Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 2, 278 – 289

Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени

Юрий Б. Зелинский

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Главная цель работы — решение задачи о тени для произвольного выпуклого множества с непустой внутренностью в n-мерном евклидовом пространстве и действия группы преобразований. Эту задачу можно рассматривать как нахождение условий обеспечивающих принадлежность точки обобщенно выпуклой оболочке семейства множеств полученного из исходного множества действием группы преобразований.

2010 MSC. 52A01, 52A30, 26B25 .

Ключевые слова и фразы. Евклидово пространство, сфера, шар, выпуклость, линейная выпуклость.

Наиболее общий аксиоматический подход к определению выпуклости (скажем, что семейство множеств состоит из выпуклых множеств, если пересечение произвольного их количества принадлежит семейству [1]) позволяет назвать выпуклыми ряд экзотических классов множеств, которые не ассоциируются с привычным понятием выпуклости, например, множество всех множеств или семейство всех замкнутых подмножеств некоторого топологического пространства.

Традиционно подмножество евклидова пространства называется выпуклым, если вместе с произвольной парой точек оно содержит и отрезок, соединяющий эти точки. Это эквивалентно связности пересечений подмножества с произвольной прямой. Такое внутреннее определение позволило в прошедшем столетии создать выпуклый анализ — важную область исследований лежащую на стыке анализа и геометрии. Задачи комплексного анализа требовали расширения

Статья поступила в редакцию 22.05.2015

ISSN 1810 – 3200.

области применения и методов выпуклого анализа. Возникли понятия псевдовыпуклости, голоморфной и полиномиальной выпуклости, линейной и сильно линейной выпуклости и другие. Ряд из этих определений используют не внутренние свойства множества, а свойства дополнения к нему.

Линейно выпуклыми в многомерном комплексном пространстве называют множества, через каждую точку дополнения к которому проходит комплексная гиперплоскость полностью лежащая в этом дополнении. Впервые концепция линейной выпуклости в двумерном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^2$ была введена Г. Бенке и Е. Пешлем в 1935 в [2]. Активное использование этого понятия началось с работ А. Мартино и Л. Айзенберга [3, 4] в 60-е годы прошлого столетия. Линейно выпуклые множества представляют собой важный класс, используемый в комплексном анализе, интегральной геометрии, томографии. На базе этих множеств построено комплексный линейно выпуклый анализ, который есть аналогом вещественного выпуклого анализа. В монографической литературе первое упоминание линейно выпуклых множеств — это монография Л. Айзенберга и А. Южакова [5]. Системному изложению этих вопросов посвящены четыре монографии [6–9]. В [9] перечислен ряд нерешенных задач, из которых отметим две, которые связаны со свойствами сферы.

Проблема 1 (проблема сферы)**.** Существует ли в пространстве $\mathbb{C}^2$ линейно выпуклый компакт, который гомеоморфен двумерной сфере S^2?

К сожалению, не смотря на то, что эта проблема сформулирована автором почти сорок лет тому, она остается нерешенной.

Другая задача впервые рассмотрена Г. Худайбергановым [10].

Проблема 2 (о тени)**.** Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров в n-мерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с центрами на сфере S^{n-1} и радиуса меньшего от радиуса сферы достаточно чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Главная цель работы — обзор результатов, связанных с решением задачи о тени и ряда попутно возникающих задач.

Определение 1. *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ m-выпукло относительно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, если найдется m-мерная плоскость L, такая что $x \in L$ и $L \cap E = \varnothing$.*

Определение 2. *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ m-выпукло, если оно m-выпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.*

Легко убедиться, что оба приведенные определения удовлетворяют аксиоме выпуклости: пересечение каждого подсемейства таких множеств тоже удовлетворяет определению. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ мы можем рассматривать минимальное m-выпуклое множество, содержащее E, и назвать его m-оболочкой множества E.

Теперь проблему 2 можно рассматривать как частный случай принадлежности точки 1-оболочке объединения некоторого набора шаров. Другими словами эту задачу можно переформулировать так. Сколько замкнутых шаров радиуса меньшего от радиуса сферы с центрами на сфере (минимальное количество) обеспечит принадлежность центра сферы 1-оболочке этого семейства шаров?

