Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 4, 580 – 595

О стремлении к нулю решений дифференциального уравнения второго порядка с комплекснозначным потенциалом

Антон А. Лунёв, Леонид Л. Оридорога

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' + A(t)y = 0$ на полуоси с комплекснозначным потенциалом $A(\cdot)$. Получены достаточные условия на потенциал, при которых все решения этого уравнения стремятся к нулю на бесконечности. Показано, что условия, накладываемые на потенциал, близки к необходимым. По-видимому, один из результатов является новым даже в случае вещественного потенциала.

2010 MSC. 34D05, 34E20.

Ключевые слова и фразы. Дифференциальное уравнение, стремящееся к нулю решение, монотонная функция, признак Дирихле, ВКБ-оценки.

1. Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + A(t)y = 0, \tag{1.1}$$

где $A(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ — дифференцируемая функция. Если $A(t) > 0$, то это уравнение описывает колебание материальной точки единичной массы под действием восстанавливающей силы $-A(t)x$. Функция $A(t)$ играет роль изменяющегося во времени коэффициента эластичности.

Для неубывающей функции $A(t)$ известно [9, XIV.I.3], что любое решение уравнения (1.1) является осциллирующим и последовательные амплитуды осцилляции убывают. М. Бирнацкий [6] поставил

Статья поступила в редакцию 14.11.2011

ISSN 1810 – 3200.

вопрос о существовании нетривиального решения, амплитуды осцилляции которого стремятся к нулю, то есть решение $y(t)$, для которого

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0. \tag{1.2}$$

Миллу [16] ответил на этот вопрос, доказав, что такое решение существует, если $\lim_{t\to\infty} A(t) = \infty$. Он также привел пример ступенчатой функции A, для которой не все решения уравнения (1.1) исчезают на бесконечности.

Бирнацкий [6] поставил также следующую проблему: какие дополнительные условия, кроме монотонного стремления к бесконечности при $t \to \infty$, надо наложить на функцию $A(t)$, чтобы все решения уравнения (1.1) исчезали на бесконечности? Первые результаты в этом направлении были получены самим Бирнацким [6], Миллу [16], Дж. Армеллини [4] и Дж. Сансоне [17]. Наиболее сильным с теоретической точки зрения является результат Сансоне.

Теорема [Дж. Сансоне]. *Пусть $A \in C^1[0,\infty)$, $A(t) \nearrow \infty$ при $t \to \infty$ и для любой последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что*

$$t_n \nearrow \infty \quad \text{при } n \to \infty \quad \text{и} \quad t_{n+1} - t_n \le t_n - t_{n-1},\ n > 1, \tag{1.3}$$

имеет место соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \min_{t_n \le t \le t_{n+1}} \frac{A'(t)}{A(t)} = +\infty. \tag{1.4}$$

Тогда все решения уравнения (1.1) *стремятся к нулю при $t \to \infty$.*

Л. А. Гусаров [1] доказал, что все решения уравнения (1.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$ если $A(t) \nearrow \infty$ при $t \to \infty$ и A' — функция ограниченной вариации на некоторой полупрямой $[t_0, \infty]$. При этих ограничениях $A'(t)$ имеет конечный неотрицательный предел при $t \to \infty$.

В работе [11] утверждается, что, если $A(t)$ неубывающая неограниченная функция класса C^1, то все решения уравнения (1.1) исчезают на бесконечности. Однако сразу же после опубликования работы автор признал свое доказательство неверным [12]. И вскоре во многих работах появились примеры, опровергающие это утверждение [2, 7, 8, 18].

Различные достаточные условия на функцию A, обеспечивающие стремление к нулю на бесконечности всех решений уравнения (1.1), получены также в работах [5, 10, 14, 15]. Отметим, что все полученные результаты такого рода требуют, чтобы потенциал A стремился к бесконечности регулярно. Грубо говоря, это значит, что весь рост функции A не может быть сосредоточен на малом в каком-то смысле множестве. Хороший обзор и сравнение различных понятий регулярного роста сделал Дж. Маки [13].

