Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 4, 543 – 573

Обобщенная касательная интерполяционная задача

Евгений В. Нейман

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В работе исследуется новая касательная интерполяционная задача в классе Шура. Для этой задачи получены необходимые и достаточные условия её разрешимости, получено описание решений этой задачи. Результаты работы применяются для классификации и описания множества исключительных параметров индефинитной касательной интерполяционной задачи в обобщённых классах Шура.

2010 MSC. 30E05, 47A57, 46E22, 47B32, 46C07.

Ключевые слова и фразы. Касательная интерполяция, абстрактная интерполяционная задача, обобщённый класс Шура, класс Смирнова, резольвентная матрица.

1. Введение

В данной статье исследуются интерполяционные задачи в открытом единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ с границей $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$. Будем обозначать $\mathfrak{h}_s$ множество голоморфности функции s.

Пусть j_{pq} — это $(p+q) \times (p+q)$ матрица вида

$$j_{pq} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Стандартное скалярное произведение в пространстве интегрируемых матричнозначных функции $L_2^{p\times q}$ будем обозначать

$$\langle f, g\rangle_{st} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})^* f(e^{it})\,dt \quad (f, g \in L_2^{p\times q}).$$

Статья поступила в редакцию 14.04.2014

ISSN 1810 – 3200.

Множество $p\times q$-матричнозначных функций с элементами из пространства Харди H_2 (H_∞) будем обозначать $H_2^{p\times q}$ ($H_\infty^{p\times q}$). Определим Π_+, как ортогональный проектор на пространство H_2 соответствующей размерности, а Π_X, как ортогональный проектор на подпространство X. Для самосопряжённого оператора $A = A^*$ будем обозначать $\nu_-(A)$ — размерность наибольшего подпространства, на котором оператор A отрицательный.

Пусть κ — неотрицательное целое число и пусть s — $\mathbb{C}^{p\times q}$-значная функция, мероморфная в области $\mathbb{D}$. Матричнозначная функция s называется принадлежащей *обобщенному классу Шура* $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$, если ядро

$$\mathsf{\Lambda}_\zeta^s(z) = \frac{I_p - s(z)s(\zeta)^*}{1-z\bar{\zeta}} \quad (z,\zeta\in\mathfrak{h}_s) \tag{1.2}$$

имеет κ отрицательных квадратов в $\mathfrak{h}_s\times\mathfrak{h}_s$ (см. [19]). Будем говорить, что эрмитовое ядро $\mathsf{\Lambda}_\zeta(z) : \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{C}^{p\times p}$ имеет κ отрицательных квадратов, если для любых различных $z_j\in\mathbb{D}$ и $u_j\in\mathbb{C}^p$ $(j=1,\dots,n)$ матрица

$$\Big(\big\langle \mathsf{K}_{z_j}(z_k)u_j, u_k\big\rangle\Big)_{j,k=1}^n$$

имеет не более κ отрицательных собственных значений и при некоторых $z_j\in\mathbb{D}$ и $u_j\in\mathbb{C}^p$ ровно κ отрицательных собственных значений.

Отметим, что класс $\mathcal{S}^{p\times q} := \mathcal{S}_0^{p\times q}$ есть обычным классом Шура, то есть классом функций ограниченных по норме единицей. Назовем матричнозначную функцию $s\in\mathcal{S}^{p\times q}$ *внутренней* (соответственно, $*$-*внутренней*), если $s(z)$ является изометрической (соответственно, ко-изометрической) для п.в. $z\in\mathbb{T}$, то есть

$$I_q - s(z)^*s(z) = 0 \quad (\text{соответственно } I_p - s(z)s(z)^* = 0), \quad z\in\mathbb{T}\ (\text{п.в.}).$$

Пусть $\mathcal{S}_{in}^{p\times q}$ ($\mathcal{S}_{*in}^{p\times q}$) определяет множество всех внутренних (соответственно, $*$-внутренних) матричнозначных функций $s\in\mathcal{S}^{p\times q}$.

Для внутренней функции $\theta\in\mathcal{S}_{in}^{q\times q}$ введём два модельных пространства

$$\mathcal{H}(\theta) = H_2^q \ominus \theta H_2^q, \quad \mathcal{H}_*(\theta) = (H_2^q)^\perp \ominus \theta^*(H_2^q)^\perp.$$

Напомним, что классом Смирнова $\mathcal{N}_+^{p\times q}$ называется множество матричнозначных функций вида $h^{-1}s$, где $s\in\mathcal{S}^{p\times q}$, а h — скалярная внешняя функция. Пусть $\kappa\in\mathbb{N}$. Говорят, что матриц-функция F мероморфная в $\mathbb{D}$ принадлежит *обобщенному классу Смирнова* $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$, если она представима в виде

$$F = f + r,$$

где f — функция из обычного класса Смирнова $\mathcal{N}_+^{p\times q}$, а r рациональная матричнозначная функция с полюсной кратностью $\mathcal{M}_\pi(r) = \kappa$ (см. определение 2.1). В частности, обобщённый класс Шура $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ содержится в классе $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$.

Сформулируем интерполяционную задачу поставленную и решенную В. Деркачом и Г. Димом в [12].

Обобщённая задача Шура–Такаги $GSTP_\kappa(K, b)$. Даны внутренняя функция $b \in \mathcal{S}^{q\times q}$, функция $K \in H_\infty^{p\times q}$ и целое число $\kappa \geq 0$. Найти все функции $s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ такие, что

$$(s - K)b^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}. \tag{1.3}$$

Введём операторы $\Gamma : \mathcal{H}_*(b) \to (H_2^p)^\perp$ и $\mathbf{P} : \mathcal{H}_*(b) \to \mathcal{H}_*(b)$, действующие по правилу

$$\Gamma f = \Pi_- K f \quad (f \in H_*(b)), \tag{1.4}$$

$$\mathbf{P} = I - \Gamma^*\Gamma \quad (f \in H_*(b)). \tag{1.5}$$

Теорема 1.1 ([12]). *Для разрешимости задачи* $GSTP_\kappa(K, b)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\nu_-(\mathbf{P}) \leq \kappa,$$

где оператор $\mathbf{P}$ *определяется равенством* (1.5).

Введём оператор

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ I_{\mathcal{H}_*(b)} \end{bmatrix} : \mathcal{H}_*(b) \to (H_2^p)^\perp \oplus \mathcal{H}_*(b)$$

Пусть

$$\mathbf{F}(z) = E(z)\mathbf{F} \quad (z \in \mathfrak{h}_b), \tag{1.6}$$

где E — оператор эвалюоации $E(z) : f \to f(z) \in \mathbb{C}^{p+q}$.

Определим матричнозначную функцию $W(z)$ равенством

$$W(z) = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = I - (1 - z\overline{\zeta})\mathbf{F}(z)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}(\zeta)^* j_{pq} \quad (z, \zeta \in \mathfrak{h}_b \cap \mathbb{T}). \tag{1.7}$$

Как показано в [12] матричнозначные функции φ_{21} и φ_{22} определяющиеся равенством

$$\begin{bmatrix} w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = b^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

голоморфны в $\mathbb{D}$ и факторизация (1.8) является взаимно простой, то есть

$$\ker b(z)^* \cap \ker \begin{bmatrix} \varphi_{21}(z) & \varphi_{22}(z) \end{bmatrix}^* = \{0\}.$$

Теорема 1.2 ([12]). *Пусть оператор* $\mathbf{P}$*, определённый по формуле* (1.5)*, обратим и* $\nu_-(\mathbf{P}) = \kappa$*. Пусть матричнозначная функция* $W(\lambda)$ *определена формулой* (1.7)*. Тогда дробно-линейное преобразование*

$$s = T_W[\varepsilon] = (w_{11}\varepsilon + w_{12})(w_{21}\varepsilon + w_{22})^{-1} \tag{1.9}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством решений задачи $GSTP_\kappa(K, b)$ *и множеством* $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ *таких, что факторизация*

$$w_{21}(z)\varepsilon(z) + w_{22}(z) = b(z)^{-1}\big(\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z)\big) \tag{1.10}$$

является взаимно простой над $\mathbb{D}$*, где* $\varphi_{21}(z)$ *и* $\varphi_{22}(z)$ *определяются равенством* (1.8)*.*

Определение 1.1. *Параметр* $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ *называется исключительным для задачи* $GSTP_\kappa(K, b)$*, если нарушается условие взаимно простоты факторизации* (1.10)*, то есть* $b(z)$ *и* $\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z)$ *имеют общий левый делитель* $\theta \in \mathcal{S}^{q\times q}$*.*

В настоящей работе приведено описание множества исключительных параметров задачи $GSTP_\kappa(K, b)$. Для этого рассматривается вспомогательная обобщенная касательная интерполяционная задача.

Задача $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. Даны матричнозначные функции $\theta \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\varphi_1 \in H_\infty^{q\times p}$, $\varphi_2 \in H_\infty^{q\times r}$. Описать все матричные функции $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$, для которых выполнено условие

$$\theta^{-1}(\varphi_1\varepsilon + \varphi_2)h \in H_2^q \quad (\forall h \in H_2^r). \tag{1.11}$$

В случае, когда $q = p$ и $\varphi_1 \equiv I_q$ задача $GTIP(\theta, I_q, \varphi_2)$ совпадает с касательной интерполяционной задачей, рассмотренной в [2, 16, 22]. В параграфе 4 настоящей статьи приведены различные методы описания решений задачи $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Оказывается, что матричнозначная функция s, соответствующая исключительному параметру ε, уже не удовлетворяет исходной задаче $GSTP_\kappa(K, b)$ и не принадлежит классу $\mathcal{S}^{p\times q}$, но является решением некоторой новой обобщённой касательной интерполяционной задачи.

