Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 2, 180 – 188

Незв'язні простори і берівська класифікація відображень першого класу Лебеґа

Олена О. Карлова

(*Представлена В. Я. Гутлянським*)

Анотація. Доведено, що кожне відображення $f : X \to Y$ першого функціонального класу Лебеґа належить до першого класу Бера, якщо X — слабко ультранормальний простір, а Y — метризовний сепарабельний простір.

2000 MSC. 54C08, 26A21.

Ключові слова та фрази. Відображення першого класу Бера, відображення першого класу Лебеґа, ультранормальний простір.

1. Нехай X і Y — топологічні простори. Ми будемо позначати символом $B_1(X, Y)$ сукупність усіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Бера, тобто поточкових границь послідовностей неперервних функцій.

Множину $A \subseteq X$ ми називаємо

а) *функціональною типу* G_δ, якщо $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, де G_n — функціонально відкриті в X множини,

б) *функціональною типу* F_σ, якщо $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, де F_n — функціонально замкнені в X множини,

в) *функціонально двосторонньою*, якщо вона одночасно є функціональною типу F_σ і функціональною типу G_δ.

Через $H_1(X, Y)$ /$H_1^*(X, Y)$/ позначатимемо сукупність усіх відображень $f : X \to Y$ першого /функціонального/ класу Лебеґа, тобто таких, для яких прообраз $f^{-1}(G)$ довільної відкритої в просторі Y множини G є типу F_σ /функціональною типу F_σ/ в X.

Зауважимо, що $H_1^*(X, Y) \subseteq H_1(X, Y)$, причому ці класи збігаються для досконало нормального простору X. А у випадку, коли простір Y метризовний, то має місце включення $B_1(X, Y) \subseteq H_1^*(X, Y)$.

Стаття надійшла в редакцію 1.12.2006

Згідно з теоремою Лебеґа–Гаусдорфа [22, с. 402] рівність $H_1(X,Y) = B_1(X,Y)$ має місце, коли X — метричний простір, а $Y=[0,1]^m$, де $m \le \aleph_o$. Запропонована тут схема доведення включення $H_1(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$ полягає у поданні функції першого класу Лебеґа у вигляді рівномірної границі простих функцій першого класу Бера. Впродовж XX століття багато математиків (С. Ролевич, Р. Ганселл, К. Роджерс, М. Фосґерау та інші) узагальнювали цей результат на випадок, коли простір Y задовольняє умови типу зв'язності.

Г. Шатері та Дж. Зафарані в [2] застосували метод Лебеґа–Гаусдорфа для встановлення рівності $H_1(X,Y) = B_1(X,Y)$ у випадку, коли простір Y незв'язний, і довели теорему про рівність першого берівського і першого лебеґівського класів для відображень $f : X \to Y$ з відносно компактним образом, які діють з ультранормального простору X у метризовний нульвимірний простір Y. Правда, доводячи цей результат, автори зовсім не пояснюють, чому рівномірна границя простих функцій першого класу Бера залишається функцією першого класу Бера. Слід зазначити, що у загальній ситуації, коли X — топологічний простір (чи, навіть, $X=[0,1]$) і Y — метричний простір, рівномірна границя послідовності функцій $f_n : X \to Y$ першого класу Бера не обов'язково є функцією першого класу Бера (відповідний приклад наведений у [3]).

В цій статті ми доведемо загальніший ніж у [2] результат для відображень, визначених на слабко ультранормальному просторі. Зокрема, ми покажемо, що рівномірна границя послідовності відображень першого класу Бера $f_n : X \to Y$ належить до першого класу Бера, якщо X — слабко ультранормальний простір, а Y — метричний простір.

2. Топологічний простір X називається *ультранормальним* [2], якщо він гаусдорфовий і для довільних диз'юнктних замкнених множин F_1 і F_2 в X існує відкрито-замкнена в X множина G, така, що $F_1 \subseteq G \subseteq X \setminus F_2$.

Ми будемо називати гаусдорфовий простір X *слабко ультранормальним*, якщо для довільних диз'юнктних функціонально замкнених множин F_1 і F_2 в X існує відкрито-замкнена множина G в X, така, що $F_1 \subseteq G \subseteq X \setminus F_2$.

Зрозуміло, що з ультранормальності простору X випливає його слабка ультранормальність, а для досконало нормальних просторів ці поняття збігаються.