Отметим также, что в работе В. Б. Лидского, Б. В. Федосова [2] рассматривается уравнение вида (1.1), где $A(t)$ — положительно определенная монотонно возрастающая оператор-функция в гильбертовом пространстве H, а $y(t)$ — вектор-функция со значениями в H. Были найдены достаточные условия на потенциал $A(t)$, при которых все решения этого уравнения стремятся к нулю по норме при $t \to \infty$. В скалярном случае эти условия имеют вид: $A(0) > 0$ и $A'(t) \geq \alpha(t)A(t)$, где $\alpha(t) \searrow 0$ при $t \to \infty$ и $\int_0^\infty \alpha(t)\,dt = \infty$. Другими словами, кроме монотонного стремления потенциала к бесконечности, его логарифмическая производная должна иметь несуммируемую на полуоси монотонно стремящуюся к нулю неотрицательную миноранту.

Целью данной работы является получение достаточных условий на комплекснозначный потенциал $A(t)$, при которых все решения уравнения (1.1) стремятся к нулю на бесконечности.

При этом получено два существенно различных результата. Один из них обобщает результат работы [2], второй же основан на ВКБ-оценках (см. [3, II.2]). В доказательстве первого результата мы следовали схеме доказательства результата В. Б. Лидского, Б. В. Федосова. Показано, что ни один из них не является следствием другого. Также приводятся примеры функций, показывающие, что дополнительные условия, накладываемые на потенциал в обеих теоремах, близки к необходимым.

Перейдем к формулировке основных результатов.

Положим $A_R := \operatorname{Re} A$, $A_I := \operatorname{Im} A$.

Теорема 1.1. *Пусть $A(t)$ удовлетворяет условиям*

$$A_R(0) > 0, \tag{1.5}$$

$$A_R'(t) \geq \alpha(t)A_R(t), \tag{1.6}$$

где

$$\alpha(t) \searrow 0 \quad \text{при } t \to \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty \alpha(t)\,dt = \infty, \tag{1.7}$$

$$|A_I(t)| \leq C\frac{A_R'(t)}{A_R(t)} \tag{1.8}$$

для некоторой константы $C > 0$,

Тогда все решения уравнения (1.1) *стремятся к нулю при* $t \to \infty$, *и*

$$\int_0^\infty \alpha(t)|y(t)|^2\,dt < \infty \tag{1.9}$$

для любого решения $y(t)$ *уравнения* (1.1).

Замечание 1.1. По лемме 2.1 из условий (1.5), (1.6) и (1.7) следует, что $A_R(t) \nearrow +\infty$ при $t \to \infty$. Поэтому условие (1.8) корректно.

Теорема 1.2. *Пусть* $A(t)$ *удовлетворяет условиям*

(*i*) $A(t) \in C^2(0,+\infty)$;

(*ii*) $A_R(t) > 0$ *при* $t > 0$ *и* $A_I(t)$ *не меняет знак на* $(0,\infty)$;

(*iii*) *сходятся интегралы*

$$\int_0^{+\infty} \frac{|A''(t)|}{|A(t)|^{5/2}}\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{|A'(t)|^2}{|A(t)|^{7/2}}\,dt \tag{1.10}$$

(*iv*) $A(t) \to \infty$ *при* $t \to +\infty$;

(*v*)

$$\int_0^{+\infty} \frac{|A_I(t)|}{\sqrt{A_R(t)}}\,dt < +\infty. \tag{1.11}$$

Тогда все решения уравнения (1.1) *стремятся к нулю на бесконечности.*

2. Доказательство теоремы 1.1

Лемма 2.1. *Пусть дифференцируемая функция* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям*

$$f(0) > 0, \tag{2.1}$$

$$f'(t) \geq \alpha(t) f(t), \tag{2.2}$$

где

$$\alpha(t) \searrow 0 \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \alpha(t)\,dt = \infty, \tag{2.3}$$

Тогда $f(t) \nearrow +\infty$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть существует t_0 такое, что $f(t_0) = 0$. Возьмем минимальное такое t_0. Ясно, что тогда $f(t) > 0$ при $t < t_0$. Значит, из условия (2.2) следует, что $f'(t) \geq \alpha(t)f(t) > 0$ при $t < t_0$. Но по теореме Лагранжа найдется точка $\xi \in (0, t_0)$ такая, что $f'(\xi)(t_0 - 0) = f(t_0) - f(0) = -f(0) < 0$. Противоречие.

