Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 2, 227 – 239

Предельные теоремы для общих одномерных краевых задач

Владимир А. Михайлец, Ганна А. Чеханова

(*Представлена А. М. Самойленко*)

Аннотация. В работе найдены достаточные условия непрерывности по параметру решений общих неоднородных краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений порядка $n \in \mathbb{N}$ на конечном интервале вместе со своими производными до порядка $n-1$ в равномерной норме, а также равномерной сходимости отвечающих этим задачам матриц Грина.

2010 MSC. 34M03, 35F45.

Ключевые слова и фразы. Общая краевая задача, непрерывность по параметру, равномерная сходимость вместе с производными, сходимость матриц Грина.

1. Введение

Вопросы предельного перехода в системах дифференциальных уравнений присутствуют во многих задачах анализа. Существенный вклад в развитие этого направления внесли работы И. И. Гихмана [1], М. А. Красносельского и С. Г. Крейна [2], Я. Курцвейля и З. Вореля [3], А. М. Самойленко [4, 5] о зависимости решений дифференциальных уравнений и систем от параметра. Часть их связана с обоснованием известного принципа усреднения Н. Н. Боголюбова и характеризуется общей точкой зрения на линейный и нелинейный случаи. Применительно к линейным задачам Коши эти результаты усилены в работах [6–10]. Более сложный случай общих линейных краевых задач для систем уравнений порядка $n = 1$ изучен в [11–14]. В настоящей работе аналогичные вопросы исследуются для систем уравнений произвольного порядка. Часть результатов являются новыми и при $n = 1$.

Статья поступила в редакцию 28.01.2014
Исследование первого автора поддержано грантом 03-01-12 совместных проектов НАН Украины и СО РАН

ISSN 1810 – 3200.

Пусть числа $m, n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим на конечном интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ векторное линейное дифференциальное уравнение порядка n

$$y^{(n)} + A_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \cdots + A_0(t) y = f(t), \tag{1.1}$$

где квадратные $(m \times m)$-матрицы $A_{j-1}(\cdot)$ и вектор-функция $f(\cdot)$ суммируемы на $[a, b]$. Решения уравнения (1.1) имеют абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$ и удовлетворяют равенству (1.1) почти всюду. Вместе с уравнением (1.1) рассмотрим общие неоднородные краевые условия

$$B_j y = c_j, \tag{1.2}$$

где векторы $c_j \in \mathbb{C}^m$, а линейные непрерывные операторы

$$B_j : C^{(n-1)}\left([a, b]; \mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m.$$

Из теоремы Ф. Рисса о линейных непрерывных функционалах на пространстве $C([a, b], \mathbb{C})$ можно вывести, что каждый из этих операторов допускает однозначное аналитическое представление

$$B_j y = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{jk} y^{(k-1)}(a) + \int_a^b \left[d\Phi_j(t)\right] y^{(n-1)}(t), \tag{1.3}$$

где α_{jk} — квадратные комплексные матрицы; $\Phi_j(t)$ — квадратная матрица-функция, элементы которой непрерывны справа на интервале (a, b) и имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$, $\Phi_j(a) = 0$, а интеграл понимается по Риману–Стилтьесу.

Дополнительные условия такого вида охватывают все классические виды краевых условий. В частности, задачи Коши, двухточечные и многоточечные, интегральные и смешанные краевые задачи.

Известно, что для однозначной везде разрешимости задачи (1.1)–(1.2) необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная краевая задача имела лишь тривиальное решение. В этом случае решение полуоднородной краевой задачи допускает интегральное представление

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s)\, ds, \tag{1.4}$$

где $G(t, s)$ — матрица Грина однородной краевой задачи. Формула обращения (1.4) определяет матрицу Грина неоднозначно. Мы будем выделять среди них одну.

