Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 1, 11 – 26

Обобщенное матричное дифференциально-алгебраическое уравнение

Сергей М. Чуйко

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи. Получены достаточные условия приводимости обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения к традиционному дифференциально-алгебраическому уравнению с неизвестной в виде вектор-столбца. Для решения обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи использованы оригинальные условия разрешимости, а также конструкция общего решения матричного уравнения типа Сильвестра.

2010 MSC. 34B15.

Ключевые слова и фразы. Матричная краевая задача, дифференциально-алгебраические уравнения, обобщенный оператор Грина, уравнение Сильвестра.

Введение

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ пространство действительных векторов с "кубической" нормой [1, 2]

$$\|a\|_{\mathbb{R}^n} := \max_{1\le i\le n} |a_i|, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

а также пространство $\mathbb{R}^{m\times n}$ действительных $(m\times n)$-матриц с нормой

$$\|A\|_{\mathbb{R}^{m\times n}} := \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|, \quad A := \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

Статья поступила в редакцию 20.12.2014
Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины

ISSN 1810 – 3200.

согласованной с "кубической" нормой в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим также $\mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ линейное нормированное пространство действительных $(m\times n)$ — матриц $A(t)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ с нормой

$$\|A(t)\|_{\mathbb{C}_{m\times n}} := \max_{[a;b]} \|A(t)\|_{\mathbb{R}^{m\times n}}, \quad A(t)\in\mathbb{C}_{m\times n}[a,b],$$

а также пространство $\mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b]$ линейное нормированное пространство действительных $(m\times n)$ — матриц $A(t)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ с нормой

$$\|A(t)\|_{\mathbb{C}^1_{m\times n}} := \max_{[a;b]} \sum_{k=0}^{1} \|A^{(k)}(t)\|_{\mathbb{R}^{m\times n}}, \quad A(t)\in\mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b].$$

Матричный оператор

$$\mathcal{A}:\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]\to\mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a;b]$$

будем называть дифференциально-алгебраическим, если для любых скалярных функций $\zeta(t),\xi(t)\in\mathbb{C}^1[a,b]$ и любых постоянных матриц $\Xi_1,\Xi_2\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ имеет место равенство

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1+\xi'(t)\Xi_2)(t)=\zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t)+\xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогично матричный оператор $\mathcal{B}:\mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a;b]\to\mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a;b]$ будем называть алгебраическим, если для любых непрерывных скалярных функций $\zeta(t),\xi(t)\in\mathbb{C}[a,b]$ и любых постоянных матриц $\Xi_1,\Xi_2\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ имеет место равенство

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1+\xi(t)\Xi_2)(t)=\zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t)+\xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Целью данной статьи является нахождение условий разрешимости, а также конструкции обобщенного оператора Грина линейной нетеровой матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи, которая обобщает аналогичные результаты для матричных дифференциальных уравнений [3–6], так и для дифференциально-алгебраических уравнений [7–9]. С другой стороны, исследованная в статье матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача обобщает традиционные постановки нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 10–12].

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений $Z(t)\in\mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$ обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения

$$\mathcal{A}Z'(t)=\mathcal{B}Z(t)+F(t), \qquad (1.1)$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathcal{A}Z'(t)$ — линейный ограниченный дифференциально-алгебраический матричный оператор и $\mathcal{B}Z(t)$ — линейный ограниченный алгебраический матричный оператор, $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a;b]$ — непрерывная матрица, $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Вообще говоря, предполагаем $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \mu \neq \nu$. Определим оператор $\mathcal{M}[A]:\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор [14–16]

$$\mathcal{M}^{-1}\big[\mathcal{B}\big]:\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ j = 1, 2, \ldots,\ \alpha\cdot\beta$ — естественный базис [17] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при этом задача о нахождении решений обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения (1.1) приводит к задаче о нахождении вектора $z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b]$, компоненты которого $z_j(t)$ определяют разложение матрицы

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1, 2, \ldots,\ \alpha\cdot\beta.$$

Линейный дифференциально-алгебраический матричный оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ по определению представим в виде