Лема 1. *Нехай X — слабко ультранормальний простір і $F_1, \dots, F_n$ — диз'юнктні функціонально замкнені в X множини. Тоді існують диз'юнктні відкрито-замкнені в X множини $G_1, \dots, G_n$, такі,* *що* $F_i \subseteq G_i$ *для кожного* $1 \leq i \leq n$ *і* $X = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_n$.

Доведення. Нехай $n = 2$. Тоді для диз'юнктних функціонально замкнених множин F_1 і F_2 існує відкрито-замкнена множина G в X, така, що $F_1 \subseteq G \subseteq X \setminus F_2$. Покладемо $G_1 = G$ і $G_2 = X \setminus G$. Очевидно, що множини G_1 і G_2 диз'юнктні і відкрито-замкнені в X, причому $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$ і $X = G_1 \sqcup G_2$.

Припустимо, що $n > 2$ і твердження леми виконується для всіх $1 \leq k < n$. Нехай $F_1, \ldots, F_n$ — диз'юнктні функціонально замкнені множини в X. Згідно з припущенням існують диз'юнктні відкрито-замкнені множини $U_1, \ldots, U_{n-1}$, такі, що $F_i \subseteq U_i$ для кожного $1 \leq i \leq n-2$, $F_{n-1} \sqcup F_n \subseteq U_{n-1}$ і $X = U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_{n-1}$. Крім того, існують диз'юнктні відкрито-замкнені множини U і V, такі, що $F_{n-1} \subseteq U$, $F_n \subseteq V$ і $X = U \sqcup V$. Покладемо $G_i = U_i$ для кожного $1 \leq i \leq n-2$, $G_{n-1} = U_{n-1} \cap U$ і $G_n = U_{n-1} \cap V$. □

Послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень $f_n : X \to Y$ ми будемо називати *стабільно збіжною до відображення* $f : X \to Y$, якщо для кожного $x \in X$ існує номер n_o, такий, що $f_n(x) = f(x)$ для всіх $n \geq n_o$, і позначатимемо це символом $f_n \xrightarrow{d} f$.

Твердження 1. *Нехай X — слабко ультранормальний простір, Y — T_1-простір і $f : X \to Y$ — скінченнозначне відображення першого функціонального класу Лебеґа. Тоді існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $f_n : X \to Y$, яка стабільно збігається до відображення f.*

Доведення. Нехай $f(X) = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Оскільки $f \in H_1^*(X, Y)$, то для кожного $1 \leq i \leq m$ множина $A_i = f^{-1}(y_i)$ є функціональною типу F_σ в X. Тоді $A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{i,n}$, де $(F_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність функціонально замкнених в X множин. Оскільки простір X слабко ультранормальний, то, згідно з лемою 1, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують диз'юнктні відкрито-замкнені множини $G_{1,n}, \ldots, G_{m,n}$, такі, що $F_{i,n} \subseteq G_{i,n}$ для кожного $1 \leq i \leq m$ і $X = G_{1,n} \sqcup \cdots \sqcup G_{m,n}$. Для кожного $n \geq 1$ покладемо $f_n(x) = y_i$, якщо $x \in G_{i,n}$. Тоді для всіх $n \geq 1$ відображення $f_n : X \to Y$ неперервні, адже множини $G_{i,n}$ відкриті. Покажемо, що $f_n \xrightarrow{d} f$. Справді, нехай $x \in X$. Тоді існують $i \in \{1, \ldots, m\}$ і $n_o \in \mathbb{N}$, такі, що $x \in F_{i,n}$ для всіх $n \geq n_o$. Тоді $f(x) = y_i$. Оскільки $F_{i,n} \subseteq G_{i,n}$, то і $f_n(x) = y_i$ для всіх $n \geq n_o$. □

Лема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — T_1-простір і $f, g : X \to Y$ — скінченнозначні відображення першого функціонального класу Лебеґа. Тоді відображення $h : X \to Y \times Y$, $h(x) = (f(x), g(x))$ також належить до першого функціонального класу Лебеґа.*

Доведення. Нехай $f(X) = \{y_1, \dots, y_n\}$ і $g(X) = \{z_1, \dots, z_m\}$. Оскільки $f, g \in H_1^*(X,Y)$, то множини $F_i = f^{-1}(y_i)$ і $G_j = g^{-1}(z_j)$ є функціонально двосторонні для всіх $i = 1, \dots, n$ і $j = 1, \dots, m$. Зрозуміло, що всі множини $E_{i,j} = F_i \cap G_j$ також є функціонально двосторонніми в X. Тому для довільної відкритої в $Y \times Y$ множини W прообраз $h^{-1}(W) = \bigcup_{(y_i,z_j)\in W} E_{i,j}$ є функціонально двосторонньою множиною в X. □

Ми будемо використовувати наступне твердження [4, лема 3.3.].