Пусть теперь коэффициенты дифференциального уравнения, операторы B_j и правые части равенств (1.1) и (1.2) зависят от параметра ε, $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда решения $y(\cdot)$ и матрицы Грина также зависят от параметра. В данной работе найдены конструктивные достаточные условия, при которых

$$\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\|_{(n-1)} \to 0, \tag{1.5}$$

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_{\infty} \to 0, \tag{1.6}$$

где $\varepsilon \to 0+$, $\|\cdot\|_{(n-1)}$ — норма в пространстве $C^{(n-1)}([a,b];\mathbb{C}^m)$, а $\|\cdot\|_{\infty}$ — sup-норма.

2. Сходимость решений

Рассмотрим семейство общих неоднородных краевых задач:

$$y^{(n)}(t,\varepsilon) + A_{n-1}(t,\varepsilon)y^{(n-1)}(t,\varepsilon) + \dots + A_0(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \tag{2.1}$$

$$B_j(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c_j(\varepsilon), \quad j \in [n] := \{1,2,\dots,n\}, \tag{2.2}$$

где при фиксированном значении параметра ε выполнены предположения о коэффициентах $A_j(\cdot,\varepsilon)$, операторах $B_j(\varepsilon)$ и правых частях $f(\cdot,\varepsilon)$ и $c_j(\varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.2). Чтобы исследуемые задачи имели смысл, будем всюду далее считать, что *предельная однородная краевая задача* ($\varepsilon = 0$) *имеет только тривиальное решение*, т. е. невырождена. В этом случае предельная неоднородная краевая задача всегда имеет ровно одно решение.

Введем для краткости записи обозначения:

$$R_{j-1}(\cdot,\varepsilon) := A_{j-1}(\cdot,\varepsilon) - A_{j-1}(\cdot,0),$$

$$R^{\vee}(t,\varepsilon) := \int_a^t R(s,\varepsilon)\,ds, \quad f^{\vee}(t,\varepsilon) := \int_a^t f(s,\varepsilon)\,ds,$$

$\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве Лебега L_1 (вектор-функций или матриц-функций).

Основным результатом этого раздела является

Теорема 2.1. *Пусть при $\varepsilon \to 0+$ и $j \in [n]$ выполнены условия:*

(1) $\|R_{n-1}(\cdot;\varepsilon)R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$;

(2) $\|R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon)\|_{\infty} \to 0$;

(3) $B_j(\varepsilon)y \to B_j(0)y, \quad y \in C^{(n-1)}([a,b];\mathbb{C}^m); \quad c_j(\varepsilon) \to c_j(0)$;

(4) $\quad \|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1); \quad \|f^{\vee}(\cdot;\varepsilon) - f^{\vee}(\cdot;0)\|_\infty \to 0.$

Тогда для достаточно малых ε решения $y(\cdot,\varepsilon)$ задачи (2.1)–(2.2) *однозначно определены и для них выполняется предельное равенство* (1.5).

Отметим, что условие (1) теоремы заведомо выполнено, если

$$\|R_{n-1}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \cdot \|R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon)\|_\infty \to 0.$$

В частности, если верно предположение (2) и

$$\|A_{n-1}(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1).$$

При этом нет никаких ограничений на асимптотическое поведение функций $\|A_{j-1}(\cdot;\varepsilon)\|_1$ при $j \in [n-1]$.

Для доказательства теоремы 2.1 рассмотрим сначала случай $n=1$. Тогда семейство исследуемых нами неоднородных краевых задач можно переписать в виде

$$x'(t,\varepsilon) = \widetilde{A}(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + \widetilde{f}(t,\varepsilon), \tag{2.3}$$

$$\widetilde{B}(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon) = \widetilde{c}(\varepsilon), \tag{2.4}$$

где линейный непрерывный оператор

$$\widetilde{B}(\varepsilon) : C\left([a,b];\mathbb{C}^r\right) \to \mathbb{C}^r, \quad r \in \mathbb{N},$$

матрицы-функции $\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon) \in L_1\left([a,b];\mathbb{C}^{r\times r}\right)$, вектор-функции $\widetilde{f}(t,\varepsilon) \in L_1\left([a,b];\mathbb{C}^r\right)$, векторы $\widetilde{c}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^r$.