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t) z_j'(t),$$

при этом

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t)\Big] = \Omega(t)\cdot z'(t), \quad \Omega(t) := \Big[\Omega_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

где

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots,\ \alpha\cdot\beta.$$

Аналогично

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t)\Big] = \Theta(t)\cdot z(t), \quad \Theta(t) := \Big[\Theta_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

где
$$\Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots,\ \alpha \cdot \beta.$$
Таким образом, задача о построении решений обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения (1.1) приведена к задаче о нахождении решений $z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta\times 1}[a;b]$ традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [7–9, 12, 18, 19]
$$\Omega(t) \cdot z'(t) = \Theta(t) \cdot z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}\big[F(t)\big]. \tag{1.3}$$

2. Случай разрешимости системы (1.3) относительно производной

При условии [10, 12, 19]
$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \quad P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \tag{2.1}$$
в случае
$$\Omega^+(t)\Theta(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a;b], \quad \Omega^+(t)\mathcal{F}(t),\ P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a;b] \tag{2.2}$$
система (1.3) разрешима относительно производной
$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}_1(t, \varphi(t)), \quad \mathfrak{F}_1(t, \varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t).$$
Здесь $P_{\Omega_\varrho}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times\varrho)$-матрица, составленная из ϱ линейно-независимых столбцов $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$-матрицы-ортопроектора $P_\Omega(t) : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega(t))$. Обозначим $X(t)$ нормальную фундаментальную матрицу [2]
$$\frac{dX(t)}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)X(t), \quad X(a) = I_{\alpha\beta}$$
полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При условии (2.1), (2.2) система (1.3) имеет решение вида
$$z(t, c) = X(t)c + K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t),$$
$$K\Big[f(s)\Big](t) := X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f(s)ds, \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$
которое определяет решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (1.1)
$$Z(t,c) = W(t,c) + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t), \ W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)c\Big], \ c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \tag{2.3}$$

где
$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t)\Big\}.$$
Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы (1.1).

Лемма 2.1. *При условиях* (2.1), (2.2) *матричная задача Коши* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1.1) *однозначно разрешима для любого начального значения* $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. *При условиях* (2.1), (2.2) *общее решение* (2.3) *задачи Коши* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1.1) *определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши* $Z(a) = 0$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1.1)
$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t)\Big\}$$
и общее решение $W(t,c)$ *задачи Коши* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для однородной части дифференциально-алгебраического уравнения* (1.1).

Подставляя решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (1.1) в краевое условие (1.2), приходим к задаче о нахождении решений
$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} c_j \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ \dots\ \alpha\cdot\beta$$
матричного уравнения [14]
$$\mathcal{L}W(\cdot,c) + \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2.4}$$
В критическом случае ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) при условиях (2.1), (2.2) и
$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{2.5}$$
решение матричного уравнения (2.4) определяет вектор [14–16]
$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$
Здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ — $(\mu\cdot\nu\times\mu\cdot\nu)$-матрица-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*}: \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$, где
$$\mathcal{Q} := \big[\mathcal{Q}_i\big]_{i=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times\alpha\cdot\beta},$$

$$\mathcal{Q}_i := \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\big[X(\cdot)\Xi^{(i)}\big]\Big\}, \quad i = 1, 2, \ldots, \ \alpha \cdot \beta;$$

матрица $P_{\mathcal{Q}_r}$ составлена из r линейно-независимых столбцов $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$-матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to N(\mathcal{Q})$. Матрица $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Таким образом, в критическом случае, при условиях (2.1), (2.2) и (2.5), решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (1.1), удовлетворяющее краевому условию (1.2) имеет вид

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}\Big](t), \ \ W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big], \tag{2.6}$$

где

$$G\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\bigg\{X(t)\mathcal{Q}^{+}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}\bigg\} + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t).$$

Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. *В критическом случае* ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) *при условиях* (2.1), (2.2) *и* (2.5), *решение* (2.6) *обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения* (1.1), *удовлетворяющее краевому условию* (1.2) *определяет обобщенный оператор Грина* $G[\,\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}\,](t)$ *матричной дифференциально-алгебраической задачи* (1.1), (1.2).

