Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 2, 274 – 286

Преобразование Фурье квазивыпуклых функций и функций класса V^*

Роальд М. Тригуб

Аннотация. В статье предельно усилена одна теорема Sz.-Nagy и установлена еще одна связь между рядами и интегралами Фурье.

2010 MSC. 42A38, 42A16, 42B35, 26B30.

Ключевые слова и фразы. Квазивыпуклость и условие V^*, преобразование и ряд Фурье, алгебра абсолютно сходящихся интегралов Фурье.

1. Введение

Положим, как обычно, для функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(L = L_1)$

$$A(\mathbb{R}) = \left\{ f : f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-itx}dt, \quad \|f\|_A = \|g\|_{L(\mathbb{R})} < \infty \right\},$$

$$A^*(\mathbb{R}) = \left\{ f : f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-itx}dt, \right. \qquad \left. \|f\|_{A^*} = \int\limits_{0}^{\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|t|\ge x} |g(t)|\, dx < \infty \right\}.$$

Принадлежность $A(\mathbb{R})$ существенна для мультипликаторов интегралов и рядов Фурье в пространстве C и L (см. [1, гл. I и VII]). См. также ниже теорему 5.1. Достаточные и необходимые условия принадлежности банаховой алгебре $A(\mathbb{R})$ см. в обзорной статье [2]. Свойства и применение алгебры $A^*(\mathbb{R})$ см. в [3].

Статья поступила в редакцию 14.11.2013

ISSN 1810 – 3200.

Будем писать $f \in L^*(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, если f измерима и

$$\|f\|_{L^*} = \int_0^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{t \ge x} |f(t)|\, dx < \infty,$$

и $f \in V^*(\mathbb{R}_+)$, если $f \in AC_{loc}(0, +\infty)$, а

$$\|f\|_{V^*} = \|f'\|_{L^*} = \int_0^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{t \ge x} |f'(t)|\, dx < \infty.$$

Если еще $f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, то пишем $f \in V_0^*(\mathbb{R}_+)$. Функция $f \in V^*(\mathbb{R}_-)$, если $f(-x) \in V^*(\mathbb{R}_+)$, а $f \in V^*(\mathbb{R})$, если $f \in V^*(\mathbb{R}_+) \cap V^*(\mathbb{R}_-) \cap C(\mathbb{R})$ и

$$\|f\|_{V^*(\mathbb{R})} = \int_0^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{t \ge x} |f'(t)|\, dx < \infty.$$

Если еще $f(\infty) = \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$, то $f \in V_0^*(\mathbb{R})$.

Этот класс функций $V_0^*(\mathbb{R})$ появился в статье A. Beurling [4], а также в статье С. А. Теляковского [5] (при переформулировке одной теоремы S. Sidon). Условие $f \in V^*$ более слабое (более общее), чем условия типа выпуклости, но более сильное, чем конечность полной вариации ($f \in V$). Принадлежность $A(\mathbb{R})$ кусочно-выпуклых функций и разности выпуклых функций изучали B. Sz.-Nagy [6] (случай чётных функций) и W. Trebels [7] (см. также [2, 5.6, 5.7]).

Приведем для примера теорему Секефальви–Надя.

Пусть чётная функция $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}$, а $f' \in V_{loc}$ (исключая точки $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_s$). Если для некоторых $0 < \delta < N < \infty$ сходятся интегралы

$$\int_0^\delta x|df'(x)|, \quad \int_N^\infty x|df'(x)|,$$

$$\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} |x - x_k| \ln \frac{1}{|x - x_k|} |df'(x)| \quad (1 \le k \le s),$$

то $f \in A(\mathbb{R})$.

В настоящей статье эта теорема обобщается и уточняется так, что достаточные условия уже совпадают с необходимыми.