Обозначим через $\mathcal{M} = \mathcal{M}(a,b;r)$ класс всех суммируемых по t на $[a,b]$ $(r\times r)$-матричных функций $\widetilde{R}(t,\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, для которых матричное решение задачи Коши

$$Z'(t,\varepsilon) = \widetilde{R}(t,\varepsilon)Z(t,\varepsilon), \quad Z(a,\varepsilon) = I_r, \quad t \in (a,b)$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|Z(\cdot,\varepsilon) - I_r\|_\infty = 0,$$

где I_r — единичная $(r\times r)$-матрица.

Для решений задачи (2.3)–(2.4) в работе [14] доказана

Теорема 2.2. *Пусть при $\varepsilon \to 0+$ выполнены условия:*

(*i*) $\widetilde{R}(t,\varepsilon) := \widetilde{A}(t,\varepsilon) - \widetilde{A}(t,0) \in \mathcal{M}$;

(*ii*) $\widetilde{B}(\varepsilon)x \to \widetilde{B}(0)x, \quad x \in C\,([a,b];\mathbb{C}^r)\,; \quad \widetilde{c}(\varepsilon) \to \widetilde{c}(0);$

(*iii*) $\|\widetilde{f}(\cdot,\varepsilon) - \widetilde{f}(\cdot,0)\|_1 = O(1); \quad \|\widetilde{f}^{\vee}(\cdot;\varepsilon) - \widetilde{f}^{\vee}(\cdot;0)\|_\infty \to 0.$

Тогда для достаточно малых ε решения задач (2.3)–(2.4) *однозначно определены и справедливо предельное равенство*

$$\|x(\cdot,\varepsilon) - x(\cdot,0)\|_\infty \to 0. \tag{2.5}$$

Условие (*i*) теоремы 2.2 нельзя заменить более широким. Оно является необходимым для выполнения асимптотического равенства (2.5), если

$$\widetilde{B}(\varepsilon)x = \widetilde{B}(0)x = x(a), \quad \widetilde{f}(\cdot,\varepsilon) = \widetilde{f}(\cdot,0) = 0, \quad \widetilde{c}(\varepsilon) = \widetilde{c}(0).$$

Используемый в этом условии класс $\mathcal{M}$ исследован пока недостаточно полно и, по-видимому, не допускает конструктивного описания. Вместе с тем в работах [8, 9] установлена важная

Теорема 2.3. *Если при $\varepsilon \to 0+$ выполнено любое из* (*попарно неэквивалентных*) *условий:*

(α) $\|\widetilde{R}(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1);$

(β) $\|\widetilde{R}^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\widetilde{R}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0;$

(γ) $\|\widetilde{R}(\cdot;\varepsilon)\widetilde{R}^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0;$

(δ) $\|\widetilde{R}^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\widetilde{R}(\cdot;\varepsilon) - \widetilde{R}(\cdot;\varepsilon)\widetilde{R}^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0,$

то условие

$$\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon) - \widetilde{A}(\cdot,0) \in \mathcal{M} \tag{2.6}$$

равносильно условию

$$\|\widetilde{R}^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_\infty \to 0. \tag{2.7}$$

В работе [9] также показано, что само по себе условие (2.7) не является ни необходимым, ни достаточным для выполнения включения (2.6). Условие (α), в отличие от остальных, является линейным. Из условия (α) и соотношения (2.7) следует каждое из условий (β), (γ), (δ).

Наше доказательство теоремы 2.1 состоит в ее редукции к теореме 2.2 на основе теоремы 2.3. Отметим сразу, что если использовать условие (α) этой теоремы, то вместо условия (1) придется требовать, чтобы $\|A_{j-1}(\cdot,\varepsilon)\|_1 = O(1)$ при всех $j \in [n]$.

