Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 2, 210 – 221

О локальных свойствах одного класса отображений на римановых многообразиях

Денис П. Ильютко, Евгений А. Севостьянов

(*Представлена Р. М. Тригубом*)

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению вопросов, находящихся на стыке теории пространственных квазиконформных отображений и теории римановых поверхностей. Получены теоремы о локальном поведении одного класса открытых дискретных отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности между произвольными римановыми многообразиями.

2010 MSC. 58C06, 30C65, 31C12.

Ключевые слова и фразы. Riemannian manifolds, moduli of families of curves, equicontinuity of mappings, mappings with bounded and finite distortion.

1. Введение

Настоящая заметка посвящена изучению локальных свойств одного класса отображений на римановых многообразиях, которые предполагаются ниже только открытыми и дискретными (инъективность отображений не обязательна). Исследования, проведённые ниже, относятся, с одной стороны, к исследованию отображений геометрическим методом (методом модулей), с другой стороны — к теории многообразий. Основные определения, используемые ниже, могут быть найдены, напр., в [1–4].

Всюду далее (если не оговорено противное) $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия с геодезическими расстояниями d и d_*, соответственно. Соответствующие определения и свойства римановых многообразий могут быть найдены в [5]. В частности, мера объёма v на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ определяется правилом

$$v(A) = \int\limits_A \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \cdots dx^n,$$

Статья поступила в редакцию 1.06.2015

где $G = (g_{ij})$ — риманова метрика на $\mathbb{M}^n$.

Нам также необходимы некоторые сведения из теории общих метрических пространств. В частности, рассмотрим следующее определение. Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d, наделённое локально конечной борелевской мерой μ. Следуя [6, раздел 7.22] будем говорить, что борелева функция $\rho\colon X \to [0, \infty]$ является *верхним градиентом* функции $u\colon X \to \mathbb{R}$, если для всех спрямляемых кривых γ, соединяющих точки x и $y \in X$ выполняется неравенство $|u(x) - u(y)| \leqslant \int_\gamma \rho\, ds$, где, как обычно, $\int_\gamma \rho\, ds$ обозначает линейный интеграл от функции ρ по кривой γ. Будем также говорить, что в указанном пространстве X выполняется $(1; p)$-неравенство Пуанкаре, если найдутся постоянные $C \geqslant 1$ и $\tau > 0$ так, что для каждого шара $B \subset X$, произвольной локально ограниченной непрерывной функции $u\colon X \to \mathbb{R}$ и любого её верхнего градиента ρ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |u - u_B| d\mu(x) \leqslant C \cdot (\operatorname{diam} B) \left(\frac{1}{\mu(\tau B)} \int\limits_{\tau B} \rho^p d\mu(x) \right)^{1/p},$$

где $u_B := \frac{1}{\mu(B)} \int_B u d\mu(x)$. Метрическое пространство (X, d, μ) назовём *$\widetilde{Q}$-регулярным по Альфорсу* при некотором $\widetilde{Q} \geqslant 1$, если при каждом $x_0 \in X$, некоторой постоянной $C \geqslant 1$ и произвольного $R < \operatorname{diam} X$, $\frac{1}{C} R^{\widetilde{Q}} \leqslant \mu(B(x_0, R)) \leqslant C R^{\widetilde{Q}}$. Заметим, что локально римановы многообразия являются n-регулярными по Альфорсу (см. [5, лемма 5.1]). Следует также заметить, что если риманово многообразие $\widetilde{Q}$-регулярно по Альфорсу, то $\widetilde{Q} = n$ (см. рассуждения на с. 61 в [6] о совпадении $\widetilde{Q}$ с хаусдорфовой размерностью пространства X, а также [5, лемма 5.1] о совпадении топологической и хаусдорфовых размерностей областей риманового многообразия). Понятие конечного среднего колебания функции в точке метрического пространства может быть найдено напр., в [4, разд. 4]. Определение кольцевых Q-отображений в точке x_0 (некоторого класса отображений, обобщающих квазиконформные отображения) в пространстве $\mathbb{R}^n$ дано в работе [7], а для случая римановых многообразий может быть дано вполне аналогично (см. [5, разд. 4]). Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия, $n \geqslant 2$, многообразие $\mathbb{M}^n_*$ связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}^n_*$ выполнено $(1; n)$-неравенство Пуанкаре. Пусть $B_R \subset \mathbb{M}^n_*$ — некоторый фиксированный шар радиуса R, K — фиксированный невырожденный континуум в B_R, D — область в $\mathbb{M}^n$ и $Q\colon D \to$*