Теорема 1.1. *Пусть* $\{x_k\}_1^s$ *такие точки из* $\mathbb{R}$, *что функции* $f(x+x_k)$ $(1 \le k \le s)$ *допускают продолжение с некоторой окрестности нуля, а* f — *с некоторой окрестности* ∞ $(|x| \ge N)$ *до функций из* $V_0^*(\mathbb{R})$. *Тогда для того чтобы* $f \in A(\mathbb{R})$, *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* $\delta > 0$ *и* $N > \max_{1\le k\le s} |x_k|$

$$\sum_{k=1}^{s} \int_0^{\delta} \frac{|f(x_k+t) - f(x_k-t)|}{t}\,dt + \int_N^{\infty} \frac{|f(t) - f(-t)|}{t}\,dt < \infty.$$

Сначала приведем свойства класса $V^*(\mathbb{R}_+)$ в сравнении с классом функций из $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ с условием

$$f \in W(\mathbb{R}_+) = W_{conv}(\mathbb{R}_+) = \left\{ f : \|f\|_W = \int_0^{\infty} x|df'(x)| < \infty \right\},$$

которое в разных вариантах использовалось в [7] (см. также, напр., [2]).

2. Пространство $L^*(\mathbb{R}_+)$

Три свойства нормы очевидны. Проверим полноту пространства.

Очевидно, что при $x > 0$

$$x \operatorname*{ess\,sup}_{t \ge x} |f(t)| \le \int_0^{x} \operatorname*{ess\,sup}_{t \ge u} |f(t)|\,du, \tag{2.1}$$

и значит, при любом $\delta > 0$

$$\|f\|_{L^\infty[\delta,+\infty)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \ge \delta} |f(t)| \le \frac{1}{\delta}\|f\|_{L^*}.$$

Если при $m \ge n$ и $\varepsilon_n \to 0$

$$\|f_m - f_n\|_{L^*} \le \varepsilon_n,$$

то

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty[\delta,+\infty)} \le \frac{1}{\delta}\varepsilon_n.$$

Но пространство L^∞, как сопряженное к L, полное. Существует $f \in L^\infty[\delta,+\infty)$:

$$\|f - f_n\|_{L^\infty[\delta,+\infty)} \le \frac{1}{\delta}\varepsilon_n.$$

Используя лемму Фату, в неравенстве

$$\|f_m(\cdot+\delta)-f_n(\cdot+\delta)\|_{L^*}\le\varepsilon_n$$

переходим к пределу при $m\to\infty$, а затем δ устремляем к нулю.

Полнота доказана.

Банахово пространство $L^*(\mathbb{R}_+)$ не является сепарабельным, т.к. расстояние между любыми двумя функциями f_y ($f_y(x)=1$ при $x\le 1+y$ и $f_y(x)=0$ при $x>1+y$) не меньше единицы,если $y>0$.

В этом пространстве функции, равные нулю в некоторых окрестностях нуля и ∞ и принимающие конечное число значений, образуют плотное множество (см. (2.1)). Но уже функцию f_1, равную 1 на $[0,1]$ и нулю при $x>1$, нельзя приблизить непрерывными, а функцию f_2, равную $\sin\frac{1}{x-1}$ на $(1,2)$ и нулю вне $(1,2)$, нельзя приблизить ступенчатыми функциями.

В отличие от L пространство L^* рефлексивное, т.к.

$$\sup_{g:\|g\|_{L^*}\le1}\left|\int\limits_0^\infty fg\right|=\sup_{x>0}\frac{1}{x}\int\limits_0^x|f(t)|\,dt=:\|f\|_{L_0},$$

$$\sup_{f:\|f\|_{L_0}\le1}\left|\int\limits_0^\infty fg\right|=\|g\|_{L^*},$$

(дискретный случай см. в [8, 6.4.11]).

3. Сравнение W и $V^*(\mathbb{R}_+)$

Для того чтобы вещественная функция $f\in W(\mathbb{R}_+)(W_0(\mathbb{R}_+))$, необходимо и достаточно, чтобы $f=f_1-f_2$, где f_1 и f_2 выпуклы на $\mathbb{R}_+$ и ограничены, а значит, монотонны (и $f_1(+\infty)=f_2(+\infty)=0$).