Теорема 1.3. *Пусть матричнозначные функции* $b \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$*,* $K \in H_\infty^{p\times q}$ *и целое число* $\kappa \geq 0$ *— данные задачи* $GSTP_\kappa(K, b)$*. Пусть* $\nu_-(\mathbf{P}) = \kappa$*, где оператор* $\mathbf{P}$ *определён формулой* (1.5)*. Определим матричнозначные функции* φ_{21} *и* φ_{22} *равенством* (1.8) *и матричнозначную функции* W *равенством* (1.7)*.*

Пусть θ *является левым делителем матричнозначной функций* b*, при этом*

$$b(z) = \theta(z)\widetilde{b}(z), \tag{1.12}$$

и пусть $\deg\theta = \kappa_0 \le \kappa$. *Пусть* $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ *является решением задачи* $GTIP(\theta, \varphi_{21}, \varphi_{22})$, *то есть*

$$\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z) = \theta(z)\psi(z) \tag{1.13}$$

для некоторой $\psi \in H_\infty^{q\times q}$. *Тогда матричнозначная функция* $s = T_W[\varepsilon]$ *вида* (1.9), *принадлежит классу* $\mathcal{S}_{\kappa_1}^{p\times q}$ *и*

$$(s-K)\widetilde{b}^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa-\kappa_0}^{p\times q}, \tag{1.14}$$

где $\kappa_1 \le \kappa - \kappa_0$. *При этом*

$$(s-K)b^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}. \tag{1.15}$$

В случае, когда θ *является наибольшим общим левым делителем* b *и* $\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}$, *то* $\kappa_1 = \kappa - \kappa_0$.

Условие (1.14) можно трактовать как выполнение ровно $\kappa - \kappa_0$ интерполяционных условий для функции $s \in \mathcal{S}_{\kappa-\kappa_0}^{p\times q}$, в то время как (1.15) означает, что не все интерполяционные условия задачи (1.3) выполняются.

Статья организована следующим образом: во 2-ом параграфе даётся описание обобщенных классов Стилтьеса $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ и Смирнова $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$, а также приводится постановка абстрактной интерполяционной задачи в форме [15]. В 3-ем параграфе строится абстрактная интерполяционная задача, соответствующая обобщённой касательной интерполяционной задачи. В 4-ом параграфе приводится два метода описания решений обобщённой касательной интерполяционной задачи: метод универсального расширения, предложенный в [15], и метод дробно-линейного преобразования резольвентной матрицы, предложенный в [4]. В 5-ом параграфе даётся описание исключительных параметров задачи $GSTP_\kappa(K, b)$. Нами показано, что в скалярном случае настоящие результаты полностью совпадают с ранее полученными результатами В. Болотникова (см. [5]). В 6-ом параграфе приведён пример матричной интерполяционной задачи Шура–Такаги и её исключительный параметров.

2. Предварительные сведения

2.1. Обобщенный класс Шура $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$

Произведением Бляшке–Потапова называется матричнозначная функция, определяющаяся формулой

$$b(z) = \prod_{j=1}^{\kappa} b_j(z), \quad b_j(z) = I_q - \Pi_j + \frac{z-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j z}\Pi_j,$$

где $\alpha_j \in \mathbb{D}$, Π_j — ортогональные проекторы в $\mathbb{C}^q$ ($j = 1, \dots, n$). Отметим, что произведение Бляшке–Потапова является внутренней функцией. Множитель b_j называется простым, если $\operatorname{rang} \Pi_j = 1$. Количество простых множителей в произведение Бляшке–Потапова называется *степенью произведения Бляшке–Потапова* $b(z)$ и обозначаются $\deg b$ [23].

Как следует из теоремы Крейна и Лангера [19], любая функция $s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$, принадлежащая обобщенному классу Шура, допускает факторизацию

$$s(z) = b_l(z)^{-1} s_l(z) \quad (z \in \mathfrak{h}_s), \tag{2.1}$$

где b_l — произведение Бляшке–Потапова степени κ, s_l — функция класса Шура $\mathcal{S}^{p\times q}$ и

$$\ker s_l(z)^* \cap \ker b_l(z)^* = \{0\} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{2.2}$$

Такая факторизация (2.1) называется *левой взаимно простой факторизацией* матричнозначной функции s.

Аналогично, любая матриц-функция $s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ из класса Шура допускает *правую взаимно простую факторизацию*

$$s(z) = s_r(z) b_r(z)^{-1} \quad (z \in \mathfrak{h}_s), \tag{2.3}$$

где b_r — произведение Бляшке–Потапова степени κ и $s_r \in \mathcal{S}^{p\times q}$ удовлетворяют условиям

$$\ker s_r(z) \cap \ker b_r(z) = \{0\} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{2.4}$$

В разложениях (2.1) и (2.3) матричнозначные функции b_ℓ и b_r определяются однозначно с точностью до левого, соответственно правого, постоянного унитарного множителя.

Справедливо следующее утверждение (см. [10]) в котором условия (2.2) и (2.4) взаимной простоты факторизаций (2.1) и (2.3) переформулированы в эквивалентном виде.

Предложение 2.1. *Даны матричнозначные функции $s_\ell \in \mathcal{S}^{p\times q}$, $s_r \in \mathcal{S}^{p\times q}$, $b_\ell \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_r \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$. Тогда:*

(i) Факторизация (2.1) является левой взаимно простой, если и только если, существует пара матричнозначных функций $c \in H_\infty^{p\times p}$ и $d \in H_\infty^{q\times p}$ таких, что

$$b_\ell(z)c(z) + s_\ell(z)d(z) = I_p \quad (z \in \mathbb{D}).$$

(ii) Факторизация (2.3) является правой взаимно простой, если и только если, существует пара матричнозначных функций $c \in H_\infty^{q\times q}$ и $d \in H_\infty^{q\times p}$ таких, что

$$c(z)b_r(z) + d(z)s_r(z) = I_q \quad (z \in \mathbb{D}).$$

2.2. Обобщенный класс Смирнова $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$

Полюсная кратность $p \times q$-мероморфной матриц-функции $F(z)$ с полюсами в $\mathbb{D}$, в соответствии с [1], вычисляется по коэффициентам рядов Лорана. А именно, пусть разложение в ряд Лорана функции $F(z)$ в окрестности точки $\alpha \in \mathbb{D}$ имеет вид

$$F(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} F_j (z-\alpha)^j.$$

Определим полюсную кратность функции F в точке α как

$$\mathcal{M}_\pi(F, \alpha) = \operatorname{rang}(F_{-k+i-j})_{i,j=0}^{k-1}.$$

Определение 2.1. Полюсная кратность *мероморфной в единичном круге $p \times q$-матричнозначной функции F равна*

$$\mathcal{M}_\pi(F) = \sum_{\alpha\in\mathbb{D}} \mathcal{M}_\pi(F, \alpha).$$

Для квадратной матричнозначной функции $F(z) \in \mathbb{C}^{q\times q}$ определим *нулевую кратность* соотношением

$$\mathcal{M}_\zeta(F) = \mathcal{M}_\pi(F^{-1}) \quad (\det F(z) \not\equiv 0).$$

Отметим, что степень конечного произведения Бляшке–Потапова $b \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$ совпадает с $\mathcal{M}_\zeta(b)$.

Определение 2.2 (ср. [20] и [12]). *Мероморфную в $\mathbb{D}$ матричнозначную функцию F будем называть принадлежащей обобщенному классу Смирнова $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$, если она представима в виде*

$$F = f + r,$$

где f функция из класса Смирнова $\mathcal{N}_{+}^{p\times q}$, а r — рациональная матричнозначная функция с полюсной кратностью $\mathcal{M}_\pi(r) = \kappa$.

Следующее утверждение показывает иной способ определения функций из обобщенной класса Смирнова $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$.

Предложение 2.2 ([12, Proposition 2.2]). *Пусть F — $p \times q$-матричнозначная функция в мероморфная $\mathbb{D}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(*i*) $F \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$;

(*ii*) *F допускает левую взаимно простую факторизацию*

$$F(z) = b_\ell(z)^{-1} F_\ell(z), \tag{2.5}$$

где $b_\ell \in S_{in}^{p\times p}$, $F_\ell \in \mathcal{N}_+^{p\times q}$, $\mathcal{M}_\zeta(b_\ell) = \kappa$ *и*

$$\ker b_\ell(z)^* \cap \ker F_\ell(z)^* = \{0\} \quad (z \in \mathbb{D});$$

(*iii*) *F допускает правую взаимно простую факторизацию*

$$F(z) = F_r(z) b_r(z)^{-1}$$

где $b_r \in S_{in}^{q\times q}$, $F_r \in \mathcal{N}_+^{p\times q}$, $\mathcal{M}_\zeta(b_r) = \kappa$ *и*

$$\ker F_r(z) \cap \ker b_r(z) = \{0\} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

2.3. Абстрактная интерполяционная задача

Прежде чем формулировать абстрактную интерполяционную задачу дадим определение пространства де Бранжа–Ровняка $\mathcal{B}(\varepsilon)$ (см. [6]).

Пусть $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$. Пространство $\mathcal{B}(\varepsilon)$ состоит из векторнозначных функций $f = \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix} \in H_2^p \oplus (H_2^r)^\perp$ таких, что

$$f(\tau) \in \operatorname{Ran} \begin{bmatrix} I_p & \varepsilon(\tau) \\ \varepsilon(\tau)^* & I_r \end{bmatrix} \quad (\text{ п.в. } \mathbb{T}), \tag{2.6}$$

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\begin{bmatrix} I_p & \varepsilon(\tau) \\ \varepsilon(\tau)^* & I_r \end{bmatrix}^{[-1]} f, f \right)_{\mathbb{C}^{p+r}} d\tau < \infty. \tag{2.7}$$

При этом пространство $\mathcal{B}(\varepsilon)$ является гильбертовым пространством с нормой задающейся формулой (2.7).

