Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 4, 508 – 523

# Функциональный закон повторного логарифма для стохастических интегралов Ито

Артём В. Логачёв

(*Представлена С. Я. Махно*)

**Аннотация.** В работе доказывается функциональный закон повторного логарифма для последовательности случайных процессов

$$\theta_n(t)=\frac{\tilde{\theta}_n(nt)}{\varphi(n)\sqrt{n}},\quad \tilde{\theta}_n(t)=\int\limits_0^t f_n(\omega,s)dw(s),$$

где $w(s)$ — $\mathcal{F}_s$-согласованный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$, $t\geq 0$, случайные процессы $f_n(\omega,s)$ — $\mathcal{F}_s$-прогрессивно измеримы, $n\in N$, $\varphi(n)$ — монотонно возрастающая функция, стремящаяся к бесконечности.

**2010 MSC.** 35K55, 35K57, 35K60, 35K65.

**Ключевые слова и фразы.** Большие уклонения, закон повторного логарифма, интеграл Ито.

## 1. Введение

На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$, $t\geq 0$, заданы $\mathcal{F}_t$-согласованный винеровский процесс $w(t)$ и $\mathcal{F}_t$-прогрессивно измеримые случайные процессы $f_n(\omega,t)$. Будем предполагать, что существует неслучайная постоянная $\lambda\geq 1$ такая, что почти наверное $\frac{1}{\lambda}\leq f_n^2(\omega,t)\leq\lambda$, $n\in N$.

Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\theta_n(t)=\frac{\tilde{\theta}_n(nt)}{\varphi(n)\sqrt{n}}\,, \tag{1.1}$$

где $\tilde{\theta}_n(t)=\int_0^t f_n(\omega,s)dw(s)$.

В работе [1] Булинский доказал функциональный закон повторного логарифма для процесса (1.1) при $f_n(\omega,t)\equiv 1$ в равномерной

*Статья поступила в редакцию* 13.03.2014

метрике с нормирующей функцией $\varphi(n)$ более общей, чем классическая $\sqrt{2\ln\ln n}$. Обобщение результата Булинского на случай решений стохастических уравнений с периодическими коэффициентами, возмущенных скачкообразным случайным процессом, проведено в работе [2]. В этой статье мы получим функциональный закон повторного логарифма для процессов (1.1) при иных предположениях, чем в [2], и другим методом. Отметим, что подинтегральная функция является случайной и не будет требоваться существования ее поточечного предела при $n \to \infty$.

Работа построена по следующему плану: во втором разделе доказываются вспомогательные результаты, в третьем разделе доказывается общая теорема о законе повторного логарифма для последовательности процессов $\theta_n(t)$, в четвертом разделе приводятся примеры. В частности, доказывается закон повторного логарифма для диффузионных процессов без сноса в случайной среде.

Будем использовать следующие обозначения: $(C[a,b],\rho)$ — пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с заданной на нем равномерной метрикой, $\mathbf{B}(C[a,b],\rho)$ — борелевская $\sigma$-алгебра его множеств, $AC_0[a,b]$ — множество абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $x(t)$, таких, что $x(t) = \int_0^t \dot{x}(s)ds$ с суммируемой функцией $\dot{x}(s)$, $a$ и $b$ конечные числа, которые будут определятся по ходу формулировок. Обозначим $\gamma$ окрестность множества $A$ через $\{A\}^\gamma$. Целую часть числа $c \in R$ обозначим $[c]$.

Обозначим $\Phi$ — класс неубывающих функций $\varphi(n)$, $n \in N$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty.$$

Рассмотрим функционал

$$I(\varphi, r, c) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{-r\varphi^2(n_k)}{2}\right\}, \quad n_k = [c^k],\ c > 1.$$

Для $\varphi$ определим

$$R^2(\varphi) = \inf\{r > 0 : I(\varphi, r, c) < \infty\}. \tag{1.2}$$

$R^2(\varphi) = \infty$, если не существует такого конечного $r$, что $I(\varphi, r, c) < \infty$.

Обозначим $K_r(a)$ замыкание по норме $\|x(\cdot)\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ множества таких функций $x(t) \in AC_0[0,1]$, что $\int_0^1 \frac{\dot{x}^2(t)}{a} dt \le r^2$, где константа $a > 0$.

## 2. Вспомогательные результаты

В этом разделе формулируются результаты, используемые при доказательстве теорем.