Дифференциальное уравнение (2.1) можно свести к уравнению (2.3) с $r = nm$, если положить:

$$\begin{aligned} x(\cdot,\varepsilon) &= \Big(y(\cdot,\varepsilon), y'(\cdot,\varepsilon), \ldots, y^{(n-1)}(\cdot,\varepsilon)\Big), \\ \widetilde{f}(\cdot,\varepsilon) &= (0,\ldots,0,f(\cdot,\varepsilon)) \in L_1\left([a,b];\mathbb{C}^{nm}\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Каждый из операторов $B_j(\varepsilon)$ в уравнении (2.2) допускает однозначное интегро-дифференциальное представление

$$B_j(\varepsilon)y := \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{jk}(\varepsilon) y^{(k-1)}(a) + \int_a^b \left[d\Phi_j(t,\varepsilon)\right] y^{(n-1)}(t), \tag{2.9}$$

где матрицы-функции $\Phi_j(t,\varepsilon)$ имеют ограниченное изменение на $[a,b]$, непрерывны справа на (a,b) и $\Phi_j(a,\varepsilon) = 0$.

Определим, исходя из формул (2.9), n^2 операторов $B_{jk}(\varepsilon)$: $C^{(n-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m$, положив для $j,k \in [n]$:

$$\begin{aligned} B_{jk}(\varepsilon)y &:= \alpha_{jk}(\varepsilon) y^{(k-1)}(a), \quad k \in [n-1], \\ B_{jn}(\varepsilon)y &:= \int_a^b \left[d\Phi_j(t,\varepsilon)\right] y^{(n-1)}(t). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Положим

$$\begin{aligned} \widetilde{B}(\varepsilon) &:= \begin{bmatrix} B_{11}(\varepsilon) & \ldots & B_{1n}(\varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1}(\varepsilon) & \ldots & B_{nn}(\varepsilon) \end{bmatrix}, \\ \widetilde{c}(\varepsilon) &:= \big(c_1(\varepsilon), \quad \ldots, \quad c_n(\varepsilon)\big) \in \mathbb{C}^{nm}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Лемма 2.1. *Неоднородная краевая задача* (2.1)–(2.2) *равносильна неоднородной краевой задаче* (2.3)–(2.4) *для системы* $r = nm$ *дифференциальных уравнений первого порядка, где блочные матрицы-функции*

$$\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \ldots & 0_m & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \ldots & 0_m & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \ldots & -A_{n-2} & -A_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

операторы $\widetilde{B}(\varepsilon)$ *и векторы* $\widetilde{c}(\varepsilon)$ *определены равенствами* (2.11), *а* $x(\cdot,\varepsilon)$ *и* $\widetilde{f}(\cdot,\varepsilon)$ *определены формулами* (2.8).

Доказательство леммы 2.1 носит стандартный характер и его можно опустить.

Отметим, что если однородная предельная краевая задача вида (2.1)–(2.2) имеет лишь тривиальное решение, то однородная краевая задача вида (2.3)–(2.4) при $\varepsilon = 0$ также обладает этим свойством.

Переходя к доказательству теоремы 2.1, проверим выполнение предположений теоремы 2.2 для систем (2.3)–(2.4), данные которых задаются формулами (2.8)–(2.12).

Справедливость условия (iii) и $\widetilde{c}(\varepsilon) \to \widetilde{c}(0)$ в условии (ii) очевидна.

Из теоремы Ф. Рисса (см., например, [15]) о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости линейных непрерывных функционалов на пространстве $C[a,b]$ следует, что при выполнении условия (3) теоремы 2.1

$$\begin{aligned}
&\alpha_{jk}(\varepsilon) \to \alpha_{jk}(0), \quad V_a^b \Phi_j(\cdot,\varepsilon) = O(1),\\
&\Phi_j^\vee(t,\varepsilon) \to \Phi_j^\vee(t,0), \quad t \in (a,b],\\
&\Phi_j(b,\varepsilon) \to \Phi_j(b,0), \quad \varepsilon \to 0+ .
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу той же теоремы вытекает, что

$$B_{jk}(\varepsilon)y \to B_{jk}(0)y, \quad y \in C^{(n-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right), \quad j,k \in [n].$$

Из чего следует, что операторы $\widetilde{B}(\varepsilon)$ сильно сходятся к оператору $\widetilde{B}(0)$.