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — цілком обмежений метричний простір і $f : X \to Y$ — відображення першого функціонального класу Лебеґа. Тоді існує рівномірно збіжна до f послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ скінченнозначних відображень $f_n : X \to Y$ першого функціонального класу Лебеґа.*

Твердження 2. *Нехай X — слабко ультранормальний простір, Y — метричний простір і послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ скінченнозначних відображень $f_n \in H_1^*(X,Y)$ рівномірно збігається до відображення f на X. Тоді $f \in B_1(X,Y)$.*

Доведення. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що

$$d(f_{n+1}(x), f_n(x)) \le \frac{1}{2^{n+1}}$$

для всіх $x \in X$ і $n \ge 1$. З твердження 1 випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує послідовність $(f_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ неперервних скінченнозначних відображень $f_{n,m} : X \to Y$, така, що $f_{n,m} \xrightarrow{d} f_n$.

Для кожного $x \in X$ покладемо $h_{1,m}(x) = f_{1,m}(x)$. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і для всіх $1 \le k \le n$ вже визначені послідовності $(h_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ неперервних скінченнозначних відображень $h_{n,m} : X \to Y$, такі, що $h_{k,m} \xrightarrow{d} f_k$ для всіх $1 \le k \le n$ і

$$d(h_{k+1,m}(x), h_{k,m}(x)) \le \frac{1}{2^{k+1}}, \quad 1 \le k < n, \quad m \ge 1, \quad x \in X.$$

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ покладемо

$$A_m = \left\{ x \in X : d(f_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)) \le \frac{1}{2^{n+1}} \right\}$$

і визначимо послідовність $(h_{n+1,m})_{m=1}^{\infty}$ наступним чином:

$$h_{n+1,m}(x) = \begin{cases} f_{n+1,m}(x), & \text{якщо } x \in A_m, \\ h_{n,m}(x), & \text{якщо } x \notin A_m. \end{cases}$$

Зафіксуємо $x \in X$. Існує номер m_1, такий, що $h_{n,m}(x) = f_n(x)$ для всіх $m \geq m_1$. Крім того, існує номер m_2, такий, що $f_{n+1,m}(x) = f_{n+1}(x)$ для всіх $m \geq m_2$. Нехай $m_o = \max\{m_1, m_2\}$. Тоді при $m \geq m_o$ будемо мати, що

$$d(f_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)) = d(f_n(x), f_{n+1}(x)) \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Таким чином, $x \in A_m$ для всіх $m \geq m_o$. Тоді $h_{n+1,m}(x) = f_{n+1,m}(x)$ для всіх $m \geq m_o$, а, оскільки $f_{n+1,m} \xrightarrow{d} f_{n+1}$, то і $h_{n+1,m} \xrightarrow{d} f_{n+1}$.

Нехай тепер $m \in \mathbb{N}$ і $x \in X$. Якщо $x \in A_m$, то $h_{n+1,m}(x) = f_{n+1,m}(x)$ і

$$d(h_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)) = d(f_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)) \leq \frac{1}{2^{n+1}},$$

якщо ж $x \notin A_m$, то $h_{n+1,m}(x) = h_{n,m}(x)$ і $d(h_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)) = 0$.

Оскільки відображення $f_{n+1,m}$ і $h_{n,m}$ неперервні і скінченнозначні, то, згідно з лемою 2, відображення $h : X \to Y^2$, $h(x) = (f_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x))$ також неперервне. Тоді функція $d \circ h : Y \times Y \to \mathbb{R}$ неперервна і скінченнозначна, звідки випливає, що множини A_m відкрито-замкнені в X для кожного m. Тому відображення $h_{n+1,m} : X \to Y$ неперервні для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Покажемо тепер, що $\lim_{m\to\infty} h_{m,m}(x) = f(x)$. Зафіксуємо $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Виберемо номер n_o так, щоб

$$\frac{1}{2^{n_o}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{і} \quad d(f_{n_o}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Існує номер $m_o > n_o$, такий, що $h_{n_o,m}(x) = f_{n_o}(x)$ для всіх $m \geq m_o$. Тоді при $m \geq m_o$ маємо, що

$$\begin{aligned} d(h_{m,m}(x), f(x)) & \\ \leq d(h_{m,m}(x), h_{m-1,m}(x)) &+ \cdots + d(h_{n_o+1,m}(x), h_{n_o,m}(x)) \\ &+ d(h_{n_o,m}(x), f_{n_o}(x)) + d(f_{n_o}(x), f(x)) \\ &\leq \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n_o+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2^{n_o}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже, відображення $f : X \to Y$ належить до першого класу Бера. □

Наступний допоміжний результат доведений в [5, Proposition 1.10].