Для доказательства основного результата нам понадобится принцип больших уклонений для последовательности мер, порожденных процессами $\theta_n(t)$. Напомним [3, с. 111], что семейство вероятностных мер $P_n$ на пространстве $(C[a,b],\rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $S(x)$ и нормирующей функцией $\psi(n)$, если $\psi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и выполнены следующие условия:

i) для любого $c>0$ множество $\Phi(x)=\{x: S(x)\le c\}$ компактно,

ii) $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\psi(n)}\ln P_n(F)\le -S(F)$ для любого замкнутого множества $F\in\mathbf{B}(C[a,b],\rho)$,

iii) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\psi(n)}\ln P_n(G)\ge -S(G)$, для любого открытого множества $G\in\mathbf{B}(C[a,b],\rho)$, где $S(A\in\mathbf{B}(C[a,b],\rho))=\inf_{x\in A}S(x)$.

**Лемма 2.1.** *Пусть существует неслучайная постоянная $a>0$, такая,что*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi^2(n)}\ln P\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\int\limits_0^t (f_n^2(\omega,ns)-a)\,ds\right|>\varepsilon\right)=-\infty. \tag{2.3}$$

*Тогда семейство мер $P_n(A)=P\{\theta_n(\cdot)\in A\},\ A\in\mathbf{B}(C[0,1],\rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(C[0,1],\rho)$ с функцией $\psi(n)=\varphi^2(n)$ и функционалом действия*

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}\int\limits_0^1\dot{x}^2(t)dt, & \text{если } x(\cdot)\in AC_0[0,1],\\ +\infty, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

*Доказательство.* Утверждение леммы следует из [4, теорема $A$.1] или [5, следствие 4.3.8]. □

Рассмотрим случайный процесс

$$\eta(t)=\int\limits_0^t g(\omega,s)dw(s),$$

где случайный процесс $g(\omega,s)$ — $\mathcal{F}_s$-прогрессивно измерим и существует $\lambda\ge 1$ такое, что $\frac{1}{\lambda}\le g^2(\omega,s)ds\le\lambda$ п.н.

Справедлива следующая оценка [6, теорема 5, с. 172].

**Лемма 2.2.** *При всех $h > 0$ и любых $x > 0$*

$$P\left(\sup_{0\le t\le h}|\eta(t)| > x\right)\le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\lambda h}\right\}.$$

**Лемма 2.3.** *Пусть событие $A \in \mathcal{F}_s$, $s \ge 0$ такое, что $P(A) > 0$. Определим меру $\tilde{P}(B) = P(B|A)$, $B \in \mathcal{F}$. Тогда на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{P})$ случайный процесс $\eta(t) - \eta(s)$, $t \ge s$, будет непрерывным с вероятностью 1 квадратично интегрируемым мартингалом.*

*Доказательство.* Непрерывность с вероятностью 1 и ограниченность второго момента очевидны, поэтому покажем, что $\eta(t) - \eta(s)$ будет мартингалом. Обозначим $\xi(\omega) = \tilde{E}(\eta(t) - \eta(s)|\mathcal{F}_u)$, $s \le u \le t$. Для любого множества $C \in \mathcal{F}_u$, в силу того, что $\eta(t) - \eta(s)$ является мартингалом на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, справедливы следующие равенства

$$\int\limits_C \xi(\omega)\tilde{P}(d\omega) = \int\limits_C (\eta(t) - \eta(s))\tilde{P}(d\omega) = \frac{1}{P(A)}\int\limits_{A\cap C}(\eta(t) - \eta(s))P(d\omega)$$
$$= \frac{1}{P(A)}\int\limits_{A\cap C}(\eta(u) - \eta(s))P(d\omega) = \int\limits_C (\eta(u) - \eta(s))\tilde{P}(d\omega).$$

Поэтому $\tilde{P}(\omega : \{\xi(\omega) = \eta(u) - \eta(s)\}) = 1$. □

Пусть константа $c > 1$. Для некоторого числа $d > 0$ выберем последовательность множеств $\{G_k\}$, $k \in N$, таких, что $G_k \in \mathcal{F}_{c^{k-1}}$ и

$$\inf_{k\in N} P(G_k) = d > 0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\mu_{c^k}(t) = \theta_{c^k}(t) - \theta_{c^k}(1/c),\ t \in [1/c, 1],$$

определенных на стохастических базисах $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{P}_k)$, где вероятностные меры $\tilde{P}_k(B) = P(B|G_k)$, $B \in \mathcal{F}$.

Обозначим $Q_k(A) = \tilde{P}_k(\{\omega : \mu_{c^k}(\cdot) \in A\})$, где $A \in \mathbf{B}(C[1/c, 1], \rho)$.