Из равенства (2.12) видно, что блочные матрицы-функции $\widetilde{R}(\cdot,\varepsilon) \times \widetilde{R}^\vee(\cdot,\varepsilon)$ имеют вид

$$\widetilde{R}(\cdot,\varepsilon)\widetilde{R}^\vee(\cdot,\varepsilon)$$
$$=\begin{pmatrix}
0_m & 0_m & \dots & 0_m\\
0_m & 0_m & \dots & 0_m\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
R_{n-1}(\cdot,\varepsilon)R_0^\vee(\cdot,\varepsilon) & R_{n-1}(\cdot,\varepsilon)R_1^\vee(\cdot,\varepsilon) & \dots & R_{n-1}(\cdot,\varepsilon)R_{n-1}^\vee(\cdot,\varepsilon)
\end{pmatrix}.$$

Однако, в силу условий (1) и (2) теоремы 2.1

$$\|R_{n-1}(\cdot,\varepsilon)R_{j-1}^\vee(\cdot,\varepsilon)\|_1 \to 0.$$

Поэтому выполняется условие (γ) теоремы 2.3. Справедливость соотношения (2.7) этой теоремы обеспечена условием (2) теоремы 2.1.

Теорема 2.1 доказана.

При $n = 1$ для более широких классов краевых задач аналог теоремы 2.1 применительно к нормам каждого из соболевских пространств W_p^s, $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty)$ доказан в работе [16].

3. Сходимость матриц Грина

Рассмотрим сначала краевую задачу (1.1)–(1.2) при $n = 1$. В этом случае представление (1.3) оператора B_1 имеет вид

$$B_1 y = \int_a^b [d\Phi_1(t)]\, y(t).$$

Пусть $Y(t)$ — матрицант системы, т. е. матричное решение задачи Коши

$$Y'(t) = A_0(t)Y(t), \quad Y(a) = I_m.$$

Определим с помощью интеграла Римана–Стилтьеса матричную функцию

$$H_Y(t) := \int_a^t [d\Phi_1(s)]\, Y(s).$$

Она может иметь разрывы в точках разрыва элементов матрицы-функции $\Phi_1(\cdot)$. При этом, если однородная векторная краевая задача

$$y'(t) = A_0(t)y(t), \quad B_1 y = 0 \tag{3.1}$$

имеет только тривиальное решение, то

$$\det H_Y(b) \neq 0 \tag{3.2}$$

и существует обратная матрица $H_Y^{-1}(b)$.

Как и в случае вещественнозначных функций (см., например, [17]) верна следующая

Лемма 3.1. *Если выполнено неравенство* (3.2), *то матрица Грина однородной краевой задачи* (3.1) *существует и представима в виде*

$$G(t,s) = \begin{cases} Y(t)Y^{-1}(s) - Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s), & a \le s \le t \le b \\ -Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s), & a \le t < s \le b \end{cases} \tag{3.3}$$

Формула (3.3) по определению задает нормированную матрицу Грина. Она определена однозначно.

Рассмотрим теперь параметрическое семейство краевых задач (2.3)–(2.4) для систем дифференциальных уравнений первого порядка. Для них в работе [14] доказана

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* (i) *теоремы* 2.2 *и*

$$(iv)\ \ \|\widetilde{B}(\varepsilon)-\widetilde{B}(0)\|\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Тогда для достаточно малых ε *существуют нормированные матрицы Грина рассматриваемых задач и они удовлетворяют предельному равенству* (1.6).