$[0,\infty]$ — функция, измеримая относительно меры объёма v. Обозначим через $\mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$ семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D\to B_R\backslash K$ в точке $x_0\in D$. Тогда семейство отображений $\mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$ является равностепенно непрерывным в точке $x_0\in D$, если $Q\in FMO(x_0)$.

Ввиду теоремы Арцела–Асколи имеем также следующее

Следствие 1.1. *Предположим, что в условиях теоремы* 1.1 *многообразие $\mathbb{M}_*^n$ является компактным. Если $\mathfrak{R}_{D,Q,B_R,K}(D)$ — семейство, состоящее из всех открытых дискретных отображений $f\colon D\to B_R\setminus K$, являющихся кольцевыми Q-отображениями в каждой точке $x_0\in D$ и, кроме того, $Q\in FMO(x_0)$ в каждой точке $x_0\in D$, то класс $\mathfrak{R}_{D,Q,B_R,K}(D)$ образует нормальное семейство отображений.*

2. Вспомогательные леммы

Определение максимального поднятия кривой, используемое ниже, может быть найдено, например, в монографии [8]. Имеет место следующее

Предложение 2.1. *Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}_*^n$ — римановы многообразия, $n\geqslant 2$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $f\colon D\to\mathbb{M}_*^n$ — открытое дискретное отображение, $\beta\colon[a,\,b)\to\mathbb{M}_*^n$ — кривая и точка $x\in\ f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0\in\mathbb{M}^n$ и рассмотрим $f(x_0)\in\mathbb{M}_*^n$. Поскольку точка $f(x_0)$ принадлежит многообразию $\mathbb{M}_*^n$, найдётся окрестность V этой точки, гомеоморфная множеству $\psi(V)\subset\mathbb{R}^n$. В силу непрерывности отображения f, найдётся окрестность U точки x_0, такая что $f(U)\subset V$. С другой стороны, не ограничивая общности, можно считать, что U гомеоморфна открытому множеству $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^n$. Можно также считать, что $\varphi(U)$ и $\psi(V)$ являются областями в $\mathbb{R}^n$, тогда $f^*=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ — открытое дискретное отображение между областями $\varphi(U)$ и $\psi(V)$ в $\mathbb{R}^n$. Для таких отображений существование максимальных поднятий локально вытекает из соответствующего результата Рикмана в n-мерном евклидовом пространстве (см. [8, шаг 2 доказательства теоремы 3.2 гл. II]). Отсюда вытекает локальное существование максимальных поднятий и на многообразиях. Глобальное существование максимальных поднятий может быть установлено аналогично доказательству шага 1 указанной выше теоремы. $\square$

Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия и область $D\subset \mathbb{M}^n$, тогда будем говорить, что отображение $f\colon D\to \mathbb{M}^n_*$ принадлежит классу $f\in W_{loc}^{1,1}(D)$, если каждая пара точек $p\in D$ и $f(p)\in f(D)$ имеют окрестности $U\subset D$, $V\subset f(D)$, в которых $\psi\circ f\circ \varphi^{-1}\in W_{loc}^{1,1}(\varphi(U))$, где $\varphi\colon U\to \mathbb{R}^n$ и $\psi\colon V\to\mathbb{R}^n$ — соответствующие карты, переводящие U и V в некоторые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$.

