Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 4, 465 – 492

О связной устойчивости крупномасштабных систем динамических уравнений на временной шкале в критических случаях

Сергей В. Бабенко, Виталий И. Слынько

(*Представлена Н. А. Перестюком*)

Аннотация. В статье осуществлен анализ связной устойчивости крупномасштабной системы динамических уравнений на временной шкале. Рассмотрен случай, когда система линейного приближения имеет неасимптотически устойчивое нулевое решение. На основании метода функций Ляпунова получены достаточные условия связной асимптотической устойчивости нулевого решения системы рассмотренного класса.

2010 MSC. 34N05.

Ключевые слова и фразы. Динамическое уравнение, временная шкала, связная устойчивость, функция Ляпунова, критический случай, крупномасштабная система.

Введение

Исследованию динамических уравнений на временной шкале в настоящее время посвящено множество работ. В статье [1] рассмотрены линейные динамические уравнения на временной шкале. При помощи интегральных неравенств на временной шкале типа Гронуолла получены условия экспоненциальной устойчивости тривиального решения нерегрессивных уравнений с переменными коэффициентами на временной шкале с ограниченной зернистостью. В работе [2] исследуется устойчивость решений линейных динамических уравнений на временной шкале. При помощи прямого метода Ляпунова получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости для систем с медленно меняющимися коэффициентами. Рассмотрены системы исследованного типа при линейных возмущениях и для них развит

Статья поступила в редакцию 20.01.2011

ISSN 1810 – 3200.

критерий неустойчивости. Работа [3] посвящена исследованию устойчивости разных типов для решений линейных динамических уравнений на временной шкале. В работе [4] получены теоремы о линейном приближении динамических уравнений на временной шкале. Полученные результаты могут быть использованы при изучении взаимосвязи между обыкновенными дифференциальными уравнениями и численными схемами, применяемыми к ним. В статье [5] изучаются гибридные динамические системы на временной шкале. При помощи прямого метода Ляпунова получены достаточные условия практической устойчивости гибридных динамических систем на временной шкале. В статье [6] получены достаточные условия строгой устойчивости относительно динамических систем на временной шкале. Работа [7] посвящена обобщению понятий банахового пространства и гильбертового пространства функций и приведены примеры, иллюстрирующие структуру соответствующих пространств. В статье [8] при помощи дифференциальных неравенств получены теоремы о практической устойчивости динамических систем на временной шкале. В качестве приложения полученных результатов рассмотрен специальный класс крупномасштабных систем управления с неопределенностью. В работе [9] изучены обратное неравенство типа Гельдера и двумерный аналог неравенства Гельдера на временной шкале.

Исследование критических случаев в теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений восходит к работам А. М. Ляпунова. Классическим методом исследования устойчивости критических положений равновесия является сочетание последовательных замен переменных, приводящих систему к наиболее простому и удобному для дальнейшего применения прямого метода Ляпунова виду. После такого упрощения применение вспомогательных функций простейшего вида приводит к необходимым и достаточным условиям устойчивости критических положений равновесия. А. М. Ляпунов рассмотрел случай одного нулевого корня, пары чисто мнимых корней и случай двукратного корня с непростым элементарным делителем. Рассмотрение более сложных критических случаев проведено в работах Н. Г. Четаева, Г. В. Каменкова, И. Г. Малкина, Н. Н. Красовского. В частности, Г. В. Каменков исследовал случай двух пар чисто мнимых корней и вырождения в этом случае.

Современное состояние теории устойчивости критических положений равновесия подытожено в монографиях [10, 11]. В этих работах исследование устойчивости критических положений равновесия проводится по следующей схеме: 1) система дифференциальных уравнений в окрестности особой точки приводится к нормальной форме А. Пуанкаре; 2) используя принцип сведения (теорему о центральном многообразии), исследование устойчивости критического положения равновесия сводится к исследованию некоторой модельной системы, размерность которой равна коразмерности критического случая. Как правило, модельная система обладает нетривиальной группой симметрии, наличие которой значительно упрощает исследование устойчивости особой точки и построение вспомогательной функции Ляпунова или Четаева. Отметим, что универсальных и стандартных методов исследования устойчивости критических положений равновесия модельной системы не существует, и результативность исследования зависит от искусства исследователя.

К современным достижениям теории устойчивости критических положений равновесия ОДУ можно отнести установление критериев устойчивости для модельных систем с коразмерностью до трех включительно, установление алгебраической неразрешимости проблемы устойчивости в критическом случае [10], исследование устойчивости в резонансных случаях [10], решение А. М. Молчановым проблемы устойчивости в критическом случае n пар чисто мнимых корней в отсутствии резонансов [10, 12], исследование критических состояний равновесия неавтономных ОДУ [13], разностных уравнений [14], исследование критических положений равновесия дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [15, 16], доказательство полуалгебраической разрешимости проблемы устойчивости для монотонных дифференциальных уравнений [17, 18].