Значит, $f(t) \neq 0$ при $t > 0$. Откуда $f(t) > 0$ при $t > 0$. Тогда $f'(t) \geq \alpha(t)f(t) > 0$ при $t > 0$. Поэтому $f(t)$ возрастает на $[0, \infty)$. Далее, в силу положительности $f(t)$ мы можем поделить на него в неравенстве (2.2). Проинтегрируем полученное неравенство от 0 до x

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \geq \int_0^x \alpha(t)\,dt$$

или

$$\ln f(x) - \ln f(0) \geq \int_0^x \alpha(t)\,dt.$$

А так как $\int_0^\infty \alpha(t)\,dt = \infty$, то $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. □

Пусть $M > 1$ — некоторое положительное число. Мы выберем его позже. По лемме 2.1 найдется $t_0 > 0$ такое, что $A_R(t) \geq 2M$ при $t \geq t_0$. Рассмотрим при $t \geq t_0$ функцию

$$B(t) := \frac{1}{A_R(t) - M}. \tag{2.4}$$

Ясно, что

$$\frac{1}{A_R(t)} \leq B(t) \leq \frac{2}{A_R(t)} \tag{2.5}$$

при $t \geq t_0$, $B(t)$ ограничена, $\lim_{t\to\infty} B(t) = 0$ и $B'(t) < 0$.

Теорему достаточно доказать для базисных решений, т.е. для y_1, удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1(t_0) = 0, \quad y_1'(t_0) = 1, \tag{2.6}$$

и для y_2, удовлетворяющего начальным условиям

$$y_2(t_0) = 1, \quad y_2'(t_0) = 0. \tag{2.7}$$

Все остальные решения являются линейной комбинацией базисных, и для них теорема также выполнится.

Лемма 2.2. *Пусть* $y(t)$ *— базисное решение уравнения* (1.1). *Тогда функции* $B|y'|^2$ *и* $A_R B|y|^2$ *ограничены. Кроме того, сходятся интегралы*

$$\int_{t_0}^{\infty} B'|y|^2\,dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} B'|y'|^2\,dt \quad \text{и} \quad \int_{t_0}^{\infty} B'|\overline{y}y'|\,dt.$$

Доказательство. Умножим (1.1) на $B\overline{y}'$ и проинтегрируем от t_0 до t

$$\int_{t_0}^{t} B\overline{y}'y''\,ds + \int_{t_0}^{t} AB\overline{y}'y\,ds = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$B|y'|^2\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} B\overline{y}''y'\,ds - \int_{t_0}^{t} B'|y|^2\,ds$$
$$+ AB|y|^2\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} AB\overline{y}y'\,ds - \int_{t_0}^{t} (AB)'|y|^2\,ds = 0. \quad (2.8)$$

Учитывая (1.1), имеем

$$\int_{t_0}^{t} B\overline{y}''y'\,ds + \int_{t_0}^{t} AB\overline{y}y'\,ds = \int_{t_0}^{t} By'(\overline{y}'' + A\overline{y})\,ds$$
$$= \int_{t_0}^{t} By'(-\overline{Ay} + A\overline{y})\,ds = 2i\int_{t_0}^{t} A_I B\overline{y}y'\,ds. \quad (2.9)$$

Далее, умножим (1.1) на $\overline{y}$ и проинтегрируем от t_0 до t

$$\int_{t_0}^{t} y''\overline{y}\,ds + \int_{t_0}^{t} A|y|^2\,ds = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$y'\overline{y}\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \left(|y'|^2 - A|y|^2\right)\,ds.$$