Абстрактная интерполяционная задача была поставлена и решена в [15] (см. также [18]) в общем случае её можно сформулировать следующим образом:

Задача $AIP(X, E_1, E_2, T_1, T_2, M_1, M_2, D)$. Пусть X — линейное пространство; E_1 и E_2 — сепарабельные гильбертовы пространства; T_1 и T_2 — линейные операторы в X; M_1 и M_2 — линейные отображения из X в E_1 и E_2, соответственно; D — неотрицательная квадратичная форма на X. Пусть для $f, g \in X$ эти данные связаны соотношением

$$D(T_1 f, T_1 g) - D(T_2 f, T_2 g) = (M_1 f, M_1 g)_{E_1} - (M_2 f, M_2 g)_{E_2}. \tag{2.8}$$

Требуется описать все $[E_1, E_2]$-значные функции ε, являющиеся сжимающими и аналитическими в $\mathbb{D}$, для которых существует линейное отображение $F : X \to \mathcal{B}(\varepsilon)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(C1) $FT_1f = t \cdot FT_2f - \begin{bmatrix} I_{E_1} & \varepsilon \\ \varepsilon^* & I_{E_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_1f \\ M_2f \end{bmatrix}$, при $f \in X$ для п.в. $t \in \mathbb{T}$;

(C2) $\|Ff\|^2_{\mathcal{B}(\varepsilon)} \le D(f, f)$ при $f \in X$.

3. Абстрактная интерполяционная задача, соответствующая GTIP

Сформулируем обобщённую интерполяционную задачу как абстрактную интерполяционную, для этого предпошлём несколько вспомогательных утверждений.

3.1. Уравнение Ляпунова

Введём операторы $N_1 : H_2^p \to \mathcal{H}(\theta)$ и $N_2 : H_2^r \to \mathcal{H}(\theta)$ действующие по правилу

$$N_1x = \Pi_{\mathcal{H}(\theta)}\varphi_1 x, \quad N_2y = -\Pi_{\mathcal{H}(\theta)}\varphi_2 y \quad (x \in H_2^p,\ y \in H_2^r). \tag{3.1}$$

Тогда операторы $N_1^* : \mathcal{H}(\theta) \to H_2^p$ и $N_2^* : \mathcal{H}(\theta) \to H_2^r$ действуют по правилу

$$N_1^*f = \Pi_+\varphi_1^*f, \quad N_2^*f = -\Pi_+\varphi_2^*f \quad (f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{3.2}$$

Обозначим

$$Pf = (N_1N_1^* - N_2N_2^*)f, \tag{3.3}$$

для $f \in \mathcal{H}(\theta)$.

Введём в пространстве $\mathcal{H}(\theta)$ скалярное произведение по правилу

$$(f, g)_{\mathcal{H}(\theta)} = \big\langle (N_1N_1^* - N_2N_2^*)f,\, g\big\rangle_{st} = \langle Pf,\, g\rangle_{st}. \tag{3.4}$$

Введём операторы $M_1 : \mathcal{H}(\theta) \to \mathbb{C}^p$ и $M_2 : \mathcal{H}(\theta) \to \mathbb{C}^r$ по правилу

$$M_1f = (N_1^*f)(0), \quad M_2f = (N_2^*f)(0) \quad (f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{3.5}$$

Пусть оператор $T_\theta : \mathcal{H}(\theta) \to \mathcal{H}(\theta)$ — это оператор сдвига в пространстве $\mathcal{H}(\theta)$, тогда оператор T_θ^* является оператором обратного сдвига в этом пространстве.

Лемма 3.1. *Справедливы тождества*

$$N_j^*T_\theta^* = T^*N_j^* \quad (j = 1, 2), \tag{3.6}$$

где оператор T — это оператор сдвига в пространстве H_2^p или H_2^r, соответственно, при $j = 1, 2$.

Доказательство. Докажем, сначала, равенство (3.6) при $j = 1$.

Пусть $f, g \in \mathcal{H}(\theta)$. Тогда по определению оператора N_1

$$\begin{aligned}\langle N_1^* T_\theta^* f,\, g\rangle_{st} &= \langle \Pi_+ \varphi_1^* T_\theta^* f,\, g\rangle_{st}\\ &= \langle \varphi_1^* T_\theta^* f,\, g\rangle_{st} = \langle \varphi_1(\lambda)^* f(\lambda),\, \lambda g(\lambda)\rangle_{st}\\ &= \langle \Pi_+ \varphi_1^*(\lambda) f(\lambda),\, \lambda g(\lambda)\rangle_{st} = \langle T^* N_1^* f,\, g\rangle_{st}.\end{aligned}$$

Значит, действительно, $N_1^* T_\theta^* = T^* N_1^*$.

Аналогично доказывается равенство (3.6) при $j = 2$. □

Следствие 3.1. *Из равенств* (3.6) *также следуют тождества*

$$T_\theta N_j = N_j T \quad (j = 1, 2). \tag{3.7}$$

Лемма 3.2. *Оператор P, определённый равенством* (3.3), *и операторы M_1, M_2, определённые равенствами* (3.5) *удовлетворяет уравнению Ляпунова*

$$P - T_\theta P T_\theta^* = M_1^* M_1 - M_2^* M_2. \tag{3.8}$$

Доказательство. Действительно для любых $f, g \in \mathcal{H}(\theta)$, пользуясь определением пространства $\mathcal{H}$ и применяя тождества (3.6) и (3.7), получим следующую цепочку преобразований

$$\begin{aligned}&\langle Pf,\, g\rangle_{st} - \langle T_\theta P T_\theta^* f,\, g\rangle_{st}\\ &\quad= \langle (N_1 N_1^* - N_2 N_2^*) f,\, g\rangle_{st} - \langle (N_1 N_1^* - N_2 N_2^*) T_\theta^* f,\, T_\theta^* g\rangle_{st}\\ &\quad= \langle (N_1 N_1^* - N_2 N_2^*) f,\, g\rangle_{st} - \big\langle \big(N_1 (TT^*) N_1^* - N_2 (TT^*) N_2^*\big) f,\, g\big\rangle_{st}\\ &\quad= \big\langle \big(N_1 (I - TT^*) N_1^* - N_2 (I - TT^*) N_2^*\big) f,\, g\big\rangle_{st}\\ &\quad= \langle (M_1^* M_1 - M_2^* M_2) f,\, g\rangle_{st}\,.\end{aligned}$$

Следовательно, P удовлетворяет уравнению Ляпунова (3.8). □

Предложение 3.1. *Уравнение Ляпунова* (3.8) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Обозначим оператор T_θ как T. Пусть уравнение Ляпунова (3.8) имеет решения P_1 и P_2. Пусть $\widetilde{P} = P_1 - P_2$. Тогда

$$\widetilde{P} = T \widetilde{P} T^*. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) само в себя получим, что

$$\widetilde{P} = T^n \widetilde{P} (T^*)^n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{3.10}$$

Из [21, стр. 66] следует, что $(T^*)^n \xrightarrow{s} 0$ и $\|T^*\| \le 1$. Тогда (3.10) означает, что $\widetilde{P} = 0$, то есть $P_1 = P_2$. □

Из уравнения Ляпунова (3.8) следует, что при условии $P \geq 0$ данные $(\mathcal{H}(\theta), \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^r, I, T^*_\theta, M_1, M_2, P)$ удовлетворяют соотношению (2.8). Следовательно, мы можем сформулировать абстрактную интерполяционную задачу, соответствующую $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Задача $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. Даны матричные функции $\theta \in \mathcal{S}^{q\times q}_{in}$, $\varphi_1 \in H^{q\times p}_\infty$, $\varphi_2 \in H^{q\times r}_\infty$. Пусть T^* — это оператор обратного сдвига в пространстве $\mathcal{H}(\theta)$, операторы M_1, M_2 определены равенством (3.5), оператор P задаётся формулой (3.3). Описать все функции $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$, для которых существует линейное отображение $F : \mathcal{H}(\theta) \to \mathcal{B}(\varepsilon)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(C1) $Ff = t \cdot FT^*f - \begin{bmatrix} I_p & \varepsilon \\ \varepsilon^* & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_1 f \\ M_2 f \end{bmatrix}$, при $f \in \mathcal{H}(\theta)$ для п.в. $t \in \mathbb{T}$;

(C2) $||Ff||^2_{\mathcal{B}(\varepsilon)} \leq \langle Pf, f\rangle_{st}$ при $f \in \mathcal{H}(\theta)$.

Замечание 3.1. Задача $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ разрешима тогда и только тогда, когда оператор P, определённый формулой (3.3), является неотрицательным оператором в пространстве $\mathcal{H}(\theta)$. Поэтому всюду в дальнейшем будем считать, что $P \geq 0$.