Целью настоящей работы является получение достаточных условий связной асимптотической устойчивости нулевого решения крупномасштабной системы динамических уравнений на временной шкале в критическом случае.

1. Постановка задачи

Рассматривается крупномасштабная система динамических уравнений на временной шкале

$$x^{\Delta}(t) = F(t, x), \quad F(t, 0) = 0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (то есть, F является rd-непрерывной и регрессивной функцией [19]). При $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ данная система является крупномасштабной системой обыкновенных дифференциальных уравнений [21]. Предполагается, что система S допускает декомпозицию на m подсистем, динамика каждой из которых описывается уравнением

$$x_i^{\Delta}(t) = A_i x_i + f_i(t, x_i) + h_i(t, x), \tag{1.2}$$

где вектор $x_i(t)$ является положением системы S_i и представляет i-ую компоненту вектора $x(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_m^T(t))^T$ крупномасштабной системы. В (S_i) функция $A_i x_i + f_i(t, x_i)$ описывает динамику подсистемы S_i, независимой от влияния других подсистем системы S, а функция h_i описывает действие крупномасштабной системы S на подсистему S_i. Предполагается, что функции $h_i(t, x)$ представляются в виде

$$h_i(t, x) \equiv h_i(t, e_{i1}x_1, e_{i2}x_2, \dots, e_{im}x_m), \quad i = 1, 2, \dots m, \tag{1.3}$$

где элементы e_{ij} матриц взаимосвязи $E = [e_{ij}]_{i,j=1}^m$ определяются так:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } S_j \text{ действует на } S_i \\ 0, & \text{если } S_j \text{ не действует на } S_i. \end{cases} \tag{1.4}$$

Предполагается также, что указанные функции удовлетворяют всем условиям, которые гарантируют существование и единственность решения задачи Коши для крупномасштабной системы S, образованной подсистемами S_i.

Для системы S поставим задачу о связной устойчивости ее тривиального решения $x = 0$. В случае $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ имеем задачу о связной устойчивости нулевого решения крупномасштабной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [20], а в случае $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ — о связной устойчивости нулевого решения крупномасштабной системы разностных уравнений.

Приведем некоторые определения.

Определение 1.1. *Положение равновесия $x = 0$ крупномасштабной системы S является связно асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда оно асимптотически устойчиво при всех матрицах взаимосвязи E.*

Определение 1.2. *Фундаментальной матрицей взаимосвязи E_f называется матрица E, которая отвечает ситуации, когда все существующие между подсистемами S_i связи "включены", то есть равны* 1 *соответствующие им элементы e_{ij}.*

Рассмотрим крупномасштабную систему динамических уравнений на временной шкале $\mathbb{T}$

$$x_i^{\Delta}(t) = A_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{1.5}$$

Обозначим через $e_{A_i}(t, t_0)$ матричную экспоненциальную функцию [19] i-ой подсистемы, $i = 1, 2, \dots, m$. При этом будем предполагать, что выполняются оценки

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{t\ge t_0,\\ t\in\mathbb{T}}} \|e_{A_i}(t,t_0)\| \le c_1(t_0),\\ &\sup_{\substack{t\ge t_0,\\ t\in\mathbb{T}}} \|e_{A_i}^{-1}(t,t_0)\| \le c_2(t_0), \end{aligned} \qquad i=1,2,\ldots,m. \tag{1.6}$$

2. Преобразование уравнений возмущенного движения

В системе (S) выполним замену переменных $x(t)=\Omega(t,t_0)y(t)$, где $\Omega(t,t_0)=\operatorname{diag}\{e_{A_1}(t,t_0),e_{A_2}(t,t_0),\ldots,e_{A_m}(t,t_0)\}$, $y(t)=(y_1^T(t),y_2^T(t),\ldots,y_m^T(t))^T$, $y_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i=1,2,\ldots,m$. Тогда подсистемы (S_i) нелинейной системы (1.1) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} y_i^{\Delta}(t) &= e_{A_i}(t_0,\sigma(t))f_i(t,e_{A_i}(t,t_0)y_i(t))\\ &\quad + e_{A_i}(t_0,\sigma(t))h_i(e_{i1}e_{A_1}(t,t_0)y_1(t),\ldots,e_{im}e_{A_m}(t,t_0)y_m(t)), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $e_{A_i}(\sigma(t),t_0)$ — значение матричной экспоненциальной функции $e_{A_i}(t,t_0)$ в точке $\sigma(t)$, обозначающей скачок в точке t, который определяется так: $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}: s>t\}$. Предположим, что функции в правых частях уравнений (2.1) допускают псевдолинейное представление в виде

$$e_{A_i}(t_0,\sigma(t))f_i(t,e_{A_i}(t,t_0)y_i(t)) = G_i(t,y_i)y_i,$$

$$\begin{aligned} &e_{A_i}(t_0,\sigma(t))h_i(e_{i1}e_{A_1}(t,t_0)y_1(t),\ldots,e_{im}e_{A_m}(t,t_0)y_m(t))\\ &\qquad\qquad = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}H_{ij}(t,y)y_j, \end{aligned}$$