**Лемма 2.4.** *Пусть выполнено условие (2.3). Семейство вероятностных мер $Q_k(A)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(C[1/c, 1], \rho)$ с функцией $\psi(k) = \varphi^2(c^k)$ и функционалом действия*

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\int\limits_{1/c}^{1} \dot{x}^2(t)dt, & \text{если } x(\cdot) \in AC_0[1/c, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

*Доказательство.* Из леммы 2.3 и условия (2.4) следует, что случайные процессы $\mu_{c^k}(t)$ являются непрерывными с вероятностью 1 мартингалами. Обозначим характеристику мартингала $\mu_{c^k}(t)$ через $\langle \mu_{c^k}\rangle_t$. Из следствия 4.3.8 [5] следует, что нам достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\varphi^2(c^k)} \ln \tilde{P}_k\left(\sup_{t\in[1/c,1]} |\varphi^2(c^k)\langle \mu_{c^k}\rangle_t - a(t-1/c)| > \varepsilon\right) = -\infty.$$

Используя условие (2.4) получаем

$$\tilde{P}_k\left(\sup_{t\in[1/c,1]} |\varphi^2(c^k)\langle \mu_{c^k}\rangle_t - a(t-1/c)| > \varepsilon\right)$$
$$= \frac{P\left(\left\{\sup_{t\in[1/c,1]} |\varphi^2(c^k)\langle \mu_{c^k}\rangle_t - a(t-1/c)| > \varepsilon\right\} \cap G_k\right)}{P(G_k)}$$
$$= \frac{P\left(\left\{\sup_{t\in[1/c,1]} \left|\int\limits_{1/c}^{t} (f^2_{c^k}(\omega, c^k s) - a)ds\right| > \varepsilon\right\} \cap G_k\right)}{P(G_k)}$$
$$\le \frac{P\left(\sup_{t\in[1/c,1]} \left|\int\limits_{1/c}^{t} (f^2_{c^k}(\omega, c^k s) - a)ds\right| > \varepsilon\right)}{d}.$$

Поэтому из условия (2.3) и неравенства $|a| + |a+b| \ge |b|$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\varphi^2(c^k)} \ln \tilde{P}_k\left(\sup_{t\in[1/c,1]} |\varphi^2(c^k)\langle \mu_{c^k}\rangle_t - a(t-1/c)| > \varepsilon\right)$$
$$\le \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\varphi^2(c^k)}\left(\ln P\left(\sup_{t\in[0,1]} \left|\int\limits_{0}^{t} (f^2_{c^k}(\omega, c^k s) - a)ds\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) - \ln d\right) = -\infty.$$

Необходимое равенство установлено. □

## 3. Закон повторного логарифма

В этом разделе доказывается общая теорема о законе повторного логарифма для последовательности процессов $\theta_n(t)$.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\varphi(n) \in \Phi$ *и выполнено условие* (2.3)*. Тогда множество предельных точек последовательности случайных процессов* $\theta_n(t)$ *с вероятностью единица совпадает с* $K_R(a)$*, где* $R^2 = R^2(\varphi)$ *определяется формулой* (1.2).

*Доказательство.* Разобьем доказательство на три стандартных этапа.

*Этап 1.* Для $\delta > 0$ рассмотрим множество

$$J_{(R^2+\delta)/2} = \{x \in C[0,1] : S(x) < (R^2+\delta)/2\}.$$

Очевидно, что $K_R(a) \subset J_{(R^2+\delta)/2}$. Пусть $x \in J_{(R^2+\delta)/2} \backslash K_R(a)$, тогда существует $z \in [0,1]$ такое, что $\int_0^z \frac{\dot{x}^2(t)}{a}\,dt = R^2$. Пусть

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0,z], \\ x(z), & t \in (z,1]. \end{cases}$$

Тогда $y \in K_R(a)$. Применяя неравенство Коши–Буняковского получаем для выбранного $z$

$$\rho(x,y) = \sup_{z \le t \le 1} |x(t) - x(z)| \le \sup_{z \le t \le 1} \left| \int\limits_z^t \dot{x}(s)\,ds \right|$$
$$\le (1-z)^{1/2} \left( \lambda \int\limits_z^1 \frac{\dot{x}^2(t)}{a}\,dt \right)^{1/2} \le \sqrt{\delta\lambda}.$$

Следовательно,

$$K_R(a) \subset J_{(R^2+\delta)/2} \subset \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}. \tag{3.5}$$

Для замкнутого множества $F = C[0,1] \backslash \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$, используя лемму 2.1, имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln P\{\theta_n(\cdot) \in F\} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln P_n(F) \le -S(F),$$