3.2. Эквивалентность GTIP и AIP'

Теорема 3.1. *Пусть операторы N_1, N_2 определяются формулами* (3.1). *Если функция $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$ является решением задачи $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, то соответствующее ей отображение $F : \mathcal{H}(\theta) \to \mathcal{B}(\varepsilon)$ единственно, и задаётся формулой*

$$Ff = \begin{bmatrix} I_r & \varepsilon \\ \varepsilon^* & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^* f \\ -N_2^* f \end{bmatrix} \quad (\forall\, f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть

$$Ff = t \cdot FT^*f - \begin{bmatrix} I_p & \varepsilon \\ \varepsilon^* & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_1 f \\ M_2 f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_+ f \\ F_- f. \end{bmatrix}$$

Рассмотрим аналитическое продолжение $Ff(\cdot)$ в $\mathbb{D}$. Из соотношения $(C1)$ следует, что

$$(F_+ f)(z) - z(F_+ T^* f)(z) = M_1 f - \varepsilon(z) M_2 f \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{3.12}$$

Подставим в (3.12) $f = (I - \zeta T^*)^{-1} g$, где $g \in \mathcal{H}(\theta)$ и $\zeta \in \mathbb{D}$, получим

$$F_+(I - \zeta T^*)^{-1} g - z F_+ T^* (I - \zeta T^*)^{-1} g = (M_1 - \varepsilon(z) M_2)(I - \zeta T^*)^{-1} g.$$

Следовательно

$$z(F_+g)(z)+(\zeta-z)\big(F_+(I-\zeta T^*)^{-1}g\big)(\zeta)=\zeta(M_1-\varepsilon(z)M_2)(I-\zeta T^*)^{-1}g.$$

Подставляя $\zeta=z$ получаем, что

$$(F_+g)(z)=(M_1-\varepsilon(z)M_2)(I-zT^*)^{-1}g. \tag{3.13}$$

Пользуясь соотношением (3.6) получаем, что

$$\begin{aligned} M_1(I-zT^*)^{-1}g&=E_0N_1^*(I-zT^*)^{-1}g\\ &=E_0(I-zT_+^*)^{-1}N_1^*g=(N_1^*g)(z). \end{aligned}$$

Аналогично, получаем что

$$M_2(I-zT^*)^{-1}g=(N_2^*g)(z).$$

Подставляя последние равенства в соотношение (3.13), получаем что

$$(F_+g)(z)=(N_1^*g)(z)-\varepsilon(z)(N_2^*g)(z).$$

Аналогично показывается, что $(F_-g)(z)=\varepsilon^*(z)(N_1^*g)(z)-(N_2^*g)(z)$. □

Теорема 3.2. *Множество решений задач $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ и $AIP'(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ совпадают.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть матричнозначная функция ε принадлежит классу $\mathcal{S}^{p\times r}$. Рассмотрим отображение $F=\begin{bmatrix} F_+\\ F_-\end{bmatrix}$ заданное формулой (3.11).

Отметим, что F_+f принадлежит H_2^p при любом $f\in\mathcal{H}(\theta)$. Действительно, из соотношений (3.2) следует, что

$$F_+f=\Pi_+\varphi_1^*f+\varepsilon\Pi_+\varphi_2^*f\in H_2^p.$$

Теперь рассмотрим условия принадлежности F_-f пространству $(H_2^r)^\perp$. Из соотношений (3.2) следует, что

$$F_-f=\varepsilon^*\Pi_+\varphi_1^*f+\Pi_+\varphi_2^*f. \tag{3.14}$$

Принадлежность функции F_-f пространству $(H_2^r)^\perp$ означает, что

$$\Pi_+F_-f=\Pi_+(\varepsilon^*\Pi_+\varphi_1^*f+\Pi_+\varphi_2^*f)=0.$$

Перепишем это равенство в сопряжённом виде

$$\Pi_{\mathcal{H}(\theta)}(\varphi_1\varepsilon+\varphi_2)\Pi_+=0. \tag{3.15}$$

Соотношение (3.15) соответствует условию (1.11) задачи $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Шаг 2. Пусть функция $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$ — решение $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$. Из формулы (3.11) следует, что отображение F удовлетворяет условию $(C1)$ задачи $AIP'(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$. Также из доказанного в шаге 1 следует, что отображение F действует в пространство $H_2^p \oplus (H_2^r)^\perp$.

Чтобы функция ε была решением задачи $AIP'(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ осталось показать справедливость условия $(C2)$. Действительно, при любом $f \in \mathcal{H}(\theta)$ выполнено соотношение

$$
\begin{aligned}
(Ff,Ff)_{\mathcal{B}(\varepsilon)} &= \int\limits_{\mathbb{T}} \left\langle \begin{bmatrix} I_p & \varepsilon \\ \varepsilon^* & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^* f \\ -N_2^* f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_1^* f \\ -N_2^* f \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)}} d\tau \\
&= \langle N_1^* f - \varepsilon N_2^* f, N_1^* f\rangle_{st} + \langle \varepsilon^* N_1^* f - N_2^* f, -N_2^* f\rangle_{st}. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Так как $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$ — решение $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$, то из равенства (3.15) следует, что второе слагаемое в правой части равенства (3.16) равно 0. Тогда равенство (3.16) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
(Ff,Ff)_{\mathcal{B}(\varepsilon)} &= \langle N_1^* f, N_1^* f\rangle_{st} - \langle \varepsilon N_2^* f, N_1^* f\rangle_{st} \\
&= \langle N_1 N_1^* f, f\rangle_{st} - \langle N_2^* f, \varepsilon^* N_1 f\rangle_{st}.
\end{aligned}
$$

Снова воспользуемся соотношением (3.15) для второго слагаемого, получим что

$$
(Ff,Ff)_{\mathcal{B}(\varepsilon)} = \langle N_1 N_1^* f, f\rangle_{st} - \langle N_2 N_2^* f, f\rangle_{st} = \langle Pf, f\rangle_{st}.
$$

Таким образом условие $(C2)$ показано.

Шаг 3. Пусть функция ε — решение $AIP'(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$. Тогда по теореме 3.1 отображение $F = \begin{bmatrix} F_+ \\ F_- \end{bmatrix}$ заданное формулой (3.11) действует в пространство $\mathcal{B}(\varepsilon)$. Следовательно функция F_- действует в пространство $(H_2^r)^\perp$, что является эквивалентным (см. шаг 1) условию (1.11) задачи $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ □

Замечание 3.2. Отметим, что в ходе доказательства теоремы 3.2 мы показали, что для абстрактной интерполяционной задачи, построенной по данным обобщённой касательной проблемы, выполняется равенство Парсеваля

$$
\|Ff\|^2_{\mathcal{B}(\varepsilon)} = \langle Pf, f\rangle_{st} \quad (f \in \mathcal{H}(\theta)) \qquad (3.17)
$$

4. Решение обобщённой касательной интерполяционной задачи

4.1. Метод универсального расширения

Понятие универсального расширения изометрического оператора было введено в работе [3]. Метод универсального расширения для описания решений абстрактной интерполяционной задачи применили В. Э. Кацнельсон, А. Я. Хейфец и П. М. Юдицкий в своей статье [15]. На этом методе основано следующее описание решений задачи $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Рассмотрим оператор $V : \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^r \to \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^p$, действующий по правилу

$$V : d_V = \begin{bmatrix} f \\ M_2 f \end{bmatrix} \to \Delta_V = \begin{bmatrix} T_\theta^* f \\ M_1 f \end{bmatrix} \quad (f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{4.1}$$

Предложение 4.1. *Из уравнения Ляпунова* (3.8) *следует, что оператор V, определённый формулой* (4.1)*, является изометрическим оператором.*

Обозначим дефектные подпространства оператора V как

$$N_{d_V} = \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^r \ominus d_V, \quad N_{\Delta_V} = \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^p \ominus \Delta_V.$$

Числа $d_1 = \dim N_{d_V}$ и $d_2 = \dim N_{\Delta_V}$ называются *рангами неопределённости* задачи $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Предложение 4.2. *Дефектные подпространства для оператора V имеют вид*

$$\begin{aligned} N_{d_V} &= \left\{ \begin{bmatrix} g \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^r : \ Pg + \Pi_+ \varphi_2^* u = 0 \right\}, \\ N_{\Delta_V} &= \left\{ \begin{bmatrix} g \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^p : \ PT_\theta^* g - \Pi_+ \varphi_1^* u = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Доказательство. Вектор $\left[\begin{smallmatrix} g \\ u \end{smallmatrix}\right]$ принадлежит дефектному подпространству N_{d_V} если выполнено условие

$$\langle Pg, f \rangle_{st} + (u, M_2 f)_{\mathbb{C}^r} = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{4.3}$$

Воспользуемся определениями операторов M_2 и N_2, отождествляя константу u с постоянной функцией, преобразуем левую часть равенства (4.3)

$$\begin{aligned}\langle Pg, f\rangle_{st} + (u, M_2 f)_{\mathbb{C}^r} &= \langle Pg, f\rangle_{st} + \big(u, (N_2^* f)(0)\big)_{\mathbb{C}^r}\\ = \langle Pg, f\rangle_{st} + \big(u, (\Pi_+\varphi_2^* f)(0)\big)_{\mathbb{C}^r} &= \langle Pg, f\rangle_{st} + \langle u, \Pi_+\varphi_2^* f\rangle_{st}\\ &= \langle Pg + \varphi_2 u, f\rangle_{st} = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, так как $\mathcal{H}(\theta) \subset H_2^q$, то соотношение (4.3) эквивалентно

$$Pg + \Pi_+\varphi_2 u = 0.$$

Таким образом, первое из равенств (4.2) доказано. Аналогично, показывается справедливость второго равенства. □

Следствие 4.1. *Если оператор P, заданный равенством* (3.3)*, обратим, то ранг неопределённости d_1 задачи $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ максимален, то есть*

$$d_1 = \dim N_{d_V} = r.$$

Далее мы покажем, что в случае обратимости оператора P, второй ранг неопределённости d_2 также максимален (см. следствие 4.2).

Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — копии дефектных пространств N_{d_V} и N_{Δ_V}, соответственно. Введём оператор

$$A : \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2 = d_V \oplus N_{d_V} \oplus \mathcal{L}_2 \to \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1 = \Delta_V \oplus N_{\Delta_V} \oplus \mathcal{L}_1,$$

являющийся унитарным расширением изометрического оператора V, задающийся формулой

$$A{\restriction}_{d_V} = V, \quad A{\restriction}_{N_{d_V}} = id : N_{d_V} \to \mathcal{L}_1 \quad A{\restriction}_{\mathcal{L}_2} = id : \mathcal{L}_2 \to N_{\Delta_V},$$

где id обозначает отображения отождествления.