Если в сферу вписать правильный n-мерный симплекс и разместить шары радиуса равного половине длины ребра симплекса в его вершинах, то очевидно, что эта система шаров создает тень для центра сферы. Однако при этом мы нарушим одно условие — шары попарно касаются друг друга. Пусть a — половина длины ребра правильного симплекса. Рассмотрим семейство из $n+1$ шаров радиусов $a+\varepsilon$, $a-\varepsilon/2$, $a-\varepsilon/2^2$, $\ldots$, $a-\varepsilon/2^n$, соответственно, для достаточно малого числа ε. Разместим эти шары так, чтобы они попарно касались друг друга, а их центры образовывали симплекс мало отличающийся от правильного. Через центры этих шаров проходит единственная сфера, центр которой принадлежит 1-оболочке семейства шаров. Внутренности этого семейства шаров образуют семейство из $n+1$ открытого шара, для которого центр сферы принадлежит 1-оболочке этого семейства. Если же исходные замкнутые шары немного уменьшить, то в силу непрерывности, очевидно, что $n+1$ замкнутого шара достаточно для создания тени.

Лемма 1. *Если множество $E = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \subset \mathbb{R}^n$ представляет собой объединение из $n-1$ выпуклого множества, то E — 1-выпуклое множество.*

Доказательство. В силу выпуклости каждого множества E_i для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ существует гиперплоскость L_i, содержащая эту точку, которая не пересекает множество E. Пересечение этих гиперплоскостей $L = \bigcap_{i=1}^{n-1} L_i$ содержит искомую прямую. □

Из этой леммы следует, что произвольной совокупности из $n-1$ шаров для создания тени мало. Поэтому точное значение необходимого количества шаров n или $n+1$.

Аналогично легко доказать следующее утверждение.

Следствие 1. *Если множество* $E = \bigcup_{i=1}^{m-1} E_i \subset \mathbb{R}^n$ *представляет собой объединение из* $m-1$ *выпуклого множества, где* $m < n$, *то* E — $(n-m)$*-выпуклое множество.*

Задача о тени была решена Г. Худайбергановым для $n = 2$ (показано, что двух шаров достаточно) [10]. Здесь же было предложено решение при $n > 2$ (утверждалось, что необходимое количество шаров равно размерности пространства), которое оказалось ошибочным. В [11] получен полный ответ на эту проблему для набора замкнутых и открытых шаров.

Теорема 1 ([11])**.** *Существует два замкнутых (открытых) шара с центрами на единичной окружности и радиуса меньше* 1*, которые обеспечивают принадлежность центра окружности* 1*-оболочке семейства шаров.*

Следствие 2. *Существует два замкнутых (открытых) шара в* n*-мерном вещественном евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$ *с центрами на сфере* S^{n-1} *и радиуса меньшего от радиуса сферы, которые обеспечивают принадлежность центра сферы* $(n-1)$*-оболочке семейства шаров.*

Оказывается, что в случае двумерной сферы трех шаров недостаточно для принадлежности центра сферы 1-оболочке семейства шаров.

Получено следующее утверждение полностью решающее проблему тени.

Теорема 2. *Для того чтобы центр* $(n-1)$*-сферы в* n*-мерном евклидовом пространстве при* $n > 2$ *принадлежал* 1*-оболочке семейства открытых (замкнутых) шаров радиуса не превышающего (меньшего) радиуса сферы и с центрами на сфере необходимо и достаточно* $n+1$*-го шара.*

Рассмотрим более общие по отношению к предыдущим определениям объекты.

Определение 3. *Скажем, что множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ m*-полувыпукло относительно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$*, если найдется* m*-мерная полуплоскость* P*, такая что* $x \in P$ *и* $P \cap E = \varnothing$*.*

Определение 4. *Скажем, что множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ m*-полувыпукло, если оно* m*-полувыпукло относительно каждой точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$*.*

Понятие 1-полувыпуклости обобщает понятие звездности множества (существует точка множества, такая, что произвольную точку этого множества можно соединить с ней отрезком, который полностью принадлежит исходному множеству). Очевидно, что все звездные множества входят в этот класс, но буквы алфавита C, E, F, H, M, W, Z на плоскости будут 1-полувыпуклыми, но не звездными.