Достаточность следует из того, что если f_1 выпукла и ограничена, то (см. ниже (3.1) и (2.1))

$$\int\limits_0^N x|df_1'(x)|=\left|\int\limits_0^N xdf_1'(x)\right|=|Nf_1'(N)-f_1(N)+f(0)|=O(1)$$

$$(N\to\infty).$$

Как известно, выпуклая функция характеризуется тем, что она есть интеграл от монотонной функции. Поэтому, для доказательства необходимости можно положить

$$f_1(x)=\int\limits_x^\infty dt\int\limits_t^\infty|df'(t)|,\quad f_2(x)=\int\limits_x^\infty\left[f'(t)+\int\limits_t^\infty|df'(t)|\right]dt-f(+\infty).$$

При этом

$$0 \le f_1(x) = \int_x^\infty (t-x)|df'(t)| \le \int_x^\infty t|df'(t)|.$$

Далее, $W(\mathbb{R}_+) \subset V^*(\mathbb{R}_+)$. Точнее:

$$\|f\|_{V^*(\mathbb{R}_+)} \le 2\|f\|_{W(\mathbb{R}_+)} + |f(0) - f(\infty)|. \tag{3.1}$$

То, что для $f \in V^*(\mathbb{R}_+)$ существует предел $f(+\infty)$, следует из следующего неравенства: при $x_2 > x_1$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \int_{x_1}^{x_2} |f'(x)|\,dx \le \int_{x_1}^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{t \ge x} |f'(x)| dx \to 0 \quad (x_1 \to \infty).$$

Если $f = f_1 - f_2$ (см. выше), то

$$\|f\|_{V^*} \le \|f_1\|_{V^*} + \|f_2\|_{V^*} = \left| \int_0^\infty df_1'(x)\,dx \right| + \left| \int_0^\infty df_2'(x)\,dx \right|$$
$$= |f_1(0)| + |f_2(\infty) - f_2(0)| = |f_1(0)| + |-f(\infty) - f_1(0) + f(0)|$$
$$\le 2|f_1(0)| + |f(0) - f(\infty)| = 2\|f\|_W + |f(0) - f(\infty)|.$$

Очевидно ещё, что если f и $g \in V^*(\mathbb{R}_+)$, то и $f \cdot g \in V^*(\mathbb{R}_+)$.

Отметим, во-первых, разницу в поведении функций этих двух классов в окрестности особых точек 0 и $+\infty$.

При α и $\beta > 0$ функция

$$f_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta} \quad \Big(x \in \Big[0, \frac{1}{\pi^{1/\beta}}\Big]\Big), \quad f_{\alpha,\beta}(x) = 0 \quad \Big(x > \frac{1}{\pi^{1/\beta}}\Big)$$

принадлежит $V_0^*(\mathbb{R}_+)$ при $0 < \beta < \alpha$, а $W_0(\mathbb{R}_+)$ — только при $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$. А функция Бесселя

$$j_\lambda(x) = \int_0^1 (1-t^2)^{\lambda - \frac12} \cos xt\,dt,$$

если учесть ее асимптотику, как и ее производной, при $x \to +\infty$ (см. [1, гл. IV, 3.11]), принадлежит $V_0^*(\mathbb{R}_+)$ при $\lambda > \frac12$, а $W_0(\mathbb{R}_+)$ — только при $\lambda > \frac32$.

Как следует из (2.1), при почти всех $x > 0$ для $f \in V^*(\mathbb{R}_+)$

$$f'(x) = o\Big(\frac1x\Big) \quad (x \to 0), \quad f'(x) = O\Big(\frac1x\Big) \quad (x \to +\infty).$$

Поэтому $f \in \operatorname{Lip} 1$ на $[\delta, +\infty)$ при $\delta > 0$.

И функция $f \in W(\mathbb{R}_+)$ принадлежит $\operatorname{Lip} 1$ на любом отрезке $[\delta, N]$ $(0 < \delta < N)$. Но разница в том, что любую функцию из $\operatorname{Lip} 1$ на таком отрезке, очевидно, можно продолжить до функции из $V_0^*(\mathbb{R}_+)$, но не обязательно — до $W(\mathbb{R}_+)$, т.к. не любая функция из $\operatorname{Lip} 1$ имеет односторонние производные ($f(x) = (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1},\ x \in [1,2]$).