Пусть $S : \mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2 \to \mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1$ — это оператор рассеяния унитарного оператора A, определённый формулой (см. [18])

$$S(z) = \Pi_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1}(I - zA\Pi_{\mathcal{H}(\theta)})^{-1} A{\restriction}_{\mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2}. \tag{4.4}$$

Следующее описание решений абстрактной интерполяционной задачи было дано в [16] (см. также [15]).

Теорема 4.1. *Пусть $P \geq 0$, где оператор P задан равенством* (3.3)*. Тогда множество всех решений задачи $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ параметризуется сжимающими матричнозначными функциями $\omega \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, где $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ — дефектные подпространства изометрии V, построенной по формуле* (4.1)*. А именно, для любой функции $\omega \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$ решение $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ определяется по формуле*

$$\varepsilon = \Pi_{\mathbb{C}^p}(I_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1} - S{\restriction}_{\mathcal{L}_2}\omega\Pi_{\mathcal{L}_1})^{-1} S{\restriction}_{\mathbb{C}^r}, \tag{4.5}$$

где S — оператор рассеяния, определённый по формуле (4.4)*.*

Замечание 4.1. Используя блочное представление для оператора рассеяния S

$$S = \begin{bmatrix} s_0 & s_2 \\ s_1 & s \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathbb{C}^r \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbb{C}^p \\ \mathcal{L}_1 \end{bmatrix},$$

формулу (4.5) можно переписать в виде

$$\varepsilon = s_0 + s_2(I_{\mathcal{L}_2} - \omega s)^{-1}\omega s_1. \tag{4.6}$$

4.2. Случай $0 \in \rho(P)$.

Как показано в [17, теорема 1] из равенства Парсеваля (3.17) следует

Предложение 4.3. *В условиях теоремы* (4.1)*:*

(*i*) *выполняются следующие эквивалентные утверждения*

$$\operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1} - SS^*) = \operatorname{rang}(I_p - s_0 s_0^*) - \dim N_{\Delta_V} \quad (\text{п.в. на } \mathbb{T}), \tag{4.7}$$

$$\operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2} - S^*S) = \operatorname{rang}(I_r - s_0^* s_0) - \dim N_{d_V} \quad (\text{п.в. на } \mathbb{T}); \tag{4.8}$$

(*ii*) *для любого параметра* $\omega \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$ *и соответствующего ему решения* ε *задачи* $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ *имеют место соотношения*

$$\operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1} - SS^*) = \operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^p} - \varepsilon\varepsilon^*) - \operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^p} - \omega\omega^*), \tag{4.9}$$

$$\operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2} - S^*S) = \operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^r} - \varepsilon^*\varepsilon) - \operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^p} - \omega^*\omega). \tag{4.10}$$

Из равенств (4.7)-(4.8) следует, что $\dim N_{d_V} \le r$, $\dim N_{\Delta_V} \le p$.

Следствие 4.2. *Если оператор P, заданный равенством* (3.3)*, удовлетворяет условиям $P \ge 0$ и*

$$0 \in \rho(P), \tag{4.11}$$

то оба ранга неопределённости d_1, d_2 задачи $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ максимальны, то есть

$$d_1 = \dim N_{d_V} = r, \quad d_2 = \dim N_{\Delta_V} = p.$$

Доказательство. Следствие 4.1 означает, что

$$\dim \mathcal{L}_1 = \dim N_{d_V} = r.$$

Подставляя этот результат в равенство (4.7) получим, что $\operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^{p+r}} - SS^*) = 0$, то есть $I_{\mathbb{C}^{p+r}} = SS^*$. Следовательно,

$$r + \dim \mathcal{L}_2 = \dim \operatorname{dom} S \ge p + r.$$

Но из формулы (4.7) следует, что $d_2 = \dim \mathcal{L}_2 \le p$, значит $d_2 = p$. $\square$

Следствие 4.3. *Если оператор P, заданный равенством* (3.3), *удовлетворяет условиям $P \geq 0$ и* (4.11) *то оператор рассеяния S — внутренняя функция, то есть*

$$I_{p+r} - SS^* = I_{r+p} - S^*S = 0 \quad (\text{п.в. на } \mathbb{T}). \tag{4.12}$$

Объединяя результаты (4.9), (4.10) и (4.12), мы получаем в случае обратимости оператора P классическую теорему Неванлинны–Адамяна–Арова–Крейна для задачи $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ (см. [1]).

Теорема 4.2. *Пусть оператор $P \geq 0$, заданный равенством* (3.3), *и удовлетворяет условию* (4.11). *Тогда решение ε задачи $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ является внутренней ($*$-внутренней) матричнозначной функцией, если и только если соответствующий параметр $\omega \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$ в формуле* (4.6) *также является внутренней ($*$-внутренней) функцией.*

4.3. Описание решений с помощью резольвентой матрицы

При некоторых дополнительных условиях на данные задачи $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ формула (4.6) может быть заменена дробнолинейным преобразованием, порождённым некоторой матричнозначной функцией. В случае касательной и бикасательной интерполяционной проблемы такое преобразование использовалось в работах [2, 22], а в скалярном случае ($p = q = 1$) ещё ранее в [1].

В данном пункте мы усилим условие (4.11) на оператор $P \geq 0$, предположив в дальнейшем, что

$$0 \in \rho(P), \quad 1 \in \mathfrak{h}_\theta. \tag{4.13}$$

Первое из условий (4.13) означает, что пространство $\mathcal{H}(\theta)$ со скалярным произведением, определённым по формуле (3.4), является гильбертовым. Второе условие означает, что для оператора V, определённого формулой (4.1), точка $z = 1$ является точкой регулярного типа, и справедливо разложение

$$\operatorname{ran}(1 - \Pi_{\mathcal{H}(\theta)} V) \dotplus \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{C}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\theta) \\ \mathbb{C}^q \end{bmatrix},$$

что в свою очередь эквивалентно условию $1 \in \rho(T_\theta^*)$.

Как показано в [4] множество решений абстрактной интерполяционной задачи $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ описывает следующая

Теорема 4.3. *Пусть данные $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ удовлетворяют условиям* (4.13) *и $P \geq 0$, где оператор P, определён формулой* (3.3).

Пусть матричнозначная функция $U(z) = \begin{bmatrix} u_{11}(z) & u_{12}(z) \\ u_{21}(z) & u_{22}(z) \end{bmatrix} : \mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)} \to \mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)}$ *задана равенством*

$$U(z) = I - (1-z) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} (I - zT_\theta^*)^{-1} P^{-1} (I - T_\theta^*)^{-*} \begin{bmatrix} M_1^* & -M_2^* \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Тогда формула

$$\varepsilon = T_U[\omega] = (u_{11}\omega + u_{12})(u_{21}\omega + u_{22})^{-1} \quad (4.15)$$

даёт описание всех решений интерполяционной задачи, когда ω *пробегает класс* $\mathcal{S}^{p\times r}$.

Замечание 4.2. Преимущество формулы (4.15) состоит в том, что в (4.14) предъявлена явная формула для резольвентной матрицы U интерполяционной задачи $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, хотя и при более ограничительных условиях (4.13). При этом в работе [4] формула (4.15) доказана в индефинитной случае, методом абстрактной интерполяционной задачи (см. [8]).

4.4. Максимум энтропии

Как известно большой класс задач, чьи решения можно описать дробно-линейным преобразованием функций из класса Шура $\mathcal{S}^{p\times r}$ допускает единственное решение, у которого максимален ζ-энтропийный интеграл

$$\mathbf{E}_\zeta(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \ln\det(I - \varepsilon(e^{it})\varepsilon(e^{it})^*)\, d\sigma_\zeta(t), \quad (4.16)$$

где $\zeta \in \mathbb{D}$ и $d\sigma_\zeta(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|\zeta|^2}{|e^{it}-\zeta|^2}dt$ (подробнее см. [14, Section 11]). Для задачи $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ имеет место следующее утверждение

Теорема 4.4. *Пусть данные* $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ *удовлетворяют условиям* (4.13) *и* $P \geq 0$, *где оператор* P *определён формулой* (3.3). *Пусть матричнозначная функция* $U(\lambda) : \mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)} \to \mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)}$ *задана равенством* (4.14), *и решение* $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$ *задачи* $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ *определяется формулой* (4.15) *для некоторой функции* $\omega \in \mathcal{S}^{p\times r}$. *Тогда для любой фиксированной точки* $\zeta \in \mathbb{D} \bigcap \mathfrak{h}_{u_{22}}$

$$\mathbf{E}_\zeta(\varepsilon) \leq \ln\det\bigl(u_{22}(\zeta)u_{22}(\zeta)^* - u_{21}(\zeta)u_{21}(\zeta)^*\bigr). \quad (4.17)$$

При этом равенство в формуле (4.17) *достигается тогда и только тогда, когда*

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_{\max}(z) \\ = \big(u_{11}(z)u_{21}(\zeta)^* - u_{12}(z)u_{22}(\zeta)^*\big)\big(u_{21}(z)u_{21}(\zeta)^* \\ - u_{22}(z)u_{22}(\zeta)^*\big)^{-1}. \quad (4.18)$$

Таким образом равенство в формуле (4.17) *достигается, если решение* ε *соответствует в формуле* (4.15) *параметру*

$$\omega(z) = \omega_{\max}(z) \equiv -u_{21}(\zeta)^* u_{22}(\zeta)^{-*} \quad (4.19)$$

Доказательство. Формула (4.17) следует из описания решений задачи $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ в виде дробно-линейного преобразования (4.15). Как показано в [14, Theorem 11.1] энтропийный интеграл (4.16) достигает максимума в случае, если ε принимает вид (4.18), что соответствует значению параметра $\omega(z) \equiv -w_{21}(\zeta)^* w_{22}(\zeta)^{-*}$ в формуле (4.15). □

5. Исключительные параметры

5.1. Классификация исключительных параметров

Вернёмся к рассмотрению обобщённой задачи Шура–Такаги (1.3). Введём следующую классификацию множества исключительных параметров задачи $GSTP_\kappa(K, b)$. Пусть θ — левый делитель b ($\theta \not\equiv I$). Положим

$$E(\theta) = \Big\{\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q} : \ \theta^{-1}(\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}) \in H_\infty^{q\times q}\Big\}.$$

Если $\varepsilon \in E(\theta)$, то полагая

$$\psi = \theta^{-1}(\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}),$$

получим

$$\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22} = \theta\psi,$$

то есть θ является левым делителем $\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}$. Так как θ — нетривиальный левый делитель b, то это означает, что факторизация (1.10) не является взаимно простой.