Так как $y(t)$ — базисное решение, то $y'(t_0)\overline{y(t_0)} = 0$. С учетом этого умножим полученное равенство на i и возьмем действительную часть

$$\operatorname{Re} iy'\overline{y} = \int\limits_{t_0}^{t} A_I |y|^2 \, ds. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9) в (2.8), извлекая действительную часть из полученного равенства и учитывая (2.10) и тот факт, что

$$(A_R B)' = MB',$$

получим

$$\begin{aligned} B|y'|^2 + A_R B|y|^2 - \int\limits_{t_0}^{t} B'|y'|^2 \, ds \\ - \int\limits_{t_0}^{t} B'|y'|^2 \, ds - \int\limits_{t_0}^{t} (M-1)B'|y|^2 \, ds \\ - 2\int\limits_{t_0}^{t} A_I(s)B(s) \int\limits_{t_0}^{s} A_I(\tau)|y(\tau)|^2 \, d\tau \, ds = \mathrm{const}\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Первые четыре слагаемых в (2.11) положительны. Покажем, что при соответствующем выборе M сумма двух последних слагаемых также положительна. Обозначим для удобства $N = M - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} &- \int\limits_{t_0}^{t} NB'|y|^2 \, ds - 2\int\limits_{t_0}^{t} A_I(s)B(s) \int\limits_{t_0}^{s} A_I(\tau)|y(\tau)|^2 \, d\tau \, ds \\ &= - \int\limits_{t_0}^{t} NB'|y|^2 \, ds - 2\int\limits_{t_0}^{t} A_I(s)|y(s)|^2 \int\limits_{s}^{t} A_I(\tau)B(\tau) \, d\tau \, ds \\ &= - \int\limits_{t_0}^{t} |y|^2 \left(NB'(s) + 2A_I(s) \int\limits_{s}^{t} A_I(\tau)B(\tau) \, d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

Достаточно показать, что выражение в скобках отрицательно. В силу неравенств (1.8) и (2.5) имеем

$$\left|2A_I(s)\int\limits_s^t A_I(\tau)B(\tau)\,d\tau\right| \le 2\,|A_I(s)|\int\limits_s^t |A_I(\tau)|\,B(\tau)\,d\tau$$

$$\le 4C^2\frac{A_R'(s)}{A_R(s)}\int\limits_s^\infty \frac{A_R'(\tau)}{A_R^2(\tau)}\,d\tau = 4C^2\frac{A_R'(s)}{A_R(s)}\left(-\frac{1}{A_R}\bigg|_s^\infty\right)$$

$$= 4C^2\frac{A_R'(s)}{A_R^2(s)} \le 4C^2\frac{A_R'(s)}{(A_R(s)-M)^2} = -4C^2B'(s).$$

Так как $B'(s)<0$, то при $N>4C^2$ выражение в скобках отрицательно.

Мы получили в (2.11) сумму пяти положительных слагаемых, которые в сумме дают константу. Значит, они ограничены.

Рассмотрим теперь $\int_{t_0}^t B'|\overline{y}y'|\,ds$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\int\limits_{t_0}^t |B'\overline{y}y'|\,ds \le \left(-\int\limits_{t_0}^t B'|y|^2\,ds\right)^{\frac12}\cdot\left(-\int\limits_{t_0}^t B'|y'|^2\,ds\right)^{\frac12}.$$

Откуда и следует сходимость интеграла в левой части. Лемма доказана. □

Из равенства (2.11) следует, что

$$f(t) = B|y'|^2 + A_RB|y|^2 \quad - \tag{2.12}$$

монотонно убывающая положительная функция. Следовательно, существует

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = a \ge 0.$$

Мы докажем, что $a=0$.

Лемма 2.3. *Интеграл*

$$\int\limits_0^\infty \varphi(t)\,dt,$$

где

$$\varphi(t) = B|y'|^2 - A_RB|y|^2, \tag{2.13}$$

сходится.

Доказательство. Умножим (1.1) на $B\overline{y}$ и проинтегрируем от t_0 до t

$$\int_{t_0}^{t} B\overline{y}y''\,ds + \int_{t_0}^{t} AB|y|^2\,ds = 0.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям и перенося часть слагаемых влево, получим

$$B\overline{y}y'\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} B'\overline{y}y'\,ds = \int_{t_0}^{t} B|y'|^2\,ds - \int_{t_0}^{t} AB|y|^2\,ds. \tag{2.14}$$

Интеграл $\int_{t_0}^{t} B'|\overline{y}y'|\,ds$ имеет предел при $t \to \infty$ в силу леммы 2.2. Далее,

$$2B|\overline{y}y'| \le \sqrt{A_R}B|y|^2 + \frac{B|y'|^2}{\sqrt{A_R}} = \frac{f(t)}{\sqrt{A_R}} \to 0,$$

так как $f(t) \to a$, а $\sqrt{A_R(t)} \to \infty$.