Определение конденсатора и ёмкости конденсатора на римановом многообразии могут быть даны по полной аналогии с $\mathbb{R}^n$ (см. [8, разд. 10, гл. II]). Следующее утверждение имеет важное значение для доказательства дальнейших результатов (см. [8, предложение 10.2 и замечание 10.8, гл. II]).

Предложение 2.2. *Пусть $\mathbb{M}^n$ — риманово многообразие, $n\geqslant 2$, $E=(A,C)$ — произвольный конденсатор в $\mathbb{M}^n$ и пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma\colon [a,b)\to A$, таких что $\gamma(a)\in C$ и $|\gamma|\cap(A\setminus F)\neq\varnothing$ для произвольного компакта $F\subset A$. Тогда* $\operatorname{cap} E= M(\Gamma_E)$.

Следующая лемма может быть полезной при исследовании свойства равностепенной непрерывности открытых дискретных кольцевых Q-отображений в наиболее общей ситуации. Её доказательство аналогично случаю $\mathbb{R}^n$ (см. [7, лемма 4.1]), однако, для полноты и строгости изложения мы приводим его полностью для случая произвольных римановых многообразий.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия, $n\geqslant 2$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $f\colon D\to\mathbb{M}^n_*$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0\in D$, $r_0>0$ таково, что шар $B(x_0,r_0)$ лежит со своим замыканием в некоторой нормальной окрестности U точки x_0. Предположим, что для некоторого числа $0<\varepsilon_0<r_0$, некоторого $\varepsilon_0'\in(0,\varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon\colon(\varepsilon,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')$, выполнено условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi_\varepsilon^n(d(x,x_0))\,dv(x)\leqslant F(\varepsilon,\varepsilon_0)\qquad \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0'),\quad(2.1)$$

где $F(\varepsilon,\varepsilon_0)$ — некоторая функция и

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_\varepsilon(t)dt<\infty\qquad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0').\qquad(2.2)$$

Тогда

$$\operatorname{cap} f(E)\leqslant F(\varepsilon,\varepsilon_0)/I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\qquad\forall\,\varepsilon\in\left(0,\,\varepsilon_0'\right),\qquad(2.3)$$

где $E=(A,\,C)$ *— конденсатор,* $A=B(x_0,\varepsilon_0)$ *и* $C=\overline{B(x_0,\varepsilon)}$.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $E=(A,\,C)$, где A и C таковы, как указано в условии леммы. Если $\operatorname{cap} f(E)=0$, доказывать нечего. Пусть $\operatorname{cap} f(E)\neq 0$.

Пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma\colon [a,\,b)\to A$, таких что $\gamma(a)\in C$ и $|\gamma|\cap(A\setminus F)\neq\varnothing$ для произвольного компакта $F\subset A$, где $|\gamma|=\{x\in\mathbb{M}^n : \exists\, t\in[a,b) : \gamma(t)=x\}$ — носитель кривой γ. Напомним, что $\operatorname{cap} E=M(\Gamma_E)$ (см. предложение 2.2). Для конденсатора $f(E)$ рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E)}$. Заметим также, что каждая кривая $\gamma\in\Gamma_{f(E)}$ имеет максимальное поднятие при отображении f, лежащее в A с началом в C (см. предложение 2.1). Пусть Γ^* — семейство всех максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E)}$ при отображении f с началом в C. Покажем, что $\Gamma^*\subset\Gamma_E$.

Предположим противное, т.е., что существует кривая $\beta\colon [a,\,b)\to\mathbb{R}^n$ семейства $\Gamma_{f(E)}$, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha\colon [a,\,c)\to B(x_0,\varepsilon_0)$ лежит в некотором компакте K внутри $B(x_0,\varepsilon_0)$. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ — компакт в $B(x_0,\varepsilon_0)$. Заметим, что $c\neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в $f\left(B(x_0,\varepsilon_0)\right)$, что противоречит условию $\beta\in\Gamma_{f(E)}$. Рассмотрим предельное множество G кривой α при $t_k\to c$,

$$G=\left\{x\in\mathbb{R}^n : x=\lim_{k\to\infty}\alpha(t_k)\right\},\quad t_k\in[a,\,c),\quad \lim_{k\to\infty}t_k=c.$$