Условие (iv) можно эквивалентным образом выразить в терминах задающих операторы $\widetilde{B}(\varepsilon)$ матриц-функций ограниченной вариации $\widetilde{\Phi}(t,\varepsilon)$:

$$(iv')\ \ V_a^b\left[\widetilde{\Phi}(\cdot,\varepsilon)-\widetilde{\Phi}(\cdot,0)\right]\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Как показано в [14], условие (iv) в теореме 3.1 нельзя заменить более слабым условием сильной сходимости операторов $\widetilde{B}(\varepsilon)$ к $\widetilde{B}(0)$.

Корректным расширением теоремы 3.1 является

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* (i) *теоремы* 2.2 *и при* $\varepsilon\to 0+$

$$(v)\ \ V_a^b\widetilde{\Phi}(\cdot,\varepsilon)=O(1),\quad \|\widetilde{\Phi}(\cdot,\varepsilon)-\widetilde{\Phi}(\cdot,0)\|_\infty\to 0.$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 3.1.

Используя теорему Ф. Рисса, нетрудно убедиться, что условие (v) влечет за собою сильную сходимость операторов $\widetilde{B}(\varepsilon)\to\widetilde{B}(0)$.

Доказательство. Формулу (3.3) удобно переписать в виде $G(t,s)=G_1(t,s)+G_2(t,s)$, где

$$G_1(t,s)=-Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s),$$

$$G_2(t,s)=\begin{cases}Y(t)Y^{-1}(s), & a\le s\le t\le b,\\ 0, & a\le t<s\le b.\end{cases}$$

Теперь нам достаточно показать, что при $\varepsilon\to 0+$

$$\|G_i(t,s;\varepsilon)-G_i(t,s;0)\|_\infty\to 0,\quad i=1,2. \tag{3.4}$$

В работе [14] показано, что предельные равенства (3.4) верны, если

$$\det H_Y(b,\varepsilon)\ne 0 \tag{3.5}$$

для достаточно малых ε и при $\varepsilon\to 0+$

$$\|Y(\cdot,\varepsilon)-Y(\cdot,0)\|_\infty\to 0,\quad \|Y^{-1}(\cdot,\varepsilon)-Y^{-1}(\cdot,0)\|_\infty\to 0, \tag{3.6}$$

$$\|H_Y(\cdot,\varepsilon) - H_Y(\cdot,0)\|_\infty \to 0. \tag{3.7}$$

Как показано в [14], соотношения (3.6) равносильны условию (i) теоремы 2.2. Там же установлено, что неравенство (3.5) вытекает из (3.6) и условия сильной сходимости операторов $\widetilde{B}(\varepsilon) \to \widetilde{B}(0)$. Последнее условие, как отмечалось, вытекает из условия (v).

Переходя к соотношению (3.7), имеем

$$\begin{aligned}
&\|H_Y(t,\varepsilon) - H_Y(t,0)\|_\infty \\
&\qquad = \left\| \int_a^t \left[d\widetilde{\Phi}(s,\varepsilon)\right] Y(s,\varepsilon) - \int_a^t \left[d\widetilde{\Phi}(s,0)\right] Y(s,0) \right\|_\infty \\
&\qquad\qquad \le \left\| \int_a^t \left[d\widetilde{\Phi}(s,\varepsilon)\right] [Y(s,\varepsilon) - Y(s,0)] \right\|_\infty \\
&\qquad\qquad\qquad + \left\| \int_a^t \left[d\widetilde{\Phi}(s,\varepsilon) - d\widetilde{\Phi}(s,0)\right] Y(s,0) \right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства.

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_a^t \left[d\widetilde{\Phi}(s,\varepsilon)\right] [Y(s,\varepsilon) - Y(s,0)] \right\|_\infty \\
&\qquad\qquad \le V_a^b \widetilde{\Phi}(s,\varepsilon) \cdot \|Y(\cdot,\varepsilon) - Y(\cdot,0)\|_\infty \to 0.
\end{aligned}$$

Оценим теперь второе слагаемое, используя формулу интегрирования по частям для интеграла Римана–Стилтьеса