Следовательно, левая часть в (2.14) имеет предел при $t \to \infty$. Извлекая реальную часть из обеих частей, получим, что интеграл

$$\int_{t_0}^{t} \left(B|y'|^2 - A_R B|y|^2\right)\,ds$$

имеет предел при $t \to \infty$. Что и требовалось доказать. □

Теперь закончим доказательство теоремы 1.1.

Из (2.12) и (2.13) следует, что

$$B|y'|^2 = \frac{1}{2}\left(f(t) + \varphi(t)\right).$$

В силу (1.6)

$$-B'(t) = \frac{A_R'(t)}{(A_R(t) - M)^2} \ge \frac{\alpha(t)}{A_R(t) - M} = \alpha(t)B(t).$$

Таким образом,

$$-\int_{t_0}^{t} B'|y'|^2\,ds \ge \int_{t_0}^{t} \alpha(t)B|y'|^2\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \alpha(t)f(t)\,ds + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \alpha(t)\varphi(t)\,ds. \tag{2.15}$$

Интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\varphi(t)\,dt$$

сходится по признаку Дирихле. Интеграл

$$-\int_{t_0}^{\infty} B'|y'|^2\,dt$$

сходится по лемме 2.2. Но тогда из (2.15) следует сходимость интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)f(t)\,dt.$$

Так как $f(t)$ — монотонно убывает, то $f(t) \geq a$, и, значит,

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)f(t)\,dt \geq a\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\,dt,$$

что возможно только при $a = 0$ в силу (1.7).

Таким образом, $f(t) \to 0$. В силу (2.12) выполнено неравенство $A_R B|y|^2 \leq f(t)$. Откуда $A_R B|y|^2 \to 0$. Но $A_R B = \frac{A_R}{A_R - M} \to 1$, следовательно $|y|^2 \to 0$. Кроме того, из (2.12) и сходимости интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)f(t)\,dt$$

следует сходимость интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} A_R B\alpha(t)|y|^2\,dt,$$

что эквивалентно сходимости интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)|y|^2\,dt,$$

так как подынтегральная функция положительная и $A_R B \to 1$. Теорема полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 1.2

Для доказательства воспользуемся ВКБ-оценками — приближенными решениями уравнения (1.1). Для их применимости необходимо показать, что ветвь $\sqrt{-A(t)}$ такая, что $\operatorname{Re}\sqrt{-A(t)} \geq 0,\ t > 0$, является функцией класса C^2. Ясно, что для этой ветви

$$\operatorname{Re}\sqrt{-A} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{A_R^2 + A_I^2} - A_R\right)} = \frac{|A_I|}{\sqrt{2\left(\sqrt{A_R^2 + A_I^2} + A_R\right)}}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Im}\sqrt{-A} = S_I\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{A_R^2 + A_I^2} + A_R\right)}, \quad (3.2)$$

где число $S_I = 1$, если $A_I(t) \geq 0,\ t > 0$, и $S_I = -1$ в противном случае.

Так как $A \in C^2(0,\infty)$ и $A_R(t) > 0,\ t > 0$, то функция

$$\sqrt{\sqrt{A_R^2 + A_I^2} + A_R}$$

является положительной функцией класса C^2 на $(0,\infty)$. Так как $A_I(t)$ не меняет знак на $(0,\infty)$, то $|A_I| \in C^2(0,\infty)$. Из двух последних замечаний и формул (3.1), (3.2) следует, что данная ветвь $\sqrt{-A}$ является дважды непрерывно дифференцируемой на полуоси $(0,\infty)$. Во всех дальнейших формулах берется именно эта ветвь $\sqrt{-A}$.