Отметим, что переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x\in G$, в силу непрерывности f, будем иметь $f\left(\alpha(t_k)\right)\to f(x)$ при $k\to\infty$, где $t_k\in[a,\,c)$, $t_k\to c$ при $k\to\infty$. Однако, $f\left(\alpha(t_k)\right)=\beta(t_k)\to\beta(c)$ при $k\to\infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(x_0,\varepsilon_0)$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$ (см. [9, пункт (4), § 41, разд. I]),

$$G=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{\alpha\left([t_k,\,c)\right)}=\limsup_{k\to\infty}\alpha\left([t_k,\,c)\right)=\liminf_{k\to\infty}\alpha\left([t_k,\,c)\right)\neq\varnothing$$

в виду монотонности последовательности связных множеств $\alpha([t_k,c))$, откуда следует, что G является связным согласно [9, теорема 5, § 47, разд. II]. Таким образом, в силу дискретности f, G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha\colon [a,\,c)\to B(x_0,\varepsilon_0)$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha\colon [a,\,c]\to K\subset B(x_0,\varepsilon_0)$, причём $f\left(\alpha(c)\right)=\beta(c)$. Снова по предложению 2.1 можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c,\,b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a,c')$, $c' \in (c,b)$, что противоречит максимальности поднятия α. Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$.

Заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и, следовательно, ввиду свойства минориования модуля семейств кривых (см. [3, теорема 6.4] либо [10, теорема 1(c)]).

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right) \leqslant M\left(f(\Gamma^*)\right). \tag{2.4}$$

Рассмотрим

$$S_\varepsilon = S(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x,x_0) = \varepsilon\},$$

$$S_{\varepsilon_0} = S(x_0,\varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x,x_0) = \varepsilon_0\},$$

где ε_0 — из условия леммы и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0')$. Заметим, что, поскольку $\Gamma^* \subset \Gamma_E$, то при всех достаточно малых $\delta > 0$ будем иметь, что $\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(\varepsilon,\varepsilon_0-\delta,x_0)\right) < \Gamma^*$ и, следовательно,

$$f(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(\varepsilon,\varepsilon_0-\delta,x_0)\right)) < f(\Gamma^*)$$

(здесь мы положили $S_{\varepsilon_0-\delta} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| < \varepsilon_0-\delta\}$). Значит,

$$M\left(f(\Gamma^*)\right) \leqslant M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(\varepsilon,\varepsilon_0-\delta,x_0)\right)\right)\right). \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.4) и (2.5) следует, что

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right) \leqslant M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(\varepsilon,\varepsilon_0-\delta,x_0)\right)\right)\right)$$

и, таким образом, по предложению 2.2

$$\operatorname{cap} f(E) \leqslant M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(\varepsilon,\varepsilon_0-\delta,x_0)\right)\right)\right). \tag{2.6}$$

Пусть $\eta(t)$ произвольная неотрицательная измеримая функция, удовлетворяющая условию $\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\eta(t)dt = 1$. Рассмотрим семейство измеримых функций

$$\eta_\delta(t) = \frac{\eta(t)}{\int_\varepsilon^{\varepsilon_0-\delta}\eta(t)dt}.$$

(Так как $\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\eta(t)dt = 1$, то $\delta > 0$ можно выбрать так, что $\int_\varepsilon^{\varepsilon_0-\delta}\eta(t)dt > 0$). Поскольку $\int_\varepsilon^{\varepsilon_0-\delta}\eta_\delta(t)dt = 1$, то по определению кольцевого Q-отображения в точке x_0 мы получим