то есть при любом $\gamma > 0$ и всех достаточно больших $n$

$$P_n(F) \le \exp\{-\varphi^2(n)(S(F) - \gamma)\}. \tag{3.6}$$

В силу (3.5) имеем $F \subset \overline{J_{(R^2+\delta)/2}} = C[0,1] \backslash J_{(R^2+\delta)/2}$. Поэтому

$$S(F) \ge S(\overline{J_{(R^2+\delta)/2}}) > (R^2+\delta)/2 \tag{3.7}$$

Таким образом, при $\gamma = \delta/4$ из (3.6) и (3.7) имеем

$$P_n(F) \le \exp\{-\varphi^2(n)(R^2/2 + \delta/4)\}.$$

Следовательно из (1.2) следует, что для любого $c > 1$ и $n_k = [c^k]$, $k \in N$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\theta_{n_k}(t) \notin (K_R(a))^{\sqrt{\delta\lambda}}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{-\varphi^2(n_k)(R^2+\delta/2)}{2}\right\} < \infty.$$

По лемме Бореля–Кантелли $\theta_{n_k}(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$ для почти всех $\omega \in \Omega$ при $k > M(\omega, c, \delta)$.

*Этап 2.* Рассмотрим теперь $\theta_n(t)$ для $n \in [n_k, n_{k+1}]$. Поскольку $\varphi(n)$ — неубывающая функция, то

$$\frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{a_{n_k}}{\sqrt{n_k}\varphi(n_k)} + \frac{b_{n_k}}{\sqrt{n_{k+1}}\varphi(n_{k+1})}, \tag{3.8}$$

где $a_{n_k}, b_{n_k} \ge 0$ и $a_{n_k} + b_{n_k} = 1$. Положим

$$\zeta_k(t) = a_{n_k}\theta_{n_k}(t) + b_{n_k}\theta_{n_{k+1}}(t).$$

Тогда для всех $k > M(\omega, c, \delta)$ получим $\zeta_k(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$. Здесь мы учли, что если $x(t), y(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$, то $a_{n_k}x(t) + b_{n_k}y(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$. Воспользовавшись (3.8), имеем

$$P\Big(\sup_{n_k \le n \le n_{k+1}} \|\theta_n - \zeta_k\| > \sqrt{\delta\lambda}\Big) \le p_k^1 + p_k^2,$$

где

$$p_k^1 = P\left(\sup_{n_k \le n \le n_{k+1}} \frac{a_{n_k}}{\varphi(n_k)\sqrt{n_k}} \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^{nt} f_n(\omega, s)\, dw(s) - \int_0^{n_k t} f_{n_k}(\omega, s)\, dw(s) \right| > \frac{\sqrt{\delta\lambda}}{2}\right),$$

$$p_k^2 = P\left(\sup_{n_k \le n \le n_{k+1}} \frac{b_{n_k}}{\varphi(n_{k+1})\sqrt{n_{k+1}}} \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^{nt} f_n(\omega, s)\, dw(s) \quad \int_0^{n_{k+1} t} f_{n_{k+1}}(\omega, s)\, dw(s) \right| > \frac{\sqrt{\delta\lambda}}{2}\right).$$

Очевидно, что

$$p_k^1 \le P\Big(\sup_{\substack{t\in[0,1],\\ s\in[t, ct\wedge 1]}} |\theta_{n_k}(t) - \theta_{n_k}(s)| \ge \sqrt{\delta\lambda}/2\Big),$$

$$p_k^2 \le P\Big(\sup_{\substack{t\in[0,1],\\ s\in[t/c,t]}} |\theta_{n_k}(t)-\theta_{n_k}(s)| \ge \sqrt{\delta\lambda}/2\Big).$$

Оценим $p_k^1$. Воспользуемся принципом больших уклонений. Обозначим

$$Q_\delta = \Big\{x \in AC_0[0,1] : \sup_{\substack{t\in[0,1],\\ s\in[t,ct\wedge 1]}} |x(t)-x(s)| \ge \sqrt{\delta\lambda}/2\Big\}.$$

Множество $Q_\delta$ замкнуто. Применяя неравенство Коши–Буняковского для всех $t \in [0,1],\ s \in [t, ct\wedge 1]$ имеем

$$\frac{\delta\lambda}{4} \le |x(t)-x(s)|^2 \le \left(\lambda\int\limits_t^s \frac{\dot{x}^2(v)}{a}\,dv\right)(s-t) \le 2(c-1)\lambda S(x).$$

Значит, $S(Q_\delta) \ge \frac{\delta}{8(c-1)}$. Тогда для $c < 1 + \frac{\delta}{4(R^2+\delta)}$, и достаточно больших $k$

$$p_k^1 \le P(\theta_{n_k} \in Q_\delta) \le \exp\Big\{\frac{-\varphi^2(n_k)(R^2+\delta/2)}{2}\Big\}. \tag{3.9}$$

Аналогично доказывается, что при тех же $c$ выполняется неравенство

$$p_k^2 \le \exp\Big\{\frac{-\varphi^2(n_k)(R^2+\delta/2)}{2}\Big\}. \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) и леммы Бореля–Кантелли следует, что для почти всех $\omega \in \Omega$ при $n > M(\omega,\delta)$ справедливо включение $\theta_n(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$.