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний простір. Тоді $B_1(X, Y) \subseteq H_1^*(X, Y)$.*

Як наслідок з твердження 2, отримується теорема про рівномірну границю послідовності відображень першого класу Бера, визначених на ультранормальному просторі.

Теорема 3. *Нехай X — слабко ультранормальний простір, Y — цілком обмежений метричний простір. Тоді рівномірна границя f послідовності $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень $f_n \in B_1(X,Y)$ належить до першого класу Бера.*

Доведення. Оскільки $f_n \in B_1(X,Y)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то з теореми 2 випливає, що $f_n \in H_1^*(X,Y)$.

Згідно з теоремою 1 для кожного номера n існує послідовність $(f_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ скінченнозначних відображень $f_{n,m} \in H_1^*(X,Y)$, яка рівномірно збігається до f_n.

Переходячи при необхідності до підпослідовності, будемо вважати, що

(*i*) $d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{n}$;

(*ii*) $d(f_{n,m}(x), f_n(x)) < \frac{1}{m}$

для всіх $x \in X$ і $n, m \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що послідовність $(f_{m,m})_{m=1}^{\infty}$ рівномірно прямує до відображення f. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і знайдемо номер m_o, такий, що $\dfrac{1}{m_o} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тоді при $m \geq m_o$ маємо, що

$$d(f_{m,m}(x), f(x)) \leq d(f_{m,m}(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \varepsilon$$

для всіх $x \in X$.

Згідно з твердженням 2 відображення $f : X \to Y$ належить до першого класу Бера. $\square$

Доведемо тепер основний результат цього пункту.

Теорема 4. *Нехай X — слабко ультранормальний простір, Y — метризовний сепарабельний простір. Тоді $H_1^*(X,Y) = B_1(X,Y)$.*

Доведення. Включення $B_1(X,Y) \subseteq H_1^*(X,Y)$ випливає з теореми 2. Встановимо обернене включення. Нехай $f \in H_1^*(X,Y)$. Згідно з [6, с. 398] на просторі Y існує метрика d, яка породжує його топологічну структуру і така, що простір (Y,d) цілком обмежений. Згідно з теоремою 1 існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ скінченнозначних відображень $f_n \in H_1^*(X,Y)$, яка рівномірно збігається до відображення f. Застосовуючи твердження 2, отримаємо, що $f \in B_1(X,Y)$. $\square$

3. Нагадаємо [6, с. 529], що топологічний простір X називається *спадково незв'язним*, якщо він не містить жодного зв'язного підпростору, який складається більше ніж з однієї точки.

Встановимо тепер необхідні умови на простір X для того, щоб виконувалось включення $H_1^*(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$ у випадку спадково незв'язного простору Y.

Твердження 3. *Нехай X — топологічний простір, в якому кожна одноточкова множина є функціонально замкненою, Y – спадково незв'язний гаусдорфовий простір і $H_1^*(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$. Тоді простір X спадково незв'язний.*

Доведення. Припустимо, що простір X не є спадково незв'язним. Нехай $X = \bigsqcup_{s\in S} C_s$, де C_s — компоненти зв'язності простору X. Згідно з припущенням, існує $s_o \in S$, таке, що $|C_{s_o}| > 1$. Виберемо точки $x_o \in C_{s_o}$, $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, і покладемо