Заметим, что второе слагаемое, составляющее обобщенный оператор Грина матричной задачи Коши $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (1.1)

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[Q^{+}(s)\mathcal{F}(s)\Big](t)\Big\} + \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[P_{Q_\rho}(s)\varphi(s)\Big](t)\Big\}$$

при условиях (2.1), (2.2) и $\rho \neq 0$ зависит от произвольной функции $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\varrho\times 1}[a; b]$. В критическом случае ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) при условиях (2.1), (2.2) и $\rho \neq 0$ обобщенный оператор Грина $G[\,\mathfrak{F}(s, \varphi(s));\, \mathfrak{A}\,](t)$ матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1), (1.2) также зависит от функции $\varphi(t)$.

Пример 2.1. Требованиям теоремы 2.1 удовлетворяет матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \tag{2.7}$$

где

$$\mathcal{A}Z'(t) := \int_0^1 \int_0^1 \Phi(t,u,v)\, Z'(t)\, \Psi(t,u,v)\, du\, dv,$$

$$\mathcal{B}Z(t) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} S_i(t)\, Z(t)\, R_j(t),$$

$$\Phi(t,u,v) := \begin{pmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3s \end{pmatrix}, \quad \Psi(t,u,v) := \begin{pmatrix} 4s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix},$$

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) := \Pi_0 Z(0)\Lambda_0 + \Pi_1 Z(1)\Lambda_1,$$

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\, \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\, \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$:

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

постольку условия (2.1), (2.2) выполнены: $P_{\Omega(t)^*\Theta(t)} = 0,\ P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0$,

$$\Omega^+(t)\Theta(t) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{6\times 6}[\mathbb{R}],$$

при этом матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (2.7) представляет критический случай ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$); здесь

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\rho = 2 \neq 0$. При этом произведение $P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t)$ зависит от произвольной функции $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{2\times 1}[0;1]$; здесь

$$P_{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\Omega_\varrho}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $\varphi(t) := \begin{pmatrix} 2t & 0 \end{pmatrix}^*$, при этом условие (2.5) выполнено:

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0;$$

здесь

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) = \begin{pmatrix} -1 + \ \mathrm{ch}\left[\frac{t}{2\sqrt{3}}\right] & \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{sh}\left[\frac{t}{2\sqrt{3}}\right] & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

обобщенный оператор Грина задачи Коши $Z(0) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (2.7). Таким образом, матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (2.7) разрешима в виде (2.6), где

$$\mathcal{M}G\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\Big](t)$$

$$= \frac{e^{-\frac{t}{2\sqrt{3}}}}{1+e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}\begin{pmatrix} 8\left(1+3e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}-2e^{\frac{t}{2\sqrt{3}}}+3e^{\frac{t}{\sqrt{3}}}+e^{\frac{1+t}{\sqrt{3}}}-2e^{\frac{2+t}{2\sqrt{3}}}\right) \\ 0 \\ 4\sqrt{3}\left(-1-3e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+3e^{\frac{t}{\sqrt{3}}}+e^{\frac{1+t}{\sqrt{3}}}\right) \\ 0 \\ 16e^{\frac{t}{2\sqrt{3}}}\left(1+e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и

$$W(t,c_1,c_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}^1 \text{ —}$$

общее решение однородной части матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (2.7).

3. Случай неразрешимости системы (1.3) относительно производной

При условии $P_{\Omega(t)^*}\Theta(t) \neq 0$, либо $P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) \neq 0$ система (1.3) не разрешима относительно производной, при этом система (1.1) может иметь решения вида

$$Z(t) = \mathcal{P}_\ell\, Y(t)\mathcal{P}_r, \quad \mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}, \quad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta},$$

где $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$ — неизвестные постоянные матрицы, при этом задача о нахождении решений обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения (1.1) приводит к задаче о нахождении вектора $y(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b]$, компоненты которого $y_j(t)$ определяют разложение матрицы

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} y_j(t), \quad y_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta.$$

В этом случае линейный ограниченный дифференциально-алгебраический матричный оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ принимает вид

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\,\mathcal{P}_\ell \Xi^{(j)}\mathcal{P}_r\, y_j'(t),$$