Еще. Расширение класса W до V^* в асимптотической форме теоремы A ведёт к потере монотонности у функции $\mathcal{F}$ (см. ниже замечание 5.2).

4. Доказательство теоремы 1.1

Теперь можно приступить к доказательству теоремы 1.1. Оно основано на следующем предложении об асимптотике преобразования Фурье функций из $V_0^*(\mathbb{R})$ (здесь и далее C — некоторая абсолютная постоянная).

Теорема A ([9], теорема 5). *Если $f \in V_0^*(\mathbb{R})$, то при любом $y \neq 0$ и некотором θ $(|\theta| \le C)$*

$$\int_0^\infty f(x) e^{-ixy} dx = -\frac{i}{y} f\Big(\frac{\pi}{2|y|}\Big) + \theta \mathcal{F}(|y|), \qquad \int_0^\infty \mathcal{F}(y) dy \le \|f\|_{V^*(\mathbb{R})}.$$

Еще ранее такая теорема доказана для выпуклых функций ([10, теорема 3], см. также [8, 6.4.7]).

Следствие 4.1. *Если $f \in C_0(\mathbb{R})$ и $f \in AC_{loc}\,(\mathbb{R} \backslash \{x_1\})$ при некотором $x_1 \in \mathbb{R}$, а*

$$\|f(\cdot + x_1)\|_{V^*(\mathbb{R})} = \int_0^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{|t| \ge x} |f'(t + x_1)|\, dx < \infty,$$

то

$$\left| \int\limits_{0 \le a \le |y| \le b \le \infty} \big|\hat{f}(y)\big|\, dy - 2 \int_{\frac{\pi}{2b}}^{\frac{\pi}{2a}} \frac{|f(x_1+t) - f(x_1-t)|}{t}\, dt \right| \le C \|f(\cdot + x_1)\|_{V^*(\mathbb{R})}.$$

Доказательство.

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx = e^{-ix_1y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+x_1)e^{-ixy}dx$$

$$= e^{-ix_1y}\left(\int_0^{\infty} f(x+x_1)e^{-ixy}dx + \int_0^{\infty} f(x_1-x)e^{ixy}dx\right)$$

и в силу теоремы А при $|\theta| \le C$ и $\int_0^\infty |\mathcal{F}_1(y)|\,dy \le \|f(\cdot + x_1)\|_{V^*}$

$$\hat{f}(y) = -\frac{i}{y}e^{-ix_1y}\Big(f\Big(x_1+\frac{\pi}{2|y|}\Big) - f\Big(x_1-\frac{\pi}{2|y|}\Big)\Big) + 2\theta\mathcal{F}_1(|y|).$$

Отсюда следует, что

$$\Big||\hat{f}(y)\Big| - \frac{1}{|y|}\Big|\Big|f\Big(x_1+\frac{\pi}{2|y|}\Big) - f\Big(x_1-\frac{\pi}{2|y|}\Big)\Big| \le C|\mathcal{F}_1(|y|)|$$

и

$$\left|\int_{a\le|y|\le b} \big|\hat{f}(y)\big|\,dy - \int_{a\le|y|\le b} \frac{|f(x_1+\frac{\pi}{2|y|}) - f(x_1-\frac{\pi}{2|y|})|}{|y|}\,dy\right|$$
$$\le 2C\|f(\cdot+x_1)\|_{V^*}.$$

Осталось учесть, что

$$\int_{a\le|y|\le b} \frac{1}{|y|}\Big|f\Big(x_1+\frac{\pi}{2|y|}\Big) - f\Big(x_1-\frac{\pi}{2|y|}\Big)\Big|\,dy$$
$$= 2\int_{\frac{\pi}{2b}}^{\frac{\pi}{2a}} \frac{|f(x_1+t) - f(x_1-t)|}{t}\,dt.$$

□

Доказательство теоремы 1.1. В силу условий теоремы $f \in V(\mathbb{R})$ (ограниченной вариации), а если $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap V(\mathbb{R})$, то для всех $x \in \mathbb{R}$ (см., напр., лемму 3 в [11])

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon_1\to+0}\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_1\le|y|\le\frac{1}{\varepsilon_2}} \hat{f}(y)e^{iyx}dy.$$

Так что все сводится к проверке соотношения $\hat{f} \in L(\mathbb{R})$.