С другой стороны, всякий исключительный параметр ε попадает в один из классов $E(\theta)$ при некотором выборе левого делителя θ матричнозначной функции b.

Действительно, если факторизация (1.10) не является взаимно простой, то существуют $z_0 \in \mathbb{D}$ и $h_0 \in \mathbb{C}^p$ ($\|h_0\| = 1$) такие, что

$$h_0^* b(z_0) = h_0^*\big(\varphi_{21}(z_0)\varepsilon(z_0) + \varphi_{22}(z_0)\big) = 0,$$

и следовательно обе матриц-функции $b(z)$ и $\varphi_{21}(z)\varepsilon(z)+\varphi_{22}(z)$ имеют общий левый делитель

$$\theta(z)=\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\Pi_{h_0}+I-\Pi_{h_0},$$

где $\Pi_{h_0}=h_0h_0^*$ — ортопроектор на подпространство $\operatorname{span}\{h_0\}$ в $\mathbb{C}^p$. То есть, $\varepsilon\in E(\theta)$.

Замечание 5.1. Множество всех исключительных параметров задачи $GSTP_\kappa(K,b)$ является объединением множеств $E(\theta)$, где θ левый делитель b. При этом множество $E(\theta)$ является множеством решений задачи $GTIP(\theta,\varphi_{21},\varphi_{22})$.

Лемма 5.1 ([11])**.** *Пусть* $G\in\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$ *и пусть* $b_1\in H_\infty^{p\times p}$, $b_2\in H_\infty^{q\times q}$ *матричнозначные функции, такие что*

$$\mathcal{M}_\pi(b_1G)=\mathcal{M}_\pi(G).$$

Тогда

$$\mathcal{M}_\pi(b_1Gb_2)=\mathcal{M}_\pi(Gb_2).$$

Обратно, если

$$\mathcal{M}_\pi(Gb_2)=\mathcal{M}_\pi(G),$$

то

$$\mathcal{M}_\pi(b_1Gb_2)=\mathcal{M}_\pi(b_1G).$$

Лемма 5.2 ([12, Theorem 4.2])**.** *Матричнозначная функция W, определённая формулой* (1.7)*, допускает взаимно простую факторизацию*

$$W=\Theta\,\Phi,\quad \text{где } \Theta=\begin{bmatrix} I & Kb^{-1}\\ 0 & b^{-1}\end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

и $\Phi^{\pm1}\in H_2$.

Пусть матричнозначная функция $\Phi=\left[\begin{smallmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{smallmatrix}\right]$, определена из факторизации (5.1). Определим матричнозначные функции

$$H=\varphi_{11}\varepsilon+\varphi_{12},\quad G=\varphi_{21}\varepsilon+\varphi_{22}. \tag{5.2}$$

Лемма 5.3 ([12, Lemma 5.5])**.** *Пусть матричнозначная функция W, определённая формулой* (1.7)*, допускает факторизацию* (5.1)*. Пусть $\nu_-(\mathbf{P})=\kappa$, где оператор $\mathbf{P}$ определен формулой* (1.5)*. Пусть матричнозначная функция $s=T_W[\varepsilon]$, определена дробно-линейным преобразованием* (1.9)*. Тогда матричнозначная функция $(s-K)b^{-1}$ допускает взаимно простую факторизацию*

$$(s-K)b^{-1}=HG^{-1}, \tag{5.3}$$

где функции H и G определены формулой (5.2)*. При этом $H\in\mathcal{N}_+^{p\times q}$, $G\in\mathcal{N}_{+,\kappa}^{q\times q}$.*

5.2. Доказательство теоремы 1.3

Шаг 1. Покажем, что $s \in S_{\kappa_1}^{p\times q}$. Из взаимно простой факторизации (5.3) следует, что

$$\mathcal{M}_\pi(HG^{-1}) = \mathcal{M}_\pi(G^{-1}) = \kappa.$$

Тогда из леммы 5.1 следует, что

$$\mathcal{M}_\pi(HG^{-1}b) = \mathcal{M}_\pi(G^{-1}b).$$

Далее, так как $HG^{-1}b = s - K$ и $G^{-1}b = \psi^{-1}\widetilde{b}$ (см. формулы (5.3), (1.13) и (1.12)), то

$$\mathcal{M}_\pi(s) = \mathcal{M}_\pi(s-K) = \mathcal{M}_\pi(\psi^{-1}\widetilde{b}) \leq \kappa - \kappa_0.$$

В случае, когда θ, является наибольшим общим делителем b и $\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}$, получаем, что

$$\mathcal{M}_\pi(s) = \mathcal{M}_\pi(\psi^{-1}\widetilde{b}) = \kappa - \kappa_0.$$

Шаг 2. Покажем, что $(s-K)\widetilde{b}^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa-\kappa_0}^{p\times q}$. Заметим, что

$$(s-K)\widetilde{b}^{-1} = HG^{-1}\theta.$$

Снова, по лемме 5.1

$$\mathcal{M}_\pi(HG^{-1}\theta) = \mathcal{M}_\pi(G^{-1}\theta).$$

Следовательно, так как θ делитель G,

$$\mathcal{M}_\pi\big((s-K)\widetilde{b}^{-1}\big) = \mathcal{M}_\pi(G^{-1}\theta) = \kappa - \kappa_0.$$

Шаг 3. Принадлежность $(s-K)b^{-1}$ классу $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$ следует из леммы (5.3).

5.3. Классификация исключительных параметров в скалярном случае

Результат, полученный в теореме 1.3, в одномерном случае сводится к известному результату В. Болотникова ([5]). В [5] рассматривается следующая *одномерная* индефинитная задача Каратеодори–Фейера.

***Задача** CF_κ.* Пусть κ — неотрицательное целое число. Дано k различных точек $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{D}$ и неотрицательных целых чисел $n_1, \ldots, n_k$, и $N := \sum_{i=1}^{k} n_i$ комплексных чисел $s_{i,j}$ $(0 \leq j \leq n_i - 1;$

$1 \le i \le k$). Найти все функции $s \in \mathcal{S}_\kappa$, которые аналитичны в точках z_i и удовлетворяют условиям

$$s^{(j)}(z_i) = j! s_{i,j} \quad (i = 1, \dots, k;\ j = 0, \dots, n_i - 1). \tag{5.4}$$

Другими словами, найти все функции $s \in \mathcal{S}_\kappa$, у которых разложение в ряд Тейлора в точках z_i имеет вид

$$s(z) = s_{i,0} + (z - z_i) s_{i,1} + \dots + (z - z_i)^{n_i - 1} s_{i,n_i-1} + o\big((z - z_i)^{n_i - 1}\big)$$

для $i = 1, \dots, k$.

Введём несколько условных обозначений.

Пусть $J_n(\alpha)$ — Жорданова одноклеточная матрица размера $n \times n$

$$J_n(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \alpha & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

По начальным условиям построим матрицы

$$\widehat{T} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(z_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(z_k) \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{n_1} & \cdots & L_{n_k} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_k \end{bmatrix},$$

где L_{n_i} и C_i — вектор строки длины n_i вида

$$L_{n_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} s_{i,0} & s_{i,1} & \cdots & s_{i,n_i-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\widehat{P}$ — матрица Пика определённая по правилу

$$\widehat{P} = \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{T}^*)^k (L^* L - C^* C) \widehat{T}^k. \tag{5.5}$$

Так как $|z_i| < 1$, то ряд (5.5) сходится и матрица Пика P является решением уравнения Ляпунова–Стейна

$$\widehat{P} - \widehat{T}^* \widehat{P} \widehat{T} = L^* L - C^* C. \tag{5.6}$$

Пусть матрица $\widehat{W}(z) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ вычисляется по формуле

$$\widehat{W}(z) = I_2 + (1 - z) \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} (zI - \widehat{T})^{-1} \widehat{P}^{-1} (I - \widehat{T}^*)^{-1} \begin{bmatrix} -C^* & L^* \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Определим матричнозначную функцию Ω равенством

$$\Omega(z) := \begin{bmatrix} \Omega_{11}(z) & \Omega_{12}(z) \\ \Omega_{21}(z) & \Omega_{22}(z) \end{bmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{n_i} \right) \widehat{W}(z). \tag{5.8}$$

Теорема 5.1 ([5])**.** *Пусть матрица Пика* $\widehat{P}$ *задачи* CF_κ (5.4) *невырождена и имеет* κ *отрицательных квадратов. Пусть матриц-функция* Ω *построена по формуле* (5.8)*. Тогда все решения* s *задачи* (5.4) *параметризуются формулой*

$$s(z) = T_\Omega[\varepsilon], \tag{5.9}$$

где параметр $\varepsilon \in \mathcal{S}$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Omega_{21}(z_i)\varepsilon(z_i) + \Omega_{22}(z_i) \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{5.10}$$

Определение 5.1 ([5])**.** *Функция* $\varepsilon \in \mathcal{S}$ *называется* исключительным параметром *преобразования* (5.9)*, если она не удовлетворяет хотя бы одному из условий* (5.10)*. Исключительный параметр* $\varepsilon \in \mathcal{S}$ *имеет* мультипорядок $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k)$*, если функция* $\Omega_{21}(z)\varepsilon(z) + \Omega_{22}(z)$ *имеет нули кратности* m_i *в точках* z_i *при* $i = 1, \ldots, k$*.*

Из предыдущего определения следует, что не исключительный параметр дробно-линейного преобразования — это параметр порядка $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.