при этом

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t)\Big] = \Omega_1(t)\cdot y'(t), \quad \Omega_1(t) := \Big[\Omega_1^{(j)}(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

где

$$\Omega_1^{(j)}(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\mathcal{P}_\ell \Xi^{(j)}\mathcal{P}_r(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Аналогично

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t)\Big] = \Theta_1(t)\cdot y(t), \quad \Theta_1(t) := \Big[\Theta_1^{(j)}(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

где

$$\Theta_1^{(j)}(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\mathcal{P}_\ell \Xi^{(j)}\mathcal{P}_r(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Таким образом, задача о построении решений обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения (1.1) приведена к задаче о нахождении решений $y(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta\times 1}[a;b]$ традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [7–9, 12, 18, 19]

$$\Omega_1(t)\cdot y'(t) = \Theta_1(t)\cdot y(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}\Big[F(t)\Big]. \tag{3.1}$$

При условии [10, 12, 19]

$$P_{\Omega_1^*(t)}\Theta_1(t) = 0, \quad P_{\Omega_1^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \tag{3.2}$$

в случае

$$\Omega_1^+(t)\Theta_1(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a;b], \quad \Omega_1^+(t)\mathcal{F}(t),\ P_{\Omega_{1,\varrho}}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a;b] \tag{3.3}$$

система (3.1) разрешима относительно производной

$$\frac{dy}{dt} = \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)y + \mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)), \quad \mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)) := \Omega_1^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega 1,\varrho}(t)\varphi(t).$$

Здесь $P_{\Omega_{1,\varrho}}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times\varrho)$-матрица, составленная из ϱ линейно-независимых столбцов $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$-матрицы-ортопроектора $P_{\Omega_1}(t) : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega_1(t))$. Условие (3.2) представляет собой, вообще говоря, нелинейное уравнение относительно постоянных матриц $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$. Предположим, что система уравнений (3.2) имеет действительное решение $\mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha},\ \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}$, для которого выполнено условие (3.3). Пусть $\mathfrak{X}(t)$ обозначает нормальную фундаментальную матрицу [2]

$$\frac{d\mathfrak{X}(t)}{dt} = \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\mathfrak{X}(t), \quad X(a) = I_{\alpha\beta}$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При условиях (3.2) и (3.3) система (3.1) имеет решение вида

$$y(t,c) = \mathfrak{X}(t)c + K\Big[\mathfrak{F}_1(t,\varphi(s))\Big](t),$$

которое определяет решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (1.1)

$$Z(t,c) = \mathfrak{W}(t,c) + \mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t), \ \ \mathfrak{W}(t,c) := \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{X}(t)c\Big]\mathcal{P}_r, \ \ c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

где

$$\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t) := \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}_1(t,\varphi(s))\Big](t)\Big\}\mathcal{P}_r \ - \tag{3.4}$$

обобщенный оператор Грина матричной задачи Коши $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (1.1). Подставляя решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (1.1) в краевое условие (1.2), приходим к задаче о нахождении решений

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} c_j \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta$$

матричного уравнения типа Сильвестра [14]

$$\mathcal{L}\mathfrak{W}(\cdot, c) + \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{3.5}$$

В критическом случае ($P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$) при условиях (3.2), (3.3) и

$$P_{\mathfrak{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{3.6}$$

решение матричного уравнения (3.5) определяет вектор [14, 15]

$$c = \mathfrak{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathfrak{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $P_{\mathfrak{Q}^*}$ — $(\mu\cdot\nu \times \mu\cdot\nu)$-матрица-ортопроектор $P_{\mathfrak{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q}^*)$, где

$$\mathfrak{Q} := \Big[\mathfrak{Q}_i\Big]_{i=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times\alpha\cdot\beta},$$

$$\mathfrak{Q}_i := \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{X}(\cdot)\Theta^{(i)}\Big]\mathcal{P}_r\Big\}, \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta;$$