*Этап 3.* Если $R^2(\varphi) = 0$, то теорема полностью доказана.

Пусть $0 < R^2(\varphi) \le \infty$. Покажем, что для любой функции $x(t) \in K_R(a)$ такой, что $\int_0^1 \frac{\dot{x}^2(t)}{a}\,dt = r^2 < R^2$ будет справедливо соотношение

$$P(\theta_n \in \{x\}^\varepsilon \ \text{ бесконечно часто}) = 1. \tag{3.11}$$

Для последовательности $(c^k)_{k\ge1}$, где целое число $c \ge 2$, имеем

$$\begin{aligned}\{\|\theta_{c^k}-x\|_{[0,1]} < \varepsilon\} &\supseteq \{\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + \|x\|_{[0,1/c]} + \|\theta_{c^k}-\mu_{c^k}\|_{[1/c,1]} \\ &\quad + \|\mu_{c^k}-y_c\|_{[1/c,1]} + \|x-y_c\|_{[1/c,1]} < \varepsilon\} \\ &\supseteq \{2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + 2\|x\|_{[0,1/c]} + \|\mu_{c^k}-y_c\|_{[1/c,1]} + < \varepsilon\},\end{aligned} \tag{3.12}$$

где

$$y_c(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1/c], \\ x(t)-x(1/c), & t \in (1/c,1], \end{cases}$$

$$\mu_{c^k}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/c], \\ \theta_{c^k}(t) - \theta_{c^k}(1/c), & t \in (1/c, 1]. \end{cases}$$

Для любого $\varepsilon > 0$, любой функции $x \in K_r(a)$, применяя неравенство Коши-Буняковского и выбирая $c > 36r^2\lambda^2/\varepsilon^2$, имеем

$$\|x\|_{[0,1/c]} = \sup_{t\in[0,1/c]} \int\limits_0^t \dot{x}(s)\, ds \le \left(\lambda \int\limits_0^{1/c} \frac{\dot{x}^2(s)}{a}\, ds\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{c}} \le \frac{\lambda r}{\sqrt{c}} < \varepsilon/3.$$

Поэтому, из (3.12) следует, что достаточно показать, что

$$P\biggl(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{\omega : 2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} < 2\varepsilon/3\}\biggr) = 1.$$

Обозначим

$$A_k = \{\omega : \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} < \varepsilon/3\}, \quad B_k = \{\omega : 2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} < \varepsilon/3\}.$$

Тогда $A_k \cap B_k \subseteq \{\omega : 2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} < 2\varepsilon/3\}$ и

$$\begin{aligned} &P\biggl(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{\omega : 2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} < 2\varepsilon/3\}\biggr) \\ &\qquad \ge P\biggl(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} (A_k \cap B_k)\biggr) = 1 - P\biggl(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} (\overline{A_k} \cup \overline{B_k})\biggr). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что достаточно показать, что для любого $j \in N$

$$\lim_{l\to\infty} P(C_j^l) = 0, \qquad \text{где } C_k^l = \bigcap_{k=j}^{l} (\overline{A_k} \cup \overline{B_k}). \tag{3.14}$$

**Лемма 3.1.** $\lim_{l\to\infty} P(C_j^l) = 0$ *для любого* $j \in N$.

*Доказательство.* Предположим, что это не так, то есть существует $j$ такое, что $\lim_{l\to\infty} P(C_j^l) = d > 0$. Покажем, что

$$P(C_j^l) \le \exp\biggl\{-\frac{1}{2}\sum_{k=j}^{l} \exp\biggl\{\frac{-\varphi^2(c^k)\overline{r}}{2}\biggr\}\biggr\}, \tag{3.15}$$

где $r^2 < \overline{r} < R^2$.

Доказательство проведем методом математической индукции.

*Шаг 1.* $l = j$ Оценим $P(C_j^j)$. Используя лемму 2.2 и принцип больших уклонений для открытых множеств из леммы 2.4 $\forall \gamma > 0$ для $c > c(\gamma)$ будем иметь

$$\begin{aligned} P(C_j^j) = 1 - P(A_j \cap B_j) &\le 1 - P(A_j) + P(\overline{B_j}) \\ &\le 1 - \exp\{-\varphi^2(c^j)(r^2/2+\gamma)\} + P(\overline{B_j})/d \\ &\le 1 - \exp\{-\varphi^2(c^j)(r^2/2+\gamma)\} + \frac{2}{d}\exp\bigg\{-\frac{\varepsilon^2\varphi^2(c^j)c}{72\lambda}\bigg\}. \end{aligned}$$

Обозначим $\bar{r} = \frac{R^2+r^2}{2} \wedge (2+r^2)$.