Легко убедиться, что и эти определения удовлетворяют аксиоме выпуклости, и мы тоже можем строить m-полувыпуклые оболочки множеств согласно этим определениям.

Рассмотрим аналог задачи о тени для полувыпуклости. Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров с центрами на сфере S^{n-1} и радиуса меньшего от (не превышающего) радиуса сферы достаточно чтобы любой луч из центра сферы пересекал хотя бы один из этих шаров?

Задача проста в плоском случае $n = 2$. Если мы впишем в окружность остроугольный треугольник с неравными сторонами $a > b > c$, а в его вершинах разместим три замкнутых круга радиусов $p - a$, $p - b$, $p - c$, соответственно, где $p = (a + b + c)/2$, то очевидно, что полувыпуклая оболочка объединения этих кругов состоит из кругов и внутренности треугольника. Если центр окружности не принадлежит объединению кругов, то такая конструкция обеспечит тень и в этой точке. Теперь, как и выше, пользуясь непрерывностью, если чуть уменьшить радиусы кругов, то получим, что при $n = 2$ три замкнутых (открытых) круга решают задачу. Исследуем соотношение сторон треугольника, которые обеспечивают решение. Из неравенств $p-a < p-b < p-c$ следует, что радиус описанной окружности должен превышать $p - c$. Не нарушая общности, будем считать, что сторона $c = 1$, и справедливы неравенства $a > b > 1$. Другие треугольники с нужным свойством получаются преобразованием подобия. Из формулы для радиуса описанной окружности, заменяя стороны треугольника переменными $x = a$, $y = b$, получим, что координаты нужных сторон должны находиться внутри криволинейного треугольника, две стороны которого прямые $x = y$, $y = 1$, а третья кривая, заданная неявным уравнением,

$$x + y - 1 = \frac{2\,x\,y}{\sqrt{(x+y+1)(-x+y+1)(x-y+1)(x+y-1)}}.$$

Построением графика в Derive убеждаемся, что множество таких точек непустое. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы центр окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ принадлежал 1-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых)* *кругов радиуса не превышающего (меньшего) радиуса окружности и с центрами на этой окружности необходимо и достаточно трех кругов.*

С увеличением размерности задача усложняется. Покажем сначала, что существуют семейства выпуклых множеств, 1-полувыпуклая оболочка которых совпадает с таким семейством.

Теорема 4 ([11]). *Каждое множество $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ в $\mathbb{R}^n$, где все множества K_i — выпуклые компакты, является 1-полувыпуклым.*

Замечание 1. Из множества $(n-1)$-мерных граней n-мерного симплекса легко составить множество, которое 1-полувыпуклым не будет.

Усложним задачу, наложив на множество дополнительные условия. Исследуем, когда минимальное семейство шаров с центрами на фиксированной сфере обеспечит принадлежность центра сферы 1-полувыпуклой оболочке семейства.

Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ единичная сфера. Точки пространства будем обозначать координатами (x, y, z). Выберем два открытых шара единичного радиуса в точках $(0,0,1)$ и $(0,0,-1)$. Теперь лучи, которые не пересекают эти два шара, должны лежать в плоскости xOy. Открытый шар радиуса $\sqrt{2}-1$ в точке $(1,0,0)$ касается заданных двух шаров и виден из начала координат в плоскости xOy под углом α, синус половины которого равен $\sqrt{2}-1$. Следовательно, $\alpha/2 = \arcsin(\sqrt{2}-1) = 0.4271$, $\alpha = 0.8542$. Поскольку этот угол помещается 7.35 раз в развернутом угле 2π, то заполним окружность в плоскости xOy четырьмя шарами радиуса $\sqrt{2}-1$ с центрами в точках $(1,0,0), (0,1,0), (-1,0,0), (0,-1,0)$ соответственно. После этого между ними четыре шара радиусов $\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$ с центрами в точках пересечения единичной окружности плоскости xOy с биссектрисами координатных углов. Эти шары касаются двух соседних из предыдущих четырех. В силу разности радиусов соседних шаров с центрами в плоскости xOy этот набор из 10 шаров обеспечит принадлежность центра сферы 1-полувыпуклой оболочке их объединения. Как и выше чуть уменьшая радиусы шаров, видим, что существует набор замкнутых десяти шаров с теми же свойствами. Получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Для того чтобы центр двумерной сферы в трехмерном евклидовом пространстве принадлежал 1-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых) шаров радиуса не превышающего (меньшего) радиуса сферы и с центрами на сфере достаточно десяти шаров.*