матрица $P_{\mathfrak{Q}_r}$ составлена из r линейно-независимых столбцов $(\alpha\cdot\beta \times \alpha\cdot\beta)$-матрицы-ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}} : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q})$. Матрица $P_{\mathfrak{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}^*}$, кроме того $\mathfrak{X}_r(t) := \mathfrak{X}(t)P_{\mathfrak{Q}_r}$. Таким образом, в критическом случае при условиях (3.2), (3.3) и (3.6) решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (1.1), удовлетворяющее краевому условию (1.2)

$$Z(t,c_r)=\mathfrak{W}(t,c_r)+\mathfrak{G}\Big[F(s);\mathfrak{A}\Big](t),\quad \mathfrak{W}(t,c_r):=\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{X}_r(t)c_r\Big]\mathcal{P}_r,$$
$$c_r\in\mathbb{R}^r,\quad (3.7)$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$\mathfrak{G}\Big[F(s);\mathfrak{A}\Big](t)=\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathfrak{X}(t)\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}-\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\}\Big\}\mathcal{P}_r$$
$$+\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t)\quad (3.8)$$

краевой задачи (1.1), (1.2). Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1), (1.2).

Следствие 3.1. *В критическом случае* ($P_{\mathfrak{Q}^*}\neq 0$) *при условии* $P_{\Omega(t)^*}\Theta(t)\neq 0$ *либо* $P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t)\neq 0$ *для любых действительных решений* $\mathcal{P}_\ell\in\mathbb{R}^{\beta\times\beta}$, $\mathcal{P}_r\in\mathbb{R}^{\gamma\times\gamma}$ *уравнения* (3.2), *для которых выполнены условия* (3.3) *и* (3.6), *решение* (3.7) *обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи* (1.1), (1.2) *определяет обобщенный оператор Грина* (3.8).

Существенное отличие дифференциально-алгебраической системы (1.1) при условии $P_{\Omega(t)^*}\Theta(t)\neq 0$ либо $P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t)\neq 0$ от более простого случая разрешимости системы (1.3) относительно производной заключается в разрешимости задачи Коши с $Z(a)=\mathfrak{A}$ для обобщенной матричной дифференциально-алгебраической системы (1.1) лишь для тех неоднородностей $\mathfrak{A}$, для которых выполнено условие (3.6).

Пример 3.1. Требованиям следствия удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений матричной дифференциально-алгебраической системы

$$\mathcal{A}Z'(t)=\mathcal{B}Z(t)+F(t),\tag{3.9}$$

где

$$\mathcal{A}Z'(t):=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Phi_i(t)Z'(t)\Psi_j(t),\quad \mathcal{B}Z(t):=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}S_i(t)Z(t)R_j(t),$$

$$\Phi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим естественный базис пространства $\mathbb{R}^{3\times 2}$:

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{\Omega(t)^*}\Theta(t) \neq 0$, постольку условие (2.1) не выполнено, при этом система (3.9) может иметь решения вида

$$Z(t) = \mathcal{P}_\ell Y(t)\mathcal{P}_r, \quad \mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

где $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$ — неизвестные постоянные матрицы. Система уравнений (3.2) имеет действительное решение

$$\mathcal{P}_\ell := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_r := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

для которого выполнено условие (3.3). Произведение $\Omega_1^+(t)\Theta_1(t)$ определяет матрицу

$$\mathfrak{X}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{e^{t/2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{e^{t/2}}{2} & -1 + e^{t/2} & 0 & -1 + e^{t/2} \\ -1 + e^{t/2} & 1 & -1 + e^{t/2} & -2 + 2e^{t/2} & 0 & -2 + 2e^{t/2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{e^{t/2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{e^{t/2}}{2} & -1 + e^{t/2} & 0 & -1 + e^{t/2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и общее решение

$$\mathfrak{W}(t,c) = \begin{pmatrix} c_4 + c_6 & (c_1 + c_3)e^{t/2} + 2c_4\left(-1 + e^{t/2}\right) + 2c_6\left(-1 + e^{t/2}\right) \\ c_5 & c_2 + c_1\left(-1 + e^{t/2}\right) + (c_3 + 2(c_4 + c_6))\left(-1 + e^{t/2}\right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задачи Коши $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однородной части дифференциально-алгебраической системы (3.9). Поскольку $P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$, постольку в задаче о построении 2π-периодических решений матричной дифференциально-алгебраической системы (3.9) имеет место критический случай; здесь

$$\mathfrak{Q} = (1-e^{\pi})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathfrak{Q}^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение

$$\mathfrak{W}(t, c_r) = \begin{pmatrix} -4c_1 - 4c_3 + 2c_4 & 8c_1 + 8c_3 - 4c_4 \\ 10c_5 & 10c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