Выбирая $\gamma = \frac{R^2-r^2}{4} \wedge 1$ для $c > c(\gamma) \vee (36\bar{r}\lambda/\varepsilon^2 + 72\lambda\ln(4/d)/\varepsilon^2)$ используя неравенство $1 - x \le \exp(-x)$, получаем

$$P(\overline{C_j^j}) \le \exp\bigg\{-\frac{1}{2}\exp\bigg\{\frac{-\varphi^2(c^j)\overline{r}}{2}\bigg\}\bigg\}. \tag{3.16}$$

*Шаг 2.* Предположим, что (3.15) выполнено для $l = q-1$.

$$P(\overline{A_k^{q-1}}) \le \exp\bigg\{-\frac{1}{2}\sum_{k=j}^{q-1}\exp\bigg\{\frac{-\varphi^2(c^k)\overline{r}}{2}\bigg\}\bigg\}. \tag{3.17}$$

*Шаг 3.* Докажем (3.17) для $l = q$. Используя лемму 2.2 и принцип больших уклонений для открытых множеств из леммы 2.4, для выбранных на первом шаге $\bar{r}$ и $c$, получаем

$$\begin{aligned} P(C_j^q) = P((\overline{A_q} \cup \overline{B_q}) \cap C_j^{q-1}) &= P(C_j^{q-1})P(\overline{A_q} \cup \overline{B_q} | C_j^{q-1}) \\ &\le P(C_j^{q-1})\bigg(1 - P(A_q | C_j^{q-1}) + \frac{P(\overline{B_q})}{d}\bigg) \\ = P(C_j^{q-1})\bigg(1 - P(\|\mu_{c^q} - y_c\|_{[1/c,1]} < \frac{\varepsilon}{3} | C_j^{q-1}) &+ \frac{2}{d}\exp\bigg\{-\frac{\varepsilon^2\varphi^2(c^q)c}{72\lambda}\bigg\}\bigg) \\ &\le P(C_j^{q-1})\bigg(1 - \frac{1}{2}\exp\bigg\{\frac{-\varphi^2(c^k)\overline{r}}{2}\bigg\}\bigg) \\ &\le \exp\bigg\{-\frac{1}{2}\sum_{k=j}^{q}\exp\bigg\{\frac{-\varphi^2(c^k)\overline{r}}{2}\bigg\}\bigg\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Из (3.16)–(3.18) следует (3.15).

В силу условия (1.2) ряд $\sum_{k=j}^{l}\exp\{\frac{-\varphi^2(c^k)\overline{r}}{2}\}$ расходится, поэтому

$$0 < d < \lim_{l\to\infty} P(C_j^l) \le \exp\bigg\{-\frac{1}{2}\sum_{k=j}^{\infty}\exp\bigg\{\frac{-\varphi^2(c^k)\overline{r}}{2}\bigg\}\bigg\} = 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2.1. □

Таким образом, выполнено условие (3.14) откуда следует, что выполнено (3.11). Теорема полностью доказана. □

## 4. Примеры

Теорема 3.1 применима, например, в следующих случаях:

1) если $f_n(\omega, s)) = f(s)$ — случай процессов с независимыми приращениями,

2) если $f_n(\omega, s)$ и $w(s)$ независимы,

3) если есть эффект усреднения (например, периодический коэффициент диффузии, диффузионный процесс в случайной среде).

Приведем несколько примеров.

1) Рассмотрим случайный процесс с независимыми приращениями

$$X_1(t) = x_0 + \int_0^t f(s)\, dw(s),$$

где детерминированная функция $f(s)$ удовлетворяет условию: существует $\lambda \geq 1$ такое, что $\frac{1}{\lambda} \leq f^2(s) \leq \lambda$. Пусть

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(s)\, ds = a, \tag{4.19}$$

функция $\varphi(n) \in \Phi$. Для последовательности случайных процессов

$$\frac{X_1(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^{nt} f(s)\, dw$$

справедлив закон повторного логарифма с множеством предельных точек $K_R(a)$, где $R^2 = R^2(\varphi)$ определяется формулой (1.2). Проверим условие теоремы 3.1. Используя условие (4.19) для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $n$ получаем

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t (f^2(ns) - a)\, ds \right| \leq \varepsilon/2 + \sup_{t\in[\varepsilon/2\lambda,1]} \left| \int_{\varepsilon/2\lambda}^t (f^2(ns) - a)\, ds \right| = \varepsilon/2$$

$$+ \sup_{t\in[\varepsilon/2\lambda,1]} \left| t\frac{1}{nt} \int_{\varepsilon/2\lambda}^{nt} (f^2(s) - a)\, ds \right| < \varepsilon/2 + \sup_{t\in[\varepsilon/2\lambda,1]} (t\varepsilon/2) < \varepsilon.$$

Таким образом, условие (2.3) выполнено.