Вложением рассмотренного выше трехмерного пространства как линейного подпространства в $\mathbb{R}^n$ вместе с десятком шаров радиусов выбранных при доказательстве теоремы 5 получается следующая оценка для $(n-2)$-полувыпуклости.

Следствие 3. *Для того чтобы центр $(n-1)$-мерной сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ принадлежал $(n-2)$-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых) шаров радиуса не превышающего (меньшего) радиуса сферы и с центрами на сфере достаточно десяти шаров.*

К сожалению, предыдущие рассуждения не переносятся на более высокие размерности и не дают необходимых условий даже в трехмерном пространстве.

Если разрешить центрам шаров находиться на двух концентричных сферах, то, используя конструкцию для 1-выпуклости в $\mathbb{R}^n$, шары и радиус второй сферы получим гомотетией относительно центра первой сферы. Коэффициент гомотетии выберем с отрицательным знаком, так чтобы образ гомотетии не пересекался с исходным множеством. Очевидно, что центр сферы будет принадлежать 1-полувыпуклой оболочке шаров. Поэтому $2n+2$ шаров для этого достаточно.

Рассмотрим аналогичные задачи для семейства шаров, центры которых не привязаны ни к какому наперед заданному множеству.

Определение 5. *Двусторонним конусом $K \subset \mathbb{R}^n$ назовем подмножество евклидового пространства замкнутое относительно умножения на вещественные числа.*

Такое множество есть объединение прямых, проходящих через начало координат.

Теорема 6 ([12])**.** *Для того чтобы выбранная точка в n-мерном евклидовом пространстве при $n \geqslant 2$ принадлежала 1-оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (замкнутых) шаров, которые данную точку не содержат, необходимо и достаточно n шаров.*

Для доказательства достаточно выбирать двусторонние конусы, содержащие грани куба, центр которого находится в выбранной точке. Дальше в эти конусы вписывается система непересекающихся шаров.

Теорема 7 ([12])**.** *Для того чтобы выбранная точка в n-мерном евклидовом пространстве при $n \geqslant 2$ принадлежала 1-полувыпуклой* *оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (замкнутых) шаров, которые данную точку не содержат, необходимо и достаточно $n+1$ шара.*

Рассмотрим предыдущие задачи, заменив семейство шаров на семейство множеств, полученное из исходного множества действием некоторой группы преобразований.

Теорема 8 ([12]). *Для того чтобы выбранная точка в n-мерном евклидовом пространстве при $n \geqslant 2$ принадлежала 1-оболочке семейства попарно непересекающихся замкнутых (открытых) множеств, полученного из заданного выпуклого множества с непустой внутренностью при помощи группы преобразований, состоящей из движений и гомотетий, необходимо и достаточно n элементов семейства.*

Теорема 9 ([12]). *Для того чтобы выбранная точка в n-мерном евклидовом пространстве при $n \geqslant 2$ принадлежала 1-полувыпуклой оболочке семейства попарно непересекающихся замкнутых множеств, полученного из заданного выпуклого множества с непустой внутренностью при помощи группы преобразований, состоящей из движений и гомотетий, необходимо и достаточно $n+1$ элемента семейства.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7, достаточно выбирать конусы, содержащие грани равностороннего симплекса. Вершины конусов совпадают с ортоцентром симплекса.

