний аналіз: Праці Українського математичного конгресу, 2001. Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. С. 208–226.

[20] А. И. Степанец, В. И. Рукасов, *Пространства $S^p$ с несимметричной метрикой* // Укр. мат. журн. **54** (2003), N 2, 264–277.

[21] А. И. Степанец, В. И. Рукасов, *Наилучшие "сплошные" $n$-членные приближения в пространствах $S^p_\varphi$* // Укр. мат. журн. **55** (2003), N 5, 663–670.

[22] А. И. Степанец, А. Л. Шидлич, *Наилучшие $n$-членные приближения $\Lambda$-методами в пространствах $S^p_\varphi$* // Укр. мат. журн. **55** (2003), N 8, 1107–1126.

[23] А. И. Степанец, *Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах* // Укр. мат. журн. **55** (2003), N 10, 1392–1423.

[24] А. И. Степанец, *Наилучшие приближения $q$-эллипсоидов в пространствах $S^{p,\,\mu}_\varphi$* // Укр. мат. журн. **56** (2004), N 10, 1378–1383.

[25] А. С. Сердюк, *Поперечники в просторі $S^p$ класів функцій, що означаються модулями неперервності їх $\psi$-похідних.* Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, 2003, Т. 46, с. 229–248.

[26] В. Р. Войцеховський, *Поперечники деяких класів з простору $S^p$*. Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін–ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, 2003, Т. 46, с. 17–26.

[27] С. Б. Вакарчук, *Неравенство типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах $S^p$, $1 \le p < \infty$* // Укр. мат. журн. **56** (2004), N 5, 595–605.

[28] С. Б. Вакарчук, *О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации в пространствах $S^p$ $(1 \le p < \infty)$* // Воронеж.зим. мат.школа "Современные методы теории фунций и смежные проблемы" (Воронеж, 26 января–2 февраля, 2003 г.). Воронеж: Воронеж.ун-т, 2003, 47–48.

[29] В. Р. Войцеховський, *Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору $S^p$ сумами Зигмунда* // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін–ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, **35** (2002), 33–46.

[30] А. Л. Шидліч, *Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах $S^p_\varphi$* // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, **35** (2002), 215–232.

[31] А. Л. Шидліч, *Найкращі $n$-членні наближення $\Lambda$-методами в просторах $S^p_\varphi$* // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, **46** (2003), 283–306.

[32] В. И. Рукасов, *Наилучшие $n$-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой* // Укр. мат. журн. **55** (2003), N 6, 806–816.

[33] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* М.: Изд-во "Мир", 1974, 333 с.

[34] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М.: Изд-во "Наука", 1965, 407 с.

[35] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* М.: Изд-во Иностранной литературы, 1948, 456 с.

[36] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения.* М.: Изд-во "Наука", 1976, 320 с.

[37] С. Б. Стечкин, *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов* // Докл. АН СССР. **102** (1955), N 1, 37-40

[38] К. И. Осколков, *Аппроксимационные свойства суммируемых функций на множествах полной меры* // Матем. сб. **103** (1977), N 4, 563–589.

[39] В. Е. Майоров, *О линейных поперечниках соболевских классов* // Докл. АН СССР. **243** (1978), N 5, 1127–1130.

[40] G. Y. Macovoz, *On trigonometric n-widths and their generalization* // J. Approxim. Theory. **41** (1984), N 4, 361–366.

[41] Б.С. Кашин, *Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. **172** (1985), 187–191.

[42] Э. С. Белинский, *Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники* // ДОКЛ. АН СССР. **284** (1985), N 6. 1294–1297.

[43] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, *О наилучших $m$-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве $L$* // Матем. заметки. **56** (1994), N 5, 57–86.

[44] В. Н. Темляков, *Нелинейные поперечники по Колмогорову* // Матем. заметки. **63** (1998), N 6, 891–902.

[45] V. N. Temlyakov, *Greedy Algorithm and $m$-Term Trigonometric Approximation* // Constructive Approx. **14** (1998), 569–587.

[46] Dinh Dung, *Continuons Algorithms in $n$-Term Approximation and Non-Linear Widths* // J. Approxim. Theory. **102** (2000), 217–242.

[47] А. С. Романюк, *Наилучшие $M$-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных* // Изв. РАН. Сер. матем. **67** (2003), N 2, 61–100.

[48] R. A. De Vore, V. N. Temlyakov, *Nonlinear Approximation in Finite-Dimensional Spaces* // J. of Comlexity. **13** (1997), 489–508.

[49] R. A. De Vore, *Nonlinear Approximation* // Acta Numerica. (1998), 51–150.

[50] V. N. Temlyakov, *Nonlinear Methods of Approximation* // Found. Comput. Math. **3** (2003), 33–107.

[51] А. И. Степанец, *Методы теории приближений: в 2 ч.* // Праці Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, **40** (2002), ч. I, 426 с.

[52] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды: в 2 ч.* М.: Изд-во "Мир", 1965, Т. 2, 537 с.

[53] А. Н. Колмогоров, *Über die beste Annaäherung von Functiionen einer gegebenen Functionenkklass* // Ann. of Math. **37** (1936), N 1, 107–110.

[54] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976, 307 с.

## Сведения об авторах

**Александр Иванович Степанец**

Институт математики НАН Украины
ул. Терещенковская 3,
01601, Киев-4,
Украина
*E-Mail:* `step@imath.kiev.ua`