Зафиксируем мультииндекс $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ определяемый данными задачи CF_κ (5.4) В зависимости от мультииндекса $\mathbf{n}$ разобьём индексы мультипорядка $\mathbf{m}$ на множества

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^- = \Big\{ i \in \{1, \ldots, k\} : m_i \le n_i \Big\}$$

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^+ = \Big\{ i \in \{1, \ldots, k\} : m_i > n_i \Big\}$$

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^0 = \Big\{ i \in \{1, \ldots, k\} : m_i = 0 \Big\} \subset \mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^-.$$

Пусть $\gamma_{\mathbf{m}} := \sum_{i \in \mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^-} m_i + \sum_{i \in \mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^+} n_i = \sum_{i=1}^{k} \min\{m_i, n_i\}$.

Теорема 5.2 ([5])**.** *Если* $\varepsilon \in \mathcal{S}$ *— исключительный параметр мультипорядка* $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k)$*, то функция*

$$s = T_\Omega[\varepsilon] \in \mathcal{S}_{\kappa - \gamma_{\boldsymbol{m}}}. \tag{5.11}$$

Кроме того, функция s имеет полюсы порядка $m_i - n_i$ в точке z_i при $i \in \mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}^{+}$, и удовлетворяет интерполяционным условиям

$$s^{(j)}(z_i) = j! s_{i,j} \quad (j = 0, \dots n_i - m_i - 1) \quad (i \in \mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}^{-}), \tag{5.12}$$

а также условию

$$s^{(n_i - m_i)}(z_i) \neq (n_i - m_i)! s_{i, n_i - m_i} \quad (i \in \mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}^{-} \setminus \mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}^{0}). \tag{5.13}$$

Замечание 5.2. Если мультипорядок $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, то теорема 5.2 совпадает с соответствующей частью теоремы 5.1.

5.4. Сопоставление результатов

Покажем, что наш результат является матричным аналогом результата В. Болотникова. Сформулируем задачу CF_κ (5.4), как *скалярную* задачу Шура–Такаги.

Задача CF'_κ**.** Пусть κ — неотрицательное целое число. Пусть b — произведение Бляшке, имеющие нули порядка n_i в точках z_i

$$b(z) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{z - z_i}{1 - z\overline{z}_i} \right)^{n_i};$$

и K — любая голоморфная функция удовлетворяющая интерполяционным условиям (5.4) (например, в качестве функции K можно выбрать соответствующий интерполяционный многочлен Эрмита). Найти все функции $s \in \mathcal{S}_\kappa$, такие что

$$(s - K) b^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}. \tag{5.14}$$

Задачи CF_κ (5.4) и CF'_κ (5.14) являются эквивалентными. Действительно, условие (5.14) эквивалентно тому, что функция $s - K$ голоморфна в нулях функции b. При этом нули функций $s - K$ и b совпадают с учётом кратностей. То есть

$$s^{(j)}(z_i) = K^{(j)}(z_i) = j! s_{i,j} \quad (i = 1, \dots, k; j = 0, \dots, n_i - 1).$$

Покажем, что формула (5.9), описывающая решения задачи CF_κ (5.4), совпадает с формулой (1.9), описывающей решения задачи CF'_κ (5.14).

Рассмотрим операторы в пространстве $\mathcal{H}_*(b)$: T — оператор обратного сдвига, E — оператор эвалюоации в бесконечности

$$(Th)(z) = zh(z) - \lim_{z \to \infty} zh(z) \quad (h \in \mathcal{H}_*(b)), \tag{5.15}$$

$$Eh = \lim_{z\to\infty} zh(z) \quad (h \in \mathcal{H}_*(b)). \tag{5.16}$$

Пусть оператор $\mathbf{P} : \mathcal{H}_*(b) \to \mathcal{H}_*(b)$ определён формулой (1.5). Как показано в [12, Theorem 3.16], оператор $\mathbf{P}$ можно определить уравнением Ляпунова–Стейна

$$\mathbf{P} - T^*\mathbf{P}T = -B^* j_{11} B, \tag{5.17}$$

где $B = \left[\begin{smallmatrix} E\Gamma \\ E \end{smallmatrix}\right]$ оператор из $\mathcal{H}_*(b)$ в $\mathbb{C}^2$ (оператор Γ определяется формулой (1.4)).

Как известно, множество функций

$$\big\{f_{ij}(z)\big\}_{i=1,\dots,k;\ j=0,\dots,n_i-1} = \left\{\frac{1}{(z-z_i)^{j+1}}\right\}_{i=1,\dots,k;\ j=0,\dots,n_i-1} \tag{5.18}$$

является базисом в пространстве $\mathcal{H}_*(b)$. В базисе (5.18) оператор обратного сдвига T задаётся матрицей

$$\begin{bmatrix} J_{n_1}(z_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(z_k) \end{bmatrix} = \widehat{T}.$$

В базисе (5.18) оператор Γ действует как (см. [12])

$$\Gamma f_{ij} = \frac{1}{j!} K^{(j)}(z_i) f_{ij} \quad (i = 1,\dots,k;\ j = 0,\dots,n_i-1)$$

Тогда композиция операторов $E\Gamma$ в базисе (5.18) задаётся матрицей

$$\begin{bmatrix} s_{1,0} & \cdots & s_{1,n_1-1} & s_{2,0} & \cdots & s_{k,n_k-1} \end{bmatrix} = C.$$

Оператор эвалюации E в базисе (5.18) задаётся матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = L.$$

Определим матрицу Грама $\mathbb{P}$ оператора $\mathbf{P}$ равенством

$$\mathbb{P} = \Big(\big\langle \mathbf{P} f_{ij}, f_{i'j'}\big\rangle_{st}\Big)_{i=1,\dots,k;\ i'=1,\dots,k}^{j=0,\dots,n_i-1;\ j'=0,\dots,n_{i'}-1}. \tag{5.19}$$

Таким образом, из уравнения Ляпунова–Стейна (5.17) следует, что матрица Грама $\mathbb{P}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbb{P} - \widehat{T}^*\mathbb{P}\widehat{T} = L^*L - C^*C.$$

Отметим, что это уравнение совпадает с уравнением (5.6) для матрицы Пика $\widehat{P}$ задачи CF_κ (5.4). Следовательно, матрицы $\mathbb{P}$ и $\widehat{P}$ совпадают.

Как следует из работы [12, Lemma 3.11] оператор $\mathbf{F}(z)$, заданный равенством (1.6), можно определить формулой

$$(\mathbf{F}h)(z) = \begin{bmatrix} E\Gamma \\ E \end{bmatrix} (1 - zT)^{-1}h \quad (h \in \mathcal{H}_*(b)). \tag{5.20}$$

Запишем формулу (5.20) в базисе (5.18)

$$(\mathbf{F}h)(z) = \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} (zI - \widehat{T})^{-1}h \quad (h \in \mathcal{H}_*(b)).$$

Подставим полученный результат в равенство (1.7) для резольвентной матрицы W

$$W(z) = I - (1 - z) \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} (zI - \widehat{T})^{-1} \widehat{P}^{-1} (I - \widehat{T}^*)^{-1} \begin{bmatrix} C^* & L^* \end{bmatrix} j_{11}.$$

Это равенство совпадает с формулой (5.7) для резольвентной матрицы $\widehat{W}$ задачи CF_κ (5.4). Следовательно, описание решений задач CF_κ (5.4) и CF'_κ (5.14) эквивалентны.

Покажем, что определение 1.1 исключительных параметров совпадает с определением 5.1. Пусть ε — исключительный параметр в смысле определения 5.1. Тогда

$$\Omega_{21}(z_i)\varepsilon(z_i) + \Omega_{22}(z_i) \quad \text{для некоторого } i \le k.$$

Это означает, что

$$\left(\prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{n_j} \big(w_{21}(z)\varepsilon(z) + w_{22}(z) \big) \right) \restriction_{z=z_i} = 0,$$

следовательно

$$\Big(b(z) \big(w_{21}(z)\varepsilon(z) + w_{22}(z) \big) \Big) \restriction_{z=z_i} = 0.$$

Таким образом функция

$$w_{21}\varepsilon + w_{22} = b^{-1} \big(\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22} \big) \tag{5.21}$$

имеет в точке z_i полюс порядка не выше $n_i - 1$. В то время как взаимная простота факторизации (1.10) означает, что функция (5.21) имеет полюс порядка n_i в точке z_i.

Проводя рассуждения в обратном порядке, получим эквивалентность определения 1.1 и Определения 5.1.

Пусть ε является исключительным параметром задачи CF_κ (5.4) мультипорядка $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, и $m_i \le n_i$ (i=1,...,k),

$$\kappa_0 := m_1 + m_2 + \cdots + m_k.$$

Тогда функция $\theta(z)$, определённая равенством

$$\theta(z) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{z - z_i}{1 - z\overline{z}_i} \right)^{m_i}, \tag{5.22}$$

является наибольшим общим делителем $b(z)$ и $\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z)$. Отметим, что $\deg\theta = \kappa_0$ и

$$\widetilde{b}(z) = b(z)/\theta(z) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{z - z_i}{1 - z\overline{z}_i} \right)^{n_i - m_i}.$$

В силу теоремы 1.3 получаем, что $s = T_W[\varepsilon] \in \mathcal{S}_{\kappa-\kappa_0}$ и

$$\frac{s(z) - K(z)}{\widetilde{b}(z)} \in \mathcal{N}_{+,\kappa-\kappa_0}, \quad \frac{s(z) - K(z)}{b(z)} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}. \tag{5.23}$$

При этом первое из включений (5.23) означает, что

$$s^{(j)}(z_i) = j!S_{i,j} \quad (i = 0, \ldots, k; \quad j = 0, \ldots n_i - m_i - 1),$$

а второе

$$s^{(n_i - m_i)}(z_i) \ne (n_i - m_i)!S_{i,n_i - m_i} \quad (i = 0, \ldots, k).$$

От сюда следуют условия (5.12) и (5.13).