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_a^t \left[d\widetilde{\Phi}(s,\varepsilon) - d\widetilde{\Phi}(s,0)\right] Y(s,0) \right\|_\infty \\
&\qquad \le \left\| \int_a^t \left[\widetilde{\Phi}(s,\varepsilon) - \widetilde{\Phi}(s,0)\right] Y'(s,0)\, ds \right\|_\infty \\
&\qquad\qquad + \left\| \left[\widetilde{\Phi}(t,\varepsilon) - \widetilde{\Phi}(t,0)\right] Y(t,0) \right\|_\infty \\
&\qquad \le \|\widetilde{\Phi}(\cdot,\varepsilon) - \widetilde{\Phi}(\cdot,0)\|_\infty \cdot \big(\|Y'(\cdot,0)\|_1 + \|Y(\cdot,0)\|_\infty\big) \to 0.
\end{aligned}$$

Теорема 3.2 доказана. □

Рассмотрим теперь параметрическое семейство краевых задач (2.1)–(2.2) с произвольным $n \in \mathbb{N}$. Из доказательства теоремы 2.1

следует, что при выполнении ее условий на коэффициенты $A_{j-1}(\cdot,\varepsilon)$ и операторы $B_j(\varepsilon)$ краевые задачи (2.1)–(2.2) однозначно разрешимы, если ε достаточно мало. Поэтому существуют заданные на квадрате $[a,b]^2$ матрицы Грина соответствующих однородных краевых задач. Каждая из них определяется из формулы обращения однозначно лишь с точностью до своих значений на подмножестве меры нуль. Это может изменить величину sup-нормы. В связи с этим вопрос о справедливости асимптотического равенства (1.6) нуждается в уточнении. Оно состоит в том, что среди всех матриц Грина краевой задачи специальным образом выделяется одна, которая именуется *нормированной.* При $n=1$ она задается формулой (3.3). Общий случай можно свести к уже рассмотренному.

При каждом фиксированном ε в силу леммы 2.1 однородная краевая задача вида (2.1)–(2.2) равносильна однородной системе nm дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентом $\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon)$ и матричным оператором $\widetilde{B}(\varepsilon)$ вида (2.10)–(2.11). Для этих систем нормированные матрицы Грина $\widetilde{G}(\cdot,\cdot;\varepsilon)$ уже определены. Каждая из них является матричной функцией размера $n\times n$, элементы которой сами являются матрицами-функциями размера $m\times m$, т. е.

$$\widetilde{G}(\cdot,\cdot;\varepsilon)=\begin{bmatrix}\widetilde{G}_{11}(\cdot,\cdot;\varepsilon) & \dots & \widetilde{G}_{1n}(\cdot,\cdot;\varepsilon)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \widetilde{G}_{n1}(\cdot,\cdot;\varepsilon) & \dots & \widetilde{G}_{nn}(\cdot,\cdot;\varepsilon)\end{bmatrix}.$$

Условимся называть *нормированной* матрицей Грина однородной краевой задачи вида (2.1)–(2.2) $(m\times m)$-матрицу-функцию

$$G(\cdot,\cdot;\varepsilon):=\widetilde{G}_{1n}(\cdot,\cdot;\varepsilon). \tag{3.8}$$

Это определение оправдано тем, что для каждой вектор-функции $f(\cdot,\varepsilon)\in L_1\left([a,b];\mathbb{C}^m\right)$ интеграл

$$y(t,\varepsilon)=\int\limits_a^b G(t,s;\varepsilon)f(s,\varepsilon)\,ds$$

существует и задает решение уравнения (2.1) с однородными краевыми условиями $B_j(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)=0$. Этот факт следует из леммы 2.1 и формул (2.12), (2.10), (2.11).

Из равенства (3.8) и уже доказанных теорем вытекает, что верна

Теорема 3.3. *Пусть при $\varepsilon\to 0+$ и $j\in[n]$ выполнены условия:*

(1) $\|R_{n-1}(\cdot;\varepsilon)R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon)\|_1\to 0;$

(2) $\|R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon)\|_{\infty} \to 0$;

(3) $\|B_j(\varepsilon) - B_j(0)\| \to 0$.