2) Рассмотрим интеграл Ито следующего вида

$$X_2(t) = x_0 + \int\limits_0^t (a + (-1)^{\nu(s)})\, dw(s),$$

где константа $a > 1$, $\nu(s)$ — $\mathcal{F}_s$-согласованный, независимый от $w(s)$ процесс Пуассона с параметром $\lambda s$.

Обозначим

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda n}\tilde{\varphi}(n)} \int\limits_0^t (-1)^{\nu(ns)} d\tilde{\nu}(ns),$$

где $\tilde{\nu}(s)$ — центрированный процесс Пуассона.

**Лемма 4.1.** *Пусть* $\tilde{\varphi}(n) \in \Phi$ *и* $\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\varphi}(n)}{\sqrt{n}} = 0$, *тогда для любого* $\delta > 0$ *найдется* $N(\delta) :\ \forall\, n > N(\delta, t - v)$

$$P\Big(\sup_{t\in[0,1]} |Z_n(t)| \geq \delta\Big) \leq 2\exp\Big\{-\frac{\tilde{\varphi}^2(n)\delta^2}{4}\Big\}.$$

*Доказательство.* Из [7, теорема 6] и условия $\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\varphi}(n)}{\sqrt{n}} = 0$ следует, что при достаточно больших $n$ и любых $k > 0$, $\delta > 0$

$$P\Big(\sup_{t\in[0,1]} |Z_n(t)| \geq \delta\Big) \leq 2\exp\Big\{-k\delta + \frac{k^2}{2\tilde{\varphi}^2(n)} \exp\Big(\frac{2k}{\tilde{\varphi}^2(n)}\Big)\Big\}.$$

Выбрав $k = \frac{\tilde{\varphi}(n)\delta}{2}$, при достаточно больших $n$ получим

$$P\Big(\sup_{t\in[0,1]} |Z_n(t)| \geq \delta\Big) \leq 2\exp\Big\{-\frac{\tilde{\varphi}^2(n)\delta^2}{4}\Big\}.$$

□

Пусть функция $\varphi(n) \in \Phi$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$, тогда для последовательности случайных процессов

$$\frac{X_2(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int\limits_0^{nt} (a + (-1)^{\nu(s)})\, dw$$

справедлив закон повторного логарифма с множеством предельных точек $K_R(a^2 + 1)$, где $R^2 = R^2(\varphi)$ определяется формулой (1.2).

Заметим, что

$$\int_0^t ((a+(-1)^{\nu(ns)})^2 - a^2 - 1)\,ds = 2a\int_0^t (-1)^{\nu(ns)}ds.$$

Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$Y_n(t) = \frac{1}{2\lambda n}\left((-1)^{\nu(nt)} - 1 + 2\lambda n\int_0^t (-1)^{\nu(ns)}ds\right).$$

Применяя к функции $\frac{\cos(\pi x)}{2\lambda n}$ и процессу $\nu(nt)$ формулу Ито, получаем, что иначе процесс $Y_n(t)$ можно записать в следующем виде

$$Y_n(t) = -\frac{1}{\lambda n}\int_0^t (-1)^{\nu(ns)}d\tilde{\nu}(ns),$$

где $\tilde{\nu}(s)$ — центрированный процесс Пуассона.

Так как $|(-1)^{\nu(nt)} - 1| < 2$ п.н., то для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $n$

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|2a\int_0^t (-1)^{\nu(ns)}ds\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{t\in[0,1]}\left|2a\frac{1}{\lambda n}\int_0^t (-1)^{\nu(ns)}d\tilde{\nu}(ns)\right|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{2a}{\sqrt{\lambda n}\tilde{\varphi}(n)}\int_0^t (-1)^{\nu(ns)}d\tilde{\nu}(ns)\right|,$$

где $\tilde{\varphi}(n) = n^{1/4}\sqrt{\varphi(n)}$. Из леммы 4.1 следует, что

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{2a}{\sqrt{\lambda n}\tilde{\varphi}(n)}\int_0^t (-1)^{\nu(ns)}d\tilde{\nu}(ns)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right) \le 2\exp\left\{-\frac{\tilde{\varphi}^2(n)\varepsilon^2}{64a^2}\right\}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi^2(n)}\ln P\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t ((a+(-1)^{\nu(ns)})^2 - a^2 - 1)\,ds\right| > \varepsilon\right)$$
$$\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi^2(n)}\left(-\frac{\tilde{\varphi}^2(n)\varepsilon^2}{64a^2}\right) = -\frac{\sqrt{n}\varepsilon^2}{64a^2\varphi(n)} = -\infty$$

и условие теоремы 3.1 выполнено.