Введем обозначения

$$\alpha(t) = \frac{1}{8(-A)^{5/2}}\left(\left(\sqrt{-A}\right)''\sqrt{-A} - \frac{5}{4}\left(\left(\sqrt{-A}\right)'\right)^2\right), \quad (3.3)$$

$$\rho(t_0, t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\alpha(s)|\, ds, \quad (3.4)$$

$$\tilde{y}_1 = (-A(t))^{-1/4} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{-A(s)}\, ds\right), \quad (3.5)$$

$$\tilde{y}_2 = (-A(t))^{-1/4} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{-A(s)}\, ds\right). \quad (3.6)$$

Тогда из [3] имеем, что если выполнено условие

$$\rho(0, +\infty) < \infty, \quad (3.7)$$

то уравнение (1.1) имеет решения y_1 и y_2 такие, что

$$\left|\frac{y_1(t)}{\tilde{y}_1(t)} - 1\right| \le 2(e^{2\rho(0,t)} - 1), \tag{3.8}$$

$$\left|\frac{y_2(t)}{\tilde{y}_2(t)} - 1\right| \le 2(e^{2\rho(t,+\infty)} - 1). \tag{3.9}$$

Проверим справедливость условия (3.7) в нашем случае. Преобразовав выражение (3.3), получим

$$\alpha(t) = \frac{iA''(t)}{16A^{5/2}(t)} - \frac{9i(A'(t))^2}{128A^{7/2}(t)}. \tag{3.10}$$

Подставляя это равенство в (3.4), получим

$$\rho(t_0,t) \le \frac{1}{16}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|A''(s)|}{|A(s)|^{5/2}}\,ds + \frac{9}{128}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|A'(s)|^2}{|A(s)|^{7/2}}\,ds.$$

Используя (1.10) получаем, что выполнено (3.7).

Покажем теперь, что $\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2 \to 0$, при $t \to \infty$. В силу (3.1) и (1.11) имеем

$$\left|\exp\left(\int\limits_0^\infty \sqrt{-A(t)}\,dt\right)\right| = \exp\left(\int\limits_0^\infty \operatorname{Re}\sqrt{-A(t)}\,dt\right)$$
$$\le \exp\left(\int\limits_0^\infty \frac{|A_I(t)|}{2\sqrt{A_R(t)}}\,dt\right) < +\infty.$$

Далее, учитывая (3.5) и (3.6), а так же то, что $A(t) \to \infty$, получим, что $\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2 \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда, по свойствам (3.8) и (3.9), с учетом того, что выполнено (3.7), следует, что $y_1,\ y_2 \to 0$ при $t \to \infty$. Эти решения являются базисными, поэтому теорема верна для всех решений уравнения (1.1).

4. Независимость условий теорем

В этом разделе мы докажем, что ни одна из доказанных теорем не является следствием другой.

Сразу отметим, что если выполнены все условия теоремы 1.1, то условие (1.11) теоремы 1.2 выполнено автоматически. Действительно,

$$\int\limits_0^\infty \frac{|A_I(t)|}{\sqrt{A_R(t)}}\,dt \le C\int\limits_0^\infty \frac{A_R'(t)}{A_R(t)^{3/2}}\,dt = \frac{-C}{\sqrt{A_R(t)}}\Bigg|_0^\infty = \frac{C}{\sqrt{A_R(0)}} < \infty,$$

так как $A_R(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Если $A(\cdot) \in C^2(0,+\infty)$ и A_I не меняет знак на $(0,\infty)$, то все условия теоремы 1.2, кроме условия (1.10) также выполнены. Поэтому нарушаться может только условие (1.10).

Рассмотрим действительную функцию

$$A_1(t) = \int\limits_0^t (2 + \sin e^s)\, ds.$$

Покажем, что A_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1, но при этом не удовлетворяет условию (1.10). Ясно, что

$$A_1(t) \nearrow +\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \qquad t \le A_1(t) \le 3t, \qquad 1 \le A_1'(t) \le 3. \tag{4.1}$$

Положим

$$\alpha(t) = \frac{1}{3t} \searrow 0. \tag{4.2}$$

Тогда из (4.1) и (4.2) следует, что

$$\alpha(t) \le \frac{A_1'(t)}{A_1(t)} \quad \text{и} \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \alpha(t)\, dt = +\infty.$$

Таким образом, $A_1(t)$ действительно удовлетворяет условиям теоремы 1.1. С другой стороны

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{|A_1''(t)|}{|A_1(t)|^{5/2}}\, dt \ge \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{e^t\left|\cos e^t\right|}{t^{5/2}}\, dt = \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{|\cos\tau|}{\ln^{5/2}\tau}\, d\tau = +\infty,$$

то есть условие (1.10) не выполняется.