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(\varepsilon,\varepsilon_0-\delta,x_0)\right)\right)\right) \leqslant \frac{1}{\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon_0-\delta}\eta(t)dt\right)^n} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\eta^n(d(x,x_0))\,dv(x).$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 0$ и учитывая соотношение (2.6), получаем что

$$\text{cap } f(E) \leqslant \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \eta^n(d(x, x_0)) \ dv(x) \tag{2.7}$$

для произвольной неотрицательной измеримой функции $\eta(t)$ такой что $\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(t)dt = 1$. Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, $t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Заметим, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$ выполнено равенство

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\, dt = 1.$$

Тогда из (2.7) мы получим, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$

$$\text{cap } f(E) \leqslant \frac{1}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(d(x, x_0))\, dv(x). \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.1) и (2.8) следует соотношение (2.3). □ □

Справедливо следующее утверждение (см. [11, предложение 4.7]).

Предложение 2.3. *Пусть X — $\widetilde{Q}$-регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется $(1;n)$-неравенство Пуанкаре так, что $\widetilde{Q} - 1 \leqslant n \leqslant \widetilde{Q}$. Тогда для произвольных континуумов E и F, содержащихся в шаре $B(x_0, R)$, и некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство*

$$M(\Gamma(E, F, X)) \geqslant \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}}{R^{1+n-\widetilde{Q}}}.$$

Теперь сформулируем и докажем утверждение о равностепенной непрерывности кольцевых Q-отображений между римановыми многообразиями в "максимальной" степени общности.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия, $n \geqslant 2$, многообразие $\mathbb{M}^n_*$ связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}^n_*$ выполнено $(1;n)$-неравенство Пуанкаре. Предположим, D — область в $\mathbb{M}^n$ и $\mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$ — семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D \to B_R \setminus K$ в точке $x_0 \in D$, где $B_R \subset \mathbb{M}^n_*$ — некоторый фиксированный шар радиуса R, K — невырожденный континуум в B_R. Пусть $\varepsilon_0 < r_0$, где шар $B(x_0, r_0)$ лежит вместе со своим замыканием в некоторой нормальной окрестности U точки x_0.*

Предположим также, что для некоторого числа $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ *и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций* $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon\colon (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, *выполнено условие* (2.1), *где некоторая заданная функция* $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ *удовлетворяет условию* $F(\varepsilon, \varepsilon_0) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0))$, *а* $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ *определяется соотношением* (2.2).

Тогда семейство отображений $\mathfrak{R}_{Q,x_0,B_R,K}(D)$ *является равностепенно непрерывным в точке* x_0.

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$. Полагаем $A := B(x_0, r_0) \subset D$. Заметим, что при указанных условиях $\overline{A}$ является компактным подмножеством D. Тогда при каждом $0 < \varepsilon < r_0$ множество $C := \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ является компактным подмножеством $B(x_0, r_0)$. Таким образом, $E = (A, C)$ — конденсатор в $\mathbb{M}^n$.

Рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E)}$ для конденсатора $f(E)$ в терминах предложения 2.2. Заметим, что подсемейство неспрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E)}$ имеет нулевой модуль, и что оставшееся подсемейство, состоящее из всех спрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E)}$, состоит из кривых $\beta\colon [a, b) \to f(D)$, имеющих предел при $t \to b$. Заметим, что указанный предел принадлежит множеству $\partial f(A)$. Из сказанного следует, что

$$M(\Gamma_{f(E)}) = M(\Gamma(f(C), \partial f(A), f(A))). \tag{2.9}$$

Заметим, что $\Gamma(K, f(C), \mathbb{M}^n_*) > \Gamma(f(C), \partial f(A), f(A))$ (см. [9, теорема 1, § 46, п. I]), так что ввиду свойства минорирования модуля семейств кривых ([10, теорема 1(c)])

$$M(\Gamma(f(C), \partial f(A), f(A))) \geqslant M(\Gamma(K, f(C), \mathbb{M}^n_*))\,.$$

Ввиду предложения 2.3 получим:

$$M(\Gamma(K, f(C), \mathbb{M}^n_*)) \geqslant \frac{1}{C_1} \cdot \frac{\min\{\operatorname{diam} f(C), \operatorname{diam} K\}}{R}\,. \tag{2.10}$$