3) Рассмотрим диффузионный случайный процесс в случайной среде. Определим случайный процесс $X_3(t)$ как решение уравнения

$$X_3(t) = x_0 + \int\limits_0^t \sigma(\omega, X_3(s))\, dw(s), \tag{4.20}$$

где $\sigma(\omega, x)$ — стационарный эргодический марковский процесс со значениями во множестве $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $a_i \neq 0$, с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями; винеровский процесс $w(t)$ и марковский процесс $\sigma(\omega, x)$ независимы. В работе [4] обосновывается существование и единственность слабого решения для уравнений типа (4.20).

Обозначим

$$a = 1 \Big/ \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i^2} \pi_i,$$

где $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ — распределение $\sigma(0, \omega)$.

Пусть функция $\varphi(n) \in \Phi$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^5(n)}{\sqrt{n}} = 0$, тогда для последовательности случайных процессов

$$\frac{X_3(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int\limits_0^{nt} \sigma(\omega, X_3(s))\, dw(s) \tag{4.21}$$

справедлив закон повторного логарифма с множеством предельных точек $K_R(a)$, где $R^2 = R^2(\varphi)$ определяется формулой (1.2). Обозначим

$$x_n(t) = \frac{X_3(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)}.$$

Справедливо равенство

$$X_3(nt) = x_0 + \sqrt{n}\varphi(n) x_n(t),$$

поэтому нам достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln P\left( \sup_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t (\tilde{\sigma}^2(\omega, \sqrt{n}\varphi(n) x_n(s)) - a)\, ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty, \tag{4.22}$$

где $\tilde{\sigma}(\omega, x) = \sigma(\omega, x_0 + x)$ — стационарный эргодический марковский процесс.

Из (4.21) следует, что справедливо уравнение

$$x_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \int\limits_0^t \tilde{\sigma}(\omega, \sqrt{n}\varphi(n)x_n(s))\, dw_n(s), \tag{4.23}$$

где $w_n(t) = \frac{w(nt)}{\sqrt{n}}$.

При сделанных предположениях

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{(\sqrt{n}\varphi(n))^{1/6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{5/6}(n)}{n^{1/12}} = 0.$$

Поэтому условие (4.22) для уравнений (4.23) установлено в [4].

4) Рассмотрим процесс

$$X_4^n(t) = x_0 + \int\limits_0^t (a + \cos(ns))dw(s), \quad a > 1.$$

Для последовательности случайных процессов

$$\frac{X_4^n(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int\limits_0^{nt} (a + \cos(ns))\, dw, \quad \varphi(n) \in \Phi,$$

справедлив закон повторного логарифма с множеством предельных точек $K_R(a^2 + 1/2)$, где $R^2 = R^2(\varphi)$ определяется формулой (1.2). Действительно, для достаточно больших $n$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t ((a + \cos(n^2 s))^2 - a^2 - 1/2)\, ds \right|$$
$$= \sup_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t \left( 2a\cos(n^2 s) + \frac{\cos(2n^2 s)}{2} \right) ds \right| \le \frac{1}{n^2}\left(2a + \frac{1}{4}\right) < \varepsilon,$$

поэтому условие (2.3) выполнено.

## Литература


[1] А. В. Булинский, *Новый вариант функционального закона повторного логарифма* // Теория вероятностей и ее применения, **XXV(3)**, (1980), 502–511.

[2] S. Ya. Makhno, *Functional iterated logarithmic law for solutions of stochastic equations* // Stochastics, **70** (2000), No. 3–4, 221–239.

[3] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флукткации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, М., 1979.

[4] Р. Ш. Липцер, П. Чиганский, *Умеренные уклонения для процесса диффузионного типа в случайной среде* // Теория вероятностей и ее применения, **LIV(1)** (2009), 39–62.

[5] А. А. Пухальский, *Большие уклонения стохастических динамических систем*, М., 2005.

[6] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, Киев, 1982.

[7] С. Я. Махно, *Стохастические уравнения. Предельные теоремы*, Киев, 2012.

## Сведения об авторах

**Артём Васильевич Логачёв**

Институт прикладной математики
и механики НАНУ,
ул. Розы Люксембург 74,
Донецк, 83114
*E-Mail:* omboldovskaya@mail.ru