Положим $\delta = \frac{1}{3}\min_{k\neq m}|x_k - x_m|$, считая, что с окрестности нуля радиуса 2δ каждую из функций $f(x+x_k)$ можно продолжить до функции из $V_0^*(\mathbb{R})$.

Положим при $|x-x_k| \le \delta$ и $|x-x_k| > \delta$, соответственно,

$$h_k(x) = 1, \quad h_k(x) = \Big(2 - \frac{1}{\delta}|x-x_k|\Big)_+ \quad (1 \le k \le s).$$

Так как $h_k \in A(\mathbb{R}) \cap V^*(\mathbb{R})$, как финитная функция из $\mathrm{Lip}\,1$, то и $f_k(x) = h_k(x)f(x) \in V_0^*(\mathbb{R})$ (см. п. 3).

А $f_k \in A(\mathbb{R})$ в силу следствия тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f_k(x_k+t) - f_k(x_k-t)|}{t}\,dt < \infty.$$

Но $f_k = f$ при $t \in [0,\delta]$, т.к. $h_k(x_k+t) = 1$. Необходимость указанных в теореме условий в окрестностях точек $\{x_k\},\ 1 \le k \le s$ доказана.

Представим теперь функцию f в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^s f_k(x) + f_{s+1}(x).$$

Здесь $f_{s+1}(x) = f(x)$ при $|x| \ge N = 2\delta + \max_k |x_k|$, а при $|x| \le N-\delta$ $f_{s+1} \in \mathrm{Lip}\,1$. Полагаем при $|x| \ge N$ и $|x| < N$, соответственно,

$$h_{s+1}(x) = 1, \quad h_{s+1}(x) = \frac{1}{\delta}(|x| - N + \delta)_+.$$

Тогда

$$f_{s+1}(x) = f_{s+1}(x)h_{s+1}(x) + f_{s+1}(x)(1 - h_{s+1}(x)).$$

Второе слагаемое, как финитная функция из $\mathrm{Lip}\,1$, принадлежит $A(\mathbb{R})$ $\cap V^*(\mathbb{R})$. А первое слагаемое в силу следствия принадлежит $A(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{N-\delta}^\infty \frac{|f_{s+1}(x)h_{s+1}(x) - f_{s+1}(-x)h_{s+1}(-x)|}{x}\,dx < \infty$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_N^\infty \frac{|f(x) - f(-x)|}{x}\,dx < \infty.$$

Необходимость и достаточность указанных условий доказана.

Отметим только, что условие Lip 1 вне окрестностей точек $\{x_k\}_1^s$ и ∞ можно заменить на $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$, или $V \cap \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 0$ (см., напр., [8, 7.2]). $\square$

Замечание 4.1. Та же формула об асимптотическом поведении преобразования Фурье (см. теорему A) доказана в [12] для более широкого класса функций. А так как и в этом случае $f \in V(\mathbb{R})$ и на любом отрезке $[\delta, N]$ $f \in \mathrm{Lip}\,1$, то теорема 1.1 справедлива и для того класса (доказательство не меняется). В частности, получается более общий результат при замене $V_0^*(\mathbb{R})$ на следующее условие: $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ и при некотором $p > 1$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_{|t| \ge x} |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Это достаточное условие принадлежит, по сути, Г. А. Фомину (1978) (см. [8, 7.2.9]). При $p \to \infty$ возвращаемся к $V_0^*(\mathbb{R})$, а чем меньше p, тем класс шире. Как отметил рецензент,это условие (для последовательностей) появилось ранее по другому поводу в статье [14].

Замечание 4.2. Поскольку представление функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье применяют для сравнения, напр., дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, то нужно иметь удобное достаточное условие принадлежности алгебре $A(\mathbb{R}^d)$ при любой размерности d. И такие результаты есть, конечно (см. [2]).