По лемме 2.1 $M(\Gamma_{f(E)}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так что ввиду (2.9) и (2.10) получаем, что

$$\min\{\operatorname{diam} f(C), \operatorname{diam} K\} = \operatorname{diam} f(C)$$

при $\varepsilon \to 0$. Из соотношений (2.3) и (2.10) также вытекает, что для любого $\sigma > 0$ найдётся $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\sigma)$ так, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\operatorname{diam} f(C) \leqslant \sigma$, что и означает равностепенную непрерывность семейства $\mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$ в точке x_0. □

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.1 вытекает из леммы 2.2 на основании [4, лемма 4.1] и [5, следствие 5.1].

Справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему 1.1.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия, $n \geqslant 2$, многообразие $\mathbb{M}^n_*$ связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}^n_*$ выполнено $(1;n)$-неравенство Пуанкаре. Пусть $B_R \subset \mathbb{M}^n_*$ — некоторый фиксированный шар радиуса R, D — область в $\mathbb{M}^n$ и $Q\colon D \to [1,\infty]$ — функция, измеримая по Лебегу. Обозначим через $\mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$ семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D \to B_R \setminus K$ в точке $x_0 \in D$. Тогда семейство отображений $\mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$ является равностепенно непрерывным в точке $x_0 \in D$, если при некотором $\delta(x_0) > 0$ выполняется равенство*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{\left(\int_{S(x_0,t)} Q(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \infty. \tag{3.1}$$

Здесь элемент площади $d\mathcal{A}$ следует понимать как

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det g^*_{\alpha\beta}}\, du^1 \dots du^{n-1},$$

где $g^*_{\alpha\beta}$ — риманова метрика на H, порождённая исходной римановой метрикой g_{ij} согласно соотношению $g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u))\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}$ (индексы α и β меняются от 1 до $n-1$, а $x(u)$ обозначает параметризацию поверхности H такую, что $\nabla_u x \neq 0$).

Доказательство. Достаточно показать, что условие (3.1) влечёт выполнение условия (2.1) леммы 2.2. Можно считать, что $B(x_0, \delta(x_0))$ лежит в нормальной окрестности точки x_0. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) \quad = \begin{cases} \left(\int\limits_{S(x_0,t)} Q(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{1-n}}, & t \in (0, \delta(x_0)), \\ 0, & t \notin (0, \delta(x_0)). \end{cases}$$

Заметим теперь, что требование вида (2.2) выполняется при $\varepsilon_0 = \delta(x_0)$ и всех достаточно малых ε. Далее установим неравенство

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\delta(x_0)} Q(x)\psi^n(d(x,x_0))\, dv(x) \leqslant C \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \left(\int\limits_{S(x_0,t)} Q(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{1-n}} dt \tag{3.2}$$

при некоторой постоянной $C > 0$. Для этого покажем, что к левой части соотношения (3.2) применим аналог теоремы Фубини. Рассмотрим в окрестности точки $x_0 \in S(z_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ локальную систему координат $z^1, \ldots, z^n$, $n-1$ базисных векторов которой взаимно ортогональны и лежат в плоскости, касательной к сфере в точке x_0, а последний базисный вектор перпендикулярен этой плоскости. Пусть $r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1}$ сферические координаты точки $x = x(\theta)$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что $n-1$ приращений переменных $z^1, \ldots, z^{n-1}$ вдоль сферы при фиксированном r равны $dz^1 = rd\theta^1, \ldots, dz^{n-1} = rd\theta^{n-1}$, а приращение переменной z^n по r равно $dz^n = dr$. В таком случае,

$$dv(x) = \sqrt{\det g_{ij}(x)}r^{n-1}\,drd\theta^1 \ldots d\theta^{n-1}.$$

Рассмотрим параметризацию сферы $S(0, r)$ $x = x(\theta)$,

$$\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^{n-1}), \quad \theta_i \in (-\pi, \pi].$$