Замечание 2. Используя плотность точек гладкости на границе выпуклого тела с непустой внутренностью [13] теоремы 8 и 9 можно уточнить. Теорема 8 останется справедливой, если рассматривать группу преобразований, состоящую из параллельных перемещений множества и его гомотетий (исключить повороты). В теореме 9 при рассмотрении группы движений параллельных перемещений множества и его гомотетий необходимо $2n$ множеств. Это можно показать, если за исходное множество взять прямоугольный параллелепипед.

Изучим как изменится ситуация с предыдущими задачами если мы вместо действительного евклидового пространства будем рассматривать комплексное или гиперкомплексное пространство.

Определение 6. *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ m-комплексно (m-гиперкомплексно) выпукло относительно точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E(\mathbb{H}^n \setminus E)$, если найдется m-мерная комплексная (гиперкомплексная)* *плоскость L, такая что $z \in L$ и $L \cap E = \varnothing$. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ m-комплексно (m-гиперкомплексно) выпукло, если оно m-комплексно (m-гиперкомплексно) выпукло относительно каждой точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E(\mathbb{H}^n \setminus E)$.*

Задача (о тени)**.** Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров с центрами на сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ и радиуса меньшего от радиуса сферы достаточно чтобы любая комплексная (гиперкомплексная) прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Аналогично вещественному случаю для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ мы можем рассматривать минимальное m-комплексно (m-гиперкомплексно) выпуклое множество, содержащее E, и назвать его m-комплексной (m-гиперкомплексной) оболочкой множества E.

Теорема 10. *Для того чтобы выбранная точка в 2-мерном комплексном (гиперкомплексном) евклидовом пространстве $\mathbb{C}^2(\mathbb{H}^2)$ принадлежала 1-комплексной (1-гиперкомплексной) оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (замкнутых) шаров, которые данную точку не содержат, необходимо и достаточно 2-х шаров.*

Доказательство. Доказательство проведем для комплексного пространства. В гиперкомплексном случае доказательство аналогично. Обозначим $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ произвольную точку пространства. Выберем один открытый шар радиуса 1. Расположим его центр в точке $(0, 1) \in \mathbb{C}^2$. Касательная вещественно трехмерная плоскость в начале координат к этому шару задается уравнением $\operatorname{Re} z_1 = 0$. Прямая $z_1 = 0$ будет единственной комплексной прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через начало координат. Следовательно, достаточно выбрать второй шар (радиус его может быть как угодно малым) так чтобы он имел точки пересечения с прямой $z_1 = 0$. В частности его центр можно выбрать в точке $(0, 1)$. Поэтому мы доказали даже больше утверждения теоремы. Центры обоих шаров могут находиться на сфере с центром в начале координат. Чуть уменьшая радиусы этих шаров, и используя непрерывное изменение касательных плоскостей к шару, получим справедливость теоремы и в случае замкнутых шаров. □

Замечание 3. Теорема 10 останется справедливой, если шары заменить выпуклыми множествами с непустой внутренностью, полученными из одного множества действием группы преобразований.

Теорема 11. *Для того чтобы точка n-мерного (гипер)комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ принадлежала 1-(гипер)комплексной оболочке семьи открытых (замкнутых) шаров, которые не содержат выбранную точку необходимо и достаточно n шаров.*

Доказательство. Используем конструкцию предыдущего утверждения. Определим систему шаров в трехмерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$. Предположим, что пространство $\mathbb{C}^2$ вложено в пространство $\mathbb{C}^3$ как гиперплоскость $L = (z_1, z_2, 0)$ вместе с построенными в нем шарами B_1 и B_2. Теперь мы дополним эти два двумерные шара до шаров в $\mathbb{C}^3$, сохраняя при этом начальное положение центров шаров и их обозначение. Теперь увеличим шар B_2 до шара радиуса $1 - \sqrt{2}$, который теперь коснется шара B_1. Шар B_1 немного уменьшим, сохраняя его центр $(1, 0, 0)$, но так чтобы в комплексной гиперплоскости L было невозможно провести комплексную прямую через начало координат, которая не пересекала бы хотя один из двух выбранных шаров. Согласно свойству непрерывности изменения касательных прямых, каждая комплексная близкая к комплексной прямой лежащей в плоскости L тоже пересекает один из этих шаров. Теперь достаточно выбрать шар B_3 с центром на оси Oz_3 достаточно близким к началу координат, но радиуса меньшего чем расстояние от его центра до начала координат. Таким образом, каждая комплексная прямая пересекает по крайней мере один из выбранных трех шаров. Повторяя аналогично переход от пространства $\mathbb{C}^{n-1}$ к пространству $\mathbb{C}^n$, мы получим доказательство теоремы. В гиперкомплексном случае доказательство повторят изложенное. $\square$