однородной части 2π-периодической матричной дифференциально-алгебраической системы (3.9) определяют матрицы

$$P_{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 9 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathfrak{Q}_r} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 9 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ -2 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (3.6) выполнено, семейство решений 2π-периодической матричной дифференциально-алгебраической системы (3.9)

$$Z(t, c_r) = \mathfrak{W}(t, c_r) + \mathfrak{G}\Big[F(s); \mathfrak{A}\Big](t)$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$\mathfrak{G}\Big[F(s);\mathfrak{A}\Big](t) = -\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 8 & 2(8-10\cos t-5\sin t) \\ 0 & 5(1-\cos t-3\sin t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В некритическом случае ($P_{Q^*}=0$ либо $P_{\mathfrak{Q}^*}=0$), требования (2.5) и (3.6), очевидно, превращаются в тождества.

Найденные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1), (1.2) обобщают традиционные результаты для нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных, а также дифференциально-алгебраических уравнений [2, 10, 11]. С другой стороны, найденные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина краевой задачи матричной дифференциально-алгебраической задачи (1.1), (1.2) обобщают условия разрешимости и конструкцию обобщенного оператора Грина линейной нетеровой матричной краевой задачи [6].

Литература

[1] Н. В. Азбелев, Н. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1991, 277 с.

[2] A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, Utrecht; Boston: VSP, 2004.

[3] Р. Беллман, *Введение в теорию матриц*, М.: Наука: 1969, 367 с.

[4] В. П. Деревенский, *Матричные уравнения Бернулли* // Известия вузов. Математика, (2008) No. 2, 14–23.

[5] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya,*A critical periodic boundary value problem for a matrix Riccati equations* // Differential Equations, **37** (2001), No. 4, 464–471.

[6] С. М. Чуйко, *Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения* // Динамические системы, **4 (32)** (2014), No. 1–2, 101–107.

[7] S. L. Campbell, *Singular Systems of differential equations*, San Francisco–London–Melbourne: Pitman, 1980.

[8] А. М. Самойленко, М. I. Шкiль, В. П. Яковець, *Лiнiйнi системи диференцiальних рiвнянь з виродженням*, Київ: Вища школа, 2000, 296 с.

[9] Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования*, Новосибирск: Наука, 1998, 224 с.

[10] С. М. Чуйко, *Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем* // Комп. Исследов. и Моделирование, **5** (2013), No. 5, 769–783.

[11] A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, V. F. Chistyakov, *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations* // Computational Mathematics and Mathematical Physics, **53** (2013), No. 6, 777–788.

[12] С. М. Чуйко, *Линейная нетерова краевая задача для вырожденной дифференциально-алгебраической системы* // Spectral and Evolution Problems, **23** (2013), 148–157.

[13] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type* // Ukr. Math. J., **50** (1998), No. 8, 1162–1169.

[14] С. М. Чуйко, *О решении матричного уравнения Сильвестра* // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика, **19** (2014), вып. 1 (21), 49–57.

[15] С. М. Чуйко, *О решении матричных уравнений Ляпунова* // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика, (2014), № 1120, 85–94.

[16] С. М. Чуйко, *О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра* // Чебышевский Сборник, **16** (2015), вып. 1, 52–66.

[17] В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и Вычисления*, М.: Наука, 1984, 318 с.

[18] В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова, *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем*, Новосибирск: Наука, 2003, 317 с.

[19] С. М. Чуйко, *Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с линейным импульсным воздействием* // Динамические системы, **4 (32)** (2014), No. 1–2, 89–100.

Сведения об авторах

Сергей Михайлович Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск,
Украина
E-Mail: `chujko-slav@inbox.ru`