Например, условие $f \in V^*(\mathbb{R}^d)$ означает, что $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial_2}, \ldots, \frac{\partial^{d-1} f}{\partial x_1 \ldots \partial x_{d-1}}$ локально абсолютно непрерывны по $x_j \in \mathbb{R}$ $(1 \le j \le d)$ и их пределы при $|x| \to \infty$ равны нулю, а

$$\|f\|_{V^*(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{|u_j| \ge |x_j|, \\ 1 \le j \le d}} \left| \frac{\partial^d f(u)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} \right| dx < \infty.$$

Если $f \in V^*(\mathbb{R}^d)$ и чётная по $x_1, x_2, \ldots, x_d$, то

$$f \in A^*(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i(x,y)} dy, \ \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname*{ess\,sup}_{|u_j| \ge |x_j|} |g(u)|\, dx < \infty \right\}.$$

Сначала в [11, теорема 4] доказано обобщение теоремы Бёрлинга из упомянутой в начале статьи на функции d переменных $(d \ge 2)$

(доказательство отличается от приведенного в [4]), а затем из него получен приведенный только что результат для чётных функций.

А в статье [12] доказан и многомерный аналог теоремы А и её обобщений.

5. Применение к рядам Фурье

Преобразования Фурье еще применяют для исследования методов суммирования рядов Фурье: алгебру A — к вопросу сходимости и сравнения разных линейных средних рядов Фурье, а алгебру A^* (см. в начале статьи) — к вопросу о сходимости в точках Лебега (см. [8, 8.1 и 7.1.11]).

Норма компактного оператора-мультипликатора $\{\varphi(k)\}$ рядов Фурье из C в C равна $L(\mathbb{T})$-норме тригонометрического ряда при $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ (см. [8, 7.1]).

Теорема 5.1. *Если ряд* $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(k) e^{i(k,x)}$ *является рядом Фурье функции* Φ*, то*

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |\Phi(x)| \, dx = \min_{\varphi_0} \|\varphi_0\|_A,$$

где $\varphi_0(k) = \varphi(k)$ *при* $k \in \mathbb{Z}^d$.

Доказательство. Если

$$\varphi_0(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-i(x,y)} dx, \quad \|\varphi_0\|_A = \|g\|_{L(\mathbb{R})} < \infty,$$

то при $k \in \mathbb{Z}^d$

$$\varphi(k) = \varphi_0(k) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-i(k,x)} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d + 2\pi m} g(x) e^{-i(k,x)} dx$$
$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} g(x + 2\pi m) e^{-i(k,x)} dx = \int\limits_{\mathbb{T}^d} e^{-i(k,x)} \tilde{g}(x) \, dx,$$

где

$$\tilde{g}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} g(x + 2\pi m), \quad \|\tilde{g}\|_{L(\mathbb{T}^d)} = \int\limits_{\mathbb{T}^d} |\tilde{g}(x)| \, dx \le \|g\|_{L(\mathbb{R}^d)}.$$

Применена теорема Беппо Леви. Ряд для $\tilde{g}$ абсолютно сходится почти всюду на $\mathbb{T}^d$ и возможно почленное интегрирование. У двух функций Φ и $(2\pi)^d \tilde{g}$ из $L(\mathbb{T}^d)$ одинаковые коэффициенты Фурье. Поэтому

$\Phi(x) = (2\pi)^d \tilde{g}(x)$ почти всюду и

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |\Phi(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{T}^d} |\tilde{g}(x)|\, dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\, dx = \|\varphi_0\|_A.$$

С другой стороны, при $k \in \mathbb{Z}^d$

$$\varphi(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Phi(x) e^{-i(k,x)} dx,$$

и полагаем при $y \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi_0(y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Phi(x) e^{-i(x,y)} dx, \quad \|\varphi_0\|_A = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\Phi\|_{L(\mathbb{T}^d)}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 5.1. То же доказательство проходит и в более общем случае рядов Фурье меры на торе, когда φ — преобразование Фурье конечной на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначной борелевской меры.

Замечание 5.2. Вернемся к сравнению V^* и $W(\mathbb{R})$. В асимптотической формуле теоремы А в случае выпуклых функций можно еще считать, что $\mathcal{F}$ убывает на $\mathbb{R}_+$ (см. [8, 6.4.8.в]), а в случае более широкого класса V^* убывания может не быть.