Таким образом, полученное нами описание исключительных параметров содержит, как частный случай, результаты работы [5].

6. Пример

Пусть $\kappa = 1$, $p = 1$, $q = 2$. Пусть $b = \left[\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right]$, $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Тогда задачу $GSTP_\kappa(K, b)$ можно сформулировать следующим образом: Найти все функции $s = \left[\begin{smallmatrix} s_1 & s_2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{S}_1^{1\times 2}$ такие, что

$$\left(s - \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{N}_{+,1}^{1\times 2}. \tag{6.1}$$

Условие (6.1) эквивалентно системе условий

$$s_1(0) = 0, \quad s_2(0) = 2. \tag{6.2}$$

Пространство $\mathcal{H}_*(b)$, совпадающее с множеством

$$\mathcal{H}_*(b) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1/z \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/z \end{bmatrix} \right\},$$

отождествим с пространством $\mathbb{C}^2$. Операторы Γ, $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$, определённые формулами (1.4), (1.5), (1.6), соответственно, равны

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Резольвентная матрица W, определённая формулой (1.7), равна

$$W(z) = \frac{1}{3z} \begin{bmatrix} 4-z & 0 & z-2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2-z & 0 & 4z-1 \end{bmatrix}$$

По теореме 1.2 множество решений задачи (6.1) параметризуются формулой

$$s = T_W[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \dfrac{-3\varepsilon_1 z}{2\varepsilon_2 z - 2\varepsilon_2 - 4z + 1} & \dfrac{\varepsilon_2 z - 4\varepsilon_2 - 2z + 2}{2\varepsilon_2 z - 2\varepsilon_2 - 4z + 1} \end{bmatrix},$$

где матричнозначная функция $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ такая, что факторизация

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} z \\ \frac{2-z}{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1(z) & \varepsilon_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{z} & 0 \\ 0 & \frac{4z-1}{z} \end{bmatrix} \\ &\qquad = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2-z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1(z) & \varepsilon_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4z-1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{6.3}$$

взаимно простая.

Обозначим матричнозначные функции

$$\varphi_1(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2-z \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(z) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4z-1 \end{bmatrix}.$$

Пусть θ — левый делитель b, и пусть

$$\theta(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}.$$

Для определения исключительный параметров ε, соответствующих делителю θ, рассмотрим обобщённую касательную задачу

$GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$. В задаче $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ нам необходимо найти все функции $\varepsilon = \begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{bmatrix} \in \mathcal{S}^{1\times 2}$ такие, что

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/z\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0\\ 2-z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 4z-1\end{bmatrix}\right) \in H_2^2. \tag{6.4}$$

Пространство $\mathcal{H}(\theta)$, совпадающее с множеством

$$\mathcal{H}(\theta) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

отождествим с пространством $\mathbb{C}$. Операторы N_1, N_2, P, определённые формулами (3.1), (3.3), соответственно, равны

$$N_1 = \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix}3\end{bmatrix}.$$

Так как $P > 0$, то можно воспользоваться теоремой (4.3) для описания решений задачи (6.4). Матричнозначная матрица U, определённая формулой (4.14) равна

$$U(z) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1-4z & 0 & 2-2z\\ 0 & 3 & 0\\ 2z-2 & 0 & 4-z\end{bmatrix}.$$

По теореме 4.3 множество решений задачи (6.4) параметризуются формулой

$$\varepsilon = T_U[\omega] = \begin{bmatrix}\dfrac{3\omega_1 z}{2\omega_2 z - 2\omega_2 - z + 4} & \dfrac{4\omega_2 z - \omega_2 - 2z + 2}{2\omega_2 z - 2\omega_2 - z + 4}\end{bmatrix},$$

где матричнозначная функция $\omega = \begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{bmatrix}$ пробегает класс $\mathcal{S}^{1\times 2}$.

Отметим, что матричнозначная функция

$$s(z) = T_W[\varepsilon] = T_W\left[T_U[\omega]\right] = \begin{bmatrix}\omega_1 z & \omega_2\end{bmatrix},$$

принадлежит классу $\mathcal{S}^{1\times 2}$. При этом значение в точке 0 матричнозначной функции s равно

$$s(0) = \begin{bmatrix}0 & \omega_2(0)\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}.$$

Таким образом, для матричнозначной функции s, вычисленной по формуле $s = T_W[\varepsilon]$, где ε — исключительный параметр, соответствующий делителю θ, не выполняется второе из интерполяционных условий (6.2).

Теперь рассмотрим другой левый делитель b. Пусть

$$\theta'(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, пространство $\mathcal{H}(\theta')$, совпадающее с множеством

$$\mathcal{H}(\theta') = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

отождествим с пространством $\mathbb{C}$. Операторы N_1', N_2', P', определённые формулами (3.1), (3.3), соответственно, равны

$$N_1' = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad N_2' = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix}.$$

Так как $P' < 0$, то задача $GTIP(\theta', \varphi_1, \varphi_2)$ не имеет решений. Следовательно, не существует исключительный параметров ε, соответствующий делителю θ'.

Благодарности. Автор благодарит Владимира Александровича Деркача за ценные советы и предложения.

Литература

[1] В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн, *Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура–Такаги* // Матем. сб., **86** (1971), 34–75.

[2] Д. З. Аров, *Обобщенная бикасательная проблема Каратеодори–Неванлинны–Пика и $(j; J_0)$–внутренние матрицы–функции* // Изв. РАН, Мат., (1993), No. 1, 121–135

[3] D. Z. Arov and L. Z. Grossman, *Scattering matrices in the theory of unitary extensions of isometric operators* // Math. Nachr., **157** (1992), No. 1, 105–123

[4] D. Baidiuk, *Abstract interpolation problem in generalized Schur classes* // arXiv:1403.4038 (2014), 1–18

[5] V. Bolotnikov, *On the Carathéodory–Fejér interpolation problem for generalized Schur functions* // Int. Eq. Oper. Th., **50** (2004), 9–41.

[6] L. de Branges, J. Rovnyak, *Canonical models in quantum scattering theory* // Perturbation Theory and its Application in Quantum Mechanics, Wiley, New York, 1966, 295–391.

[7] L. B. Golinskii, *On a generalization of matrix Nevalinna- Pick problem*, Izvestija Arm. Acad Nauk, **18** (1983), No. 3, 187–205.

[8] V. Derkach, *On indefinite abstract interpolation problem*, Methods Funct. Anal. Topology, // **7** (2001), No. 4, 87–100.

[9] В. А. Деркач, *Об индефинитной интерполяционной задачу Шура–Неванлинны–Пика* // Укр. Мат. Ж., **55** (2003), 1299–1314.

[10] V. Derkach, H. Dym, *On linear fractional transformations associated with generalized j-inner matrix functions* // Integ. Eq. Oper. Th., **65** (2009), 1–50.

[11] V. Derkach, H. Dym, *On bitangential interpolation in generalized Schur classes* // Complex An. and Oper. Th., **4** (2010), 701–765.

[12] V. Derkach, H. Dym, *A generalized Schur–Takagi interpolation problem* // Integ. Eq. Oper. Th. (to appear).

[13] A. Dijksma, H. Langer, *Notes on a Nevanlinna-Pick interpolation problem for generalized Nevanlinna functions* // Birkhü, Basel, Oper. Theory Adv. Appl., **95** (1997), 69–91.

[14] H. Dym, *J contractive matrix functions, reproducing kernel Hilbert spaces and interpolation*, CBMS Regional Series in Math., vol. 71, Providence, RI, 1989.

[15] В. Е. Кацнельсон, А. Я. Хейфец, П. М. Юдицкий, *Абстрактная интерполяционная задача и теоррия расширений изометрических операторов* // Опер. в функц. простр. и пробл. теор. функц., Киев, Наукова думка, **1** (1986), 83–96.

[16] A. Ya. Kheifets, *Parseval equality in abstract interpolation problem and coupling of open systems* // Journal of Soviet Math., **49** (1990), No. 4, 1114–1120; **49** (1990), No. 6, 1307–1310.

[17] А. Я. Хейфец, *Теорема Неванлинны–Адамяна–Арова–Крейнл в полуопределённом случае* // Теор. Функц., Функц. Анал. и их приложен., **53** (1989), 128–137.

[18] A. Ya. Kheifets, P. M. Yuditskii, *An analysis and extension of V. P. Potapov's approach to interpolation problems with applications to the generalized bitangential Schur–Nevanlinna–Pick problem* // Oper. Theory: Adv. Appl., **72** (1994), 133–161.

[19] M. G. Kreĭn, G. K. Langer, *Über die verallgemeinerten Resolventen und die characteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume* Π_κ // Hilbert space Operators and Operator Algebras (Proc. Intern. Conf. Tihany, 1970); Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, North-Holland, Amsterdam, **5** (1972), 353–399.

[20] Е. В. Нейман, *Аналог теоремы Руше в обощённом классе Смирнова* // Труды института прикладной маематики и механики, **17** (2008), 148–153.

[21] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, М. Наука, 1980.

[22] A. A. Nudel'man, *Об одном обобщении классических интерполяционных задач* // Докл. АН СССР, **256** (1981), 790–793.

[23] В. П. Потапов, *Мультипликативная структура* J*-несжимающих матриц-функций* // Труды Моск. мат. общ., **4** (1955), 125–236.

Сведения об авторах

Евгений Викторович Нейман

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская 24,
Донецк, 83001
E-Mail: evg_sqrt@mail.ru