Тогда для достаточно малых ε определены нормированные матрицы Грина рассматриваемых задач и для них справедливо асимптотическое равенство (1.6).

Замечание 3.1. Условия теоремы 3.3 можно ослабить, заменив предположения (1) и (2) на $\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon) - \widetilde{A}(\cdot,0) \in \mathcal{M}(a,b;nm)$, а условие (3) на предположение (v) теоремы 3.2. Однако в такой форме теорема теряет свой конструктивный характер.

Примеры показывают, что матрицы-функции $G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)$ могут иметь разрывы. Их нельзя устранить переопределением матриц-функций на подмножестве меры нуль, в частности, иной нормировкой матрицы Грина.

В более слабой форме предельное соотношение (1.6), где вместо равномерной нормы присутствует норма пространства Лебега L_∞, использовалось в [18, 19] при исследовании равномерной резольвентной аппроксимации операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями операторами с гладкими потенциалами. Такие операторы возникают в задачах современной математической физики. Относительно дифференциальных операторов высокого порядка см. [20, 21].

Благодарности. Авторы признательны А. М. Самойленко за внимание и интерес к работе.

Литература

[1] И. И. Гихман, *По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова* // Укр. мат. журн., **4** (1952), No. 2, 215–219.

[2] М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, *О принципе усреднения в нелинейной механике* // Успехи мат. наук., **10** (1955), вып. 3, 147–153.

[3] Я. Курцвейль, З. Ворел, *О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра* // Чех. мат. журн., **7** (1957), No. 4, 568–583.

[4] А. М. Самойленко, *Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра* // Доп. АН УРСР, Сер. А., (1962), No. 10, 1290–1293.

[5] А. М. Самойленко, *Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра* // Укр. мат. журн., **14** (1962), No. 3, 289–298.

[6] W. T. Reid, *Some limit theorems for ordinary differential systems* // J. Different. Equat., **3** (1967), No. 3, 423–439.

[7] Z. Opial, *Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations* // J. Different. Equat., **3** (1967), No. 4, 571–579.

[8] А. Ю. Левин, *Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$* // Докл. АН СССР, **176** (1967), No. 4, 774–777.

[9] А. Ю. Левин, *Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I* // Вестн. Ярослав. ун-та, (1973), вып. 5, 105–132.

[10] Нгуен Тхе Хоан, *О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения, **29** (1993), No. 6, 970–975.

[11] И. Т. Кигурадзе, *Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ, **30** (1987), 3–103.

[12] M. Ashordia, *Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized differential equations* // Czechoslovak Math. J., **46** (1996), No. 3, 385–404.

[13] В. А. Михайлец, Н. В. Рева, *Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач* // Доп. НАН України, (2008), No. 9, 23–27.

[14] T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets, N. V. Reva, *Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems* // Ukr. Math. J., **65** (2013), No. 1, 77–90.

[15] С. М. Никольский, *Курс математического анализа*, т. II, издание четвертое, Москва: Наука, 1991, 544 с.

[16] T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets, *Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces* // Journal of Mathematical Sciences, **190** (2013), No. 4, 589–599.

[17] И. Т. Кигурадзе, *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975, 352 с.

[18] A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets, *Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials* // Math. Notes, **87** (2010), No. 2, 287–292.

[19] A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets, *Regularization of singular Sturm–Liouville equations* // Meth. Funct. Anal. and Top., **16** (2010), No. 2, 120–130.

[20] A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets, *Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives* // Ukr. Math. J., **63** (2012), No. 9, 1361–1378.

[21] A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets, K. Pankrashkin, *Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary-value problems* // Electron. J. Diff. Equ., (2013), No. 101, 1–16.

Сведения об авторах

Владимир Андреевич Михайлец, Ганна Алексеевна Чеханова

Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская 3,
01601, Киев-4,
Украина
E-Mail: `mikhailets@imath.kiev.ua`, `anna0024@web.de`