Замечание 4. Рассуждения, аналогичные проведенным в [12] и основанные на аргументах изложенных в [13, 14], позволяют показать, что, если семейство шаров заменить на семейство выпуклых множеств с непустой внутренностью, полученным с одного множества при помощи группы преобразований, то теорема 11 останется справедливой.

Теорема 5 дает точное значение количества шаров только при $n = 2$. Из теоремы 11 мы получим оценку на количество выпуклых множеств и шаров центры которых наперед не заданы. Поэтому следующие вопросы остаются открытыми.

Вопрос 1. Какое минимальное количество попарно непересекающихся шаров в трехмерном вещественном евклидовом пространстве с центрами на сфере обеспечит принадлежность центра сферы их 1-полувыпуклой оболочке?

В размерностях выше трех неясно даже существование конечного необходимого множества шаров.

Вопрос 2. Существует ли конечное количество шаров с перечисленными выше условиями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, которое обеспечит принадлежность центра сферы их 1-полувыпуклой оболочке?

Вопрос 3. Какое минимальное количество попарно непересекающихся открытых (замкнутых) шаров с центрами на фиксированной сфере и радиуса не превышающего (меньшего) радиуса сферы в n-мерном комплексном (гиперкомплексном) евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ при $n \geqslant 3$. обеспечит принадлежность центра сферы их 1-комплексной (1-гиперкомплексной) оболочке?

Замечание 5. Используя теорему 2, несложно показать, что оценка сверху необходимого для ответа на вопрос 3 минимального количества шаров равна $2n$ в комплексном и $4n - 2$ в гиперкомплексном случае.

Аналогично остаются открытыми оценки комплексной и гиперкомплексной полувыпуклости для семейств множеств, которую можно ввести подобно вещественной полувыпуклости.

Литература

[1] В. П. Солтан, *Введение в аксиоматическую теорию выпуклости*, Кишинев: Штиинца, 1984.

[2] H. Behnke , E. Peschl, *Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen* // Math. Ann. Bd., **111** (1935), No. 2, 158–177.

[3] A. Martineau, *Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes* // Math. Ann. Bd., **163** (1966), No. 1, 62–88.

[4] Л. А. Айзенберг, *О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби* // Сиб. Мат. Ж., **8** (1967), No. 5, 1124–1142.

[5] Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Новосибирск: Наука, 1979.

[6] Ю. Б. Зелинский, *Многозначные отображения в анализе*, Киев: Наукова думка, 1993.

[7] L. Hörmander, *Notions of convexity*, Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser Verlag, 1994.

[8] M. Andersson, M. Passare, R. Sigurdsson, *Complex convexity and analytic functionals*, Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag, 2005.

[9] Ю. Б. Зелинский, *Выпуклость. Избранные главы*, Праці Інституту математики НАНУ, **92**, 2012.

[10] Г. Худайберганов, *Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров* // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г., No. 1772, 85 Деп.

[11] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук, *Обобщённо выпуклые множества и задача о тени*, arXiv preprint arXiv:1501.06747.

[12] Ю. Б. Зелинский, *Задача о тени для семейства множеств* // Збiрник праць Iнституту математики НАНУ, **12** (2015), No. 4.

[13] R. D. Anderson, V. L. Klee, *Convex functions and upper-semi-continuous collections* // Duke Math. J., **19** (1952), 349–357.

[14] К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества*, М.: Наука, 1985.

[15] Yu. B. Zelinskii, *The problem of the shadows* // Bulletin de la societé des sci. et letters de Lódź (in print).

Сведения об авторах

Юрий Борисович Зелинский — Институт математики НАН Украины
E-Mail: zel@imath.kiev.ua