Теперь рассмотрим функцию

$$A_2(t) = t^3 + it^{-1/4}.$$

Покажем, что A_2 удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2, но при этом не удовлетворяет условию (1.8) теоремы 1.1. В проверке нуждаются лишь условия (1.10) и (1.11). Заметим, что

$$\frac{|A_2''(t)|}{|A_2(t)|^{5/2}} = \frac{\left|6t + 5i/16 \cdot t^{-9/4}\right|}{\left|t^3 + it^{-1/4}\right|^{5/2}} \sim \frac{6t}{t^{15/2}} = \frac{6}{t^{13/2}} \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

и

$$\frac{|A_2'(t)|^2}{|A_2(t)|^{7/2}} = \frac{\left|3t^2 - i/4 \cdot t^{-5/4}\right|^2}{\left|t^3 + it^{-1/4}\right|^{7/2}} \sim \frac{9t^4}{t^{21/2}} = \frac{9}{t^{13/2}}, \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

Отсюда следует, что интегралы в (1.10) сходятся.

Далее имеем $A_R = \operatorname{Re} A_2 = t^3$ и $A_I = \operatorname{Im} A_2 = t^{-1/4}$. Поэтому

$$\frac{|A_I(t)|}{\sqrt{A_R(t)}} = \frac{1}{t^{5/4}},$$

откуда следует, что интеграл в (1.11) также сходится. С другой стороны

$$\frac{A_R(t)|A_I(t)|}{A_R'(t)} = \frac{t^{3/4}}{3} \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

поэтому условие (1.8) не выполнено.

Наконец, рассмотрим вещественную функцию

$$A_3(t) = t + \sin t.$$

Так как $A_3'(t) = 1+\cos t = 0$ при $t = \pi(2n+1),\ n \in \mathbb{N}$, то условия (1.6) и (1.7) не могут выполняться одновременно, поэтому теорема 1.1 не применима в этом случае. С другой стороны легко проверить выполнимость всех условий теоремы 1.2. Отметим, что теорема Сансоне также не применима для такой функции $A(t)$. Действительно, если взять $t_n = an$, где $a > 2\pi$, то последовательность $\{t_n\}$ удовлетворяет условию (1.3), но любой отрезок $[t_{n-1}, t_n]$ будет содержать ноль производной и поэтому ряд в (1.4) будет нулевым.

Из вышесказанного следует, что теоремы 1.1 и 1.2 не вытекают одна из другой, а дополняют друг друга даже в случае вещественного потенциала. При этом, теорема 1.2, по-видимому, является новой даже в случае $A = \overline{A}$.

5. Существенность условий теорем

Пример функции, показывающий, что условие (1.6) теоремы 1.1 является существенным, приведен в [2]. Покажем, что если заменить условие (1.11) на очень близкое к нему условие

$$\int_0^\infty \frac{|A_I|}{A_R^{1/2+\varepsilon}}\, dt < \infty, \tag{5.1}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольное число, то утверждение теоремы 1.2 становится не верным.

Пусть A_R — произвольная положительная монотонно стремящаяся к бесконечности функция класса C^3. Положим

$$A_I = -\sqrt{A_R}\,' = \frac{-A_R'}{2\sqrt{A_R}} \le 0.$$

Так как $A_R(t) \to \infty$, то

$$\int\limits_0^\infty \frac{|A_I|}{A_R^{1/2+\varepsilon}}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{A_R'}{2A_R^{1+\varepsilon}}\,dt = \frac{1}{-2\varepsilon A_R^\varepsilon}\Big|_0^\infty < \infty.$$

Следовательно $A(t)$ удовлетворяет условию (5.1). Ясно, что $A(t)$ также удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iv) теоремы 1.2.