Заметим, что $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^\beta} = 1$ при $\alpha = \beta$ и $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1$. Тогда в обозначениях, введённых выше, имеем:

$$g^*_{\alpha\beta}(\theta) = g_{\alpha\beta}(x(\theta))r^2,$$

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det\, g_{\alpha\beta}(x(\theta))}r^{n-1}d\theta^1 \ldots d\theta^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\psi^n(d(x,x_0))\,d\mathcal{A} = \psi^n(r)r^{n-1} \cdot \int\limits_{\Pi} \sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x(\theta))}Q(x(\theta))\,d\theta^1 \ldots d\theta^{n-1}, \quad (3.3)$$

где $\Pi = (-\pi, \pi]^{n-1}$ — прямоугольная область изменения параметров $\theta^1, \ldots, \theta^{n-1}$. Согласно сказанному выше, применяя классическую теорему Фубини (см., напр., [12, разд. 8.1, гл. III]),

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\delta(x_0)} Q(x)\psi^n(d(x,x_0))\,dv(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \int\limits_{\Pi} \sqrt{\det g_{ij}(x)}Q(x)\psi^n(r)r^{n-1}\,d\theta^1 \ldots d\theta^{n-1}dr. \quad (3.4)$$

Поскольку в нормальных координатах тензорная матрица g_{ij} сколь угодно близка к единичной в окрестности данной точки, то $C_2 \det g_{\alpha\beta}(x) \leqslant \det\, g_{ij}(x) \leqslant C_1 \det g_{\alpha\beta}(x)$. Учитывая сказанное и сравнивая (3.3) и (3.4), приходим к соотношению (3.2). Но тогда также

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\delta(x_0)} Q(x)\psi^n(d(x,x_0))dv(x) = o(I^n(\varepsilon,\delta(x_0)))$$

ввиду соотношения (3.1). Утверждение теоремы следует теперь из леммы 2.2. $\Box$

Ввиду теоремы Арцела–Асколи имеем также следующее

Следствие 3.1. *Предположим, что в условиях теоремы* 1.1 *многообразие* $\mathbb{M}^n_*$ *является компактным. Если* $\mathfrak{R}_{D,Q,B_R,K}(D)$ *— семейство, состоящее из всех открытых дискретных отображений* $f\colon D \to B_R \setminus K$*, являющихся кольцевыми* Q*-отображениями в каждой точке* $x_0 \in D$ *и, кроме того, условие* (3.1) *выполнено в каждой точке* $x_0 \in D$*, то класс* $\mathfrak{R}_{D,Q,B_R,K}(D)$ *образует нормальное семейство отображений.*

Литература

[1] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, New York: Springer, 1997.

[2] Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин, *Дифференциальная геометрия: первое знакомство*, Москва: Изд-во МГУ, 1990.

[3] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.

[4] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Слабо плоские пространства и границы в теории отображений* // Укр. матем. вестник, **4** (2007), No. 2, 199–234.

[5] Е. С. Афанасьева, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях* // Укр. мат. вестник, **8** (2011), No. 3, 319–342.

[6] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on metric spaces*, New York: Springer Science+Business Media, 2001.

[7] Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций* // Матем. сборник, **201** (2010), No. 6, 131–158.

[8] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Results in Mathematic and Related Areas (3), **26**, Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[9] К. Куратовский, *Топология, т. 2*, М.: Мир, 1969.

[10] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion* // Acta Math., **98** (1957), 171–219.

[11] T. Adamowicz and N. Shanmugalingam, *Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **35** (2010), 609–626.

[12] С. Сакс, *Теория интеграла*, М.: Издательство иностранной литературы, 1949.

Сведения об авторах

Денис Петрович Ильютко
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-Mail: ilyutko@yandex.ru

Евгений Александрович Севостьянов
Житомирский государственный университет им. И. Франко
E-Mail: esevostyanov2009@mail.ru