$$\varphi(x) = \begin{cases} y_1, & x = x_o, \\ y_2, & x \neq x_o. \end{cases}$$

Відображення $\varphi : X \to Y$ належить до першого функціонального класу Лебеґа. Справді, нехай G — довільна відкрита в Y множина. Якщо $y_1, y_2 \notin G$, то $\varphi^{-1}(G) = \emptyset$, якщо ж $y_1, y_2 \in G$, то $\varphi^{-1}(G) = X$, отже, в цих випадках $\varphi^{-1}(G)$ є функціональною F_σ-множиною. Якщо $y_1 \in G$, а $y_2 \notin G$, то $\varphi^{-1}(G) = \{x_o\}$. Оскільки $\{x_o\}$ — це функціонально замкнена множина, то вона є функціональною типу F_σ в X. Якщо $y_2 \in G$, а $y_1 \notin G$, то $\varphi^{-1}(G) = X \setminus \{x_o\}$. Оскільки $\{x_o\} = \psi^{-1}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \psi^{-1}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, де $\psi : X \to \mathbb{R}$ — деяка неперервна функція, то множина $\{x_o\}$ є функціональною типу G_δ в X, а тоді доповнення до неї $X \setminus \{x_o\}$ є функціональною F_σ-множиною. Отже, $\varphi \in H_1^*(X,Y)$.

Згідно з умовою теореми існує послідовність $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $\varphi_n : X \to Y$, така, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ для кожного $x \in X$. Оскільки C_{s_o} — зв'язна множина, то множина $\varphi_n(C_{s_o})$ теж зв'язна в Y для кожного n. Простір Y спадково незв'язний, тому $\varphi_n(x) = y_n$ для всіх $x \in C_{s_o}$. Якщо $x = x_o$, то $f(x) = y_1$ і $\varphi_n(x) = y_n \to y_1$. Крім того, існує точка $x \in C_{s_o}$, така, що $x \neq x_o$. Тоді $f(x) = y_2$ і $\varphi_n(x) = y_n \to y_2$, що суперечить гаусдорфовості простору Y. Таким чином, простір X спадково незв'язний. $\square$

Нагадаємо [6, с. 529], що непорожній тихоновський простір X називається *сильно нульвимірним*, якщо в довільне скінченне функціонально відкрите покриття $(U_i)_{i=1}^{k}$ цього простору можна вписати скінченне відкрите покриття $(V_i)_{j=1}^{m}$, таке, що $V_i \cap V_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Дві підмножини A і B топологічного простору X називаються *цілком відокремними* [6, с. 77], якщо існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $f(x) = 0$ при $x \in A$ і $f(x) = 1$ при $x \in B$.

Нам будуть потрібні наступні результати з [6].

Лема 3 ([6, с. 530]). *Для довільних цілком відокремних підмножин A і B сильно нульвимірного простору X існує відкрито-замкнена множина $U \subseteq X$, така, що $A \subseteq U \subseteq X \setminus B$.*

Теорема 5 ([6, с. 532]). *Спадкова незв'язність, нульвимірність і сильна нульвимірність рівносильні в класі непорожніх локально компактних паракомпактів.*

З леми 3 і означення слабко ультранормального простору безпосередньо випливає наступний факт.

Твердження 4. *Кожний сильно нульвимірний простір є слабко ультранормальним.*

Теорема 6. *Нехай X — непорожній локально компактний паракомпакт з першою аксіомою зліченності і Y — спадково незв'язний метризовний сепарабельний простір. Тоді наступні умови рівносильні:*

(*i*) $H_1^*(X,Y) = B_1(X,Y)$;

(*ii*) X — *спадково незв'язний простір.*

Доведення. В T_1-просторі з першою аксіомою зліченності кожна одноточкова множина є замкненою типу G_δ. Враховуючи, що простір X нормальний, маємо, що кожна одноточкова множина в ньому є функціонально замкненою. Тому імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з твердження 3. Імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ випливає з теореми 4, адже, згідно з теоремою 5 та твердженням 4 простір X є слабко ультранормальним. □

Література

[1] К. Куратовский, *Топология.* Т. 1. Москва: Мир, 1966, 596 с.

[2] H. R. Shatery , J. Zafarani, *The equality between Borel and Baire classes* // Real Anal. Exch. **30** (2004–2005), N 1, 373–384.

[3] О. О. Карлова, В. В. Михайлюк, *Функції першого класу Бера зі значеннями в метризовних просторах* // Укр. мат. журн. **58** (2006), N 4 567–571.

[4] О. О. Карлова, *Перший функціональний лебеґівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 191–192. Математика. Чернівці: Рута, 2004, 52–60.

[5] L. Veselý, *Characterization of Baire-one functions between topological spaces* // Acta Univ. Carol., Math. Phys. **33** (1992), N 2, 143–156.

[6] Р. Энгелькинг, *Общая топология.* М.: Мир, 1986, 752 с.

Відомості про авторів

Олена Олексіївна Карлова

Кафедра математичного аналізу
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського, 2
Чернівці 58012
Україна
E-Mail: mathan@chnu.cv.ua