Действительно. Предположим, что в теореме А можно считать, что $\mathcal{F}$ всегда убывает. Тогда функции из V^* принадлежат A и A^* (см. определение в начале статьи) одновременно. Но, как доказано ранее (см. [8, 8.1.3]), если 0 — точка Лебега функции $f \in L(\mathbb{T})$, $f(0) = 0$, а $\varphi \in A^*(\mathbb{R})$, то

$$\sup_{\substack{f:\frac{1}{x}\int\limits_0^x |f(t)|dt \le 1 \\ (x \ne 0)}} \left| \sum_k \varphi\Big(\frac{k}{n}\Big) \hat{f}_k e_k \right|_{x=0} \le C \|\varphi\|_{A^*(\mathbb{R})}.$$

Здесь $e_k = e^{ikx}$, а $\hat{f}_k$ — коэффициент Фурье f.

Это верно, в частности, для всех чётных финитных функций $\varphi \in \mathrm{Lip}\, 1$:

$$\varphi(x) = 0 \quad (|x| \ge 1),$$
$$\left| \varphi\Big(\frac{k}{n}\Big) - \varphi\Big(\frac{k+1}{n}\Big) \right| \le \frac{1}{n} \quad (-n \le k \le n-1,\ n \in \mathbb{N}).$$

Но верхняя грань по таким функциям φ с учётом преобразования Абеля равна ($S_k(\varphi, x)$ — частная сумма ряда Фурье функции φ)

$$\sup\left|\sum \varphi\Big(\frac{k}{n}\Big)\hat{f}_k e_k\right|_{x=0} = \sup\left|\sum \Big(\varphi\Big(\frac{k}{n}\Big) - \varphi\Big(\frac{k+1}{n}\Big)\Big) S_k(\varphi, 0)\right| = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |S_k(\varphi, 0)|,$$

а такая сумма в точке Лебега может не быть ограниченной по n, как доказано в [13].

Благодарности. Выражаю благодарность рецензенту за ряд замечаний, учтённых в статье.

Литература

[1] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, Москва, 1974.

[2] E. Liflyand, S. Samko and R. Trigub, *The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview* // Analysis and Math. Physis, Springer, **2** (2012), No. 1, 1–68.

[3] E. Belinsky, E. Liflyand and R. Trigub, *The Banach algebra A^* and its properties* // J. Fourier Anal. Appl., **3** (1997), 103–129.

[4] A. Beurling, *On spectral symthesis of bounded functions* // Acta Math., **81** (1949), No. 14, 225–238.

[5] С. А. Теляковский, *О достаточном условии Сидона для интегрируемости тригонометрических рядов* // Матем. зам., **14** (1973), 317–328.

[6] B. Sz.-Nagy, *Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier* // Acth Math. Hung., **1** (1948), No. 3, 14–52.

[7] W. Trebels, *Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner–Riesz kernel* // Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **20** (1975), 1173–1185.

[8] R. Trigub, E. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer-Springer, 2004.

[9] Р. М. Тригуб, *Мультипликаторы рядов Фурье и приближение функций полиномами в пространствах C и L* // Докл. АН СССР, **306** (1989), 292–296.

[10] Р. М. Тригуб, *Об интегральных нормах полиномов* // Матем. сб., **101** (1976), 315–333.

[11] Р. М. Тригуб, *Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе* // Изв. АН СССР, сер. матем., **44** (1980), No. 6, 1378–1408.

[12] E. Liflyand, *On asymptotics of Fourier transform for functions of certain classes* // Analysis Math., **19** (1993), 151–168.

[13] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *On the strong summability of Fourier Series* // Duke Math. J., **2** (1936), 354–381.

[14] D. Borwein, *Linear functionals connected with strong Cesáro summability* // J. London Math. Soc., **40** (1965), 628–634.

Сведения об авторах

Роальд Михайлович Тригуб

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская 24,
Донецк, 83001
Украина
E-Mail: `roald.trigub@gmail.com`