Теперь покажем, что функция

$$y(t) = \exp\left(i\int\limits_0^t \sqrt{A_R(s)}\,ds\right)$$

является решением уравнения (1.1). Заметим, что

$$y'(t) = i\sqrt{A_R(t)}\exp\left(i\int\limits_0^t \sqrt{A_R(s)}\,ds\right) = i\sqrt{A_R(t)}y(t).$$

Поэтому

$$y'' = \left(i\sqrt{A_R}\,y\right)' = \left(i\sqrt{A_R}\right)^2 y + i\sqrt{A_R}'y = -A_R y - iA_I y = -Ay.$$

Но $|y(t)| = 1$, поэтому $y(t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$.

Таким образом, если $A(t)$ вдобавок удовлетворяет еще и условию (1.10), то существенность условия (1.11) показана. Условие (1.10) для $A(t)$ выполнено, например, если $A_R(t) = t^n$, $A_R(t) = e^t$ или $A_R(t) = \log(t+1)$.

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность М. М. Маламуду за постановку задачи и полезные советы при выполнении работы.

Литература

[1] Л. А. Гусаров, *О стремлении к нулю решений линейного дифференциального уравнения второго порядка* // ДАН СССР, **21** (1950), No. 1, 9–12.

[2] В. Б. Лидский, Б. В. Федосов, *О стремлении к нулю решений дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами* // Математические заметки, **2** (1967), No. 2, 307–314.

[3] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1983.

[4] G. Armellini, *Sopra un'equazione differenziale della dinamica* // Rend. Accad. Naz. Lincei, **21** (1935), 111–116.

[5] F. V. Atkinson and J. W. Macki, *On regular growth and asymptotic stability* // Rocky Mountain J. Math., **16** (1986), No. 1, 111–118.

[6] M. Biernacki, *Sur l'equation differentielle* $x'' + A(t)x = 0$ // Prace Mat. Fiz., **40** (1933), 163–171.

[7] H. A. DeKleine, *A counterexample to a conjecture in second-order linear equations* // Michigan Math. Joutnal, **17** (1970), No. 1, 29–32.

[8] A. Galbraith, E. J. McShane and G. Parrish, *On the solutions of linear second-order differential equations* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **53** (1965), 247–249.

[9] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.

[10] L. Hatvani, *The growth condition guaranteeing small solutions for a linear oscillator with an increasing elasticity coefficient* // Georgian Math. Journal, **14** (2007), No. 2, 269–278.

[11] W. Leighton, *Behavior of solutions of a linear differential equation of second order* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **52** (1964), No. 3, 830–832.

[12] W. Leighton, *Erratum: Behavior of Solutions of a Linear Differential Equation of Second Order* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **52** (1964), No. 4, 1129.

[13] J. W. Macki, *Regular growth and zero-tending solutions*, in *Ordinary Differential Equations and Operators*, Proc. Symposium Dundee, Scotland, March-July 1982, Lecture Notes in Mathematics 1032, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983, 358–374.

[14] E. J. McShane, *On the Solutions of the Differential Equation* $y'' + p^2 y = 0$ // Proc. AMS, **17** (1966), No. 1, 55–61.

[15] A. Meir, D. Willett, and J. S. W. Wong, *On the asymptotic behavior of the solutions of* $x'' + a(t)x = 0$ // Michigan Math. Journal, **14** (1967), No. 1, 47–52.

[16] H. Milloux, *Sur l'equation differentielle* $x'' + A(t)x = 0$ // Prace Mat. Fiz., **41** (1934), 39–54.

[17] G. Sansone, *Sopra il comportamento asintotico delle soluzioni di un'equazione differenziale della dinamica* // Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia, (1936), 385–403.

[18] D. Willett, *On an Example in Second Order Linear Ordinary Differential Equations* // Proc. AMS, **17** (1966), No. 6, 1263–1266.

Сведения об авторах

Антон Андреевич Лунёв

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург 74,
83114, Донецк,
Украина
E-Mail: `Anton_Lunyov@mail.ru`

Леонид Леонидович Оридорога

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: `vremenny-orid@mail.ru`