$H_{ij}:\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n_i\times n_j}$, $i=1,2,\ldots,m$. Тогда (2.1) можно переписать в виде

$$y_i^{\Delta}(t) = G_i(t,y_i)y_i + \sum_{j=1}^{m} e_{ij}H_{ij}(t,y)y_j. \tag{2.2}$$

При этом относительно элементов матриц $G_i(t,y_i)$ и блочной матрицы $H(t,y)=[H_{ij}(t,y)]_{i,j=1}^m$, образованной матрицами $H_{ij}(t,y)$, дополнительно предположим, что существуют ρ_1 и ρ_2-окрестности точки $y=0$ такие, что

(a) существуют положительные постоянные $G_i^{(1)}$, H_1 и ν_1 такие, что для всех y из окрестности $\|y\| < \rho_1$, равномерно по $t \in \mathbb{T}$, выполняются оценки

$$\begin{gathered} \|G_i(t, y_i)\| \leq G_i^{(1)} \|y_i\|^{\nu_1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \|H(t, y)\| \leq H_1 \|y\|^{\nu_1}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

(b) для всех y таких, что $\|y\| < \rho_2$, существуют производные $\frac{\partial G_i(t,y_i)}{\partial y_i^k}$ и $\frac{\partial H(t,y)}{\partial y^k}$, для которых при всех $t \in \mathbb{T}$ выполняются оценки

$$\begin{gathered} \left\| \frac{\partial G_i(t, y_i)}{\partial y_i^k} \right\| \leq G_i^{(2)} \|y_i\|^{\nu_2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ k = 1, 2, \ldots, n_i, \\ \left\| \frac{\partial H(t, y)}{\partial y^k} \right\| \leq H_2 \|y\|^{\nu_2}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $G_i^{(2)} > 0$, $H_2 > 0$, $\nu_2 > -1$, а y_i^k, y^k — k-ые компоненты субвектора y_i и вектора y, соответственно.

Следующая лемма устанавливает связь задачи о связной устойчивости тривиального решения $x = 0$ крупномасштабной системы S и решения $y = 0$ системы (2.1).

Лемма 2.1. *Если состояние равновесия $y = 0$ системы* (2.2) *связно асимптотически устойчиво, то состояние равновесия $x = 0$ крупномасштабной системы* (1.1) *также связно асимптотически устойчиво.*

Доказательство очевидно.

3. Основной результат

Чтобы получить условия связной асимптотической устойчивости решения $y = 0$ крупномасштабной системы, образованной подсистемами (2.2), которую можно переписать в виде

$$y^{\Delta}(t) = R(E, t, y)y, \tag{3.1}$$

где

$$R(E, t, y) = G(t, y) + \widetilde{H}(E, t, y),$$

$$G = \operatorname{diag}\{G_1, G_2, \ldots, G_m\},$$

$$\widetilde{H}(E, t, y) = [e_{ij} H_{ij}]_{i,j=1}^{m},$$

сделаем некоторые дополнительные предположения относительно динамики подсистем S_i и связей между ними. Эти предположения выражаются в виде ограничений на функции $G_i(t,y_i)$ и $H(t,y)$.

Обозначим

$$\Lambda_i(k,y_i) = I_i + \mu(\rho(\tau_k))G_i(\rho(\tau_k),y_i), \Pi_i(k,y_i) = I_i + \int\limits_{\rho(\tau_k)}^{\tau_{k-1}} G_i(s,y_i)\Delta s,$$

$$\widetilde{\Lambda}(E,k,y) = \mu(\rho(\tau_k))\widetilde{H}(E,\rho(\tau_k),y), \widetilde{\Pi}(E,k,y) = \int\limits_{\rho(\tau_k)}^{\tau_{k-1}} \widetilde{H}(E,s,y)\Delta s,$$

$$M(E,k,y) = \Lambda^T X\widetilde{\Lambda} + \widetilde{\Lambda}^T X\Lambda + \widetilde{\Lambda}^T X\widetilde{\Lambda} - \Pi^T X\widetilde{\Pi} - \widetilde{\Pi}^T X\Pi - \widetilde{\Pi}^T X\widetilde{\Pi},$$

где $\rho(t)$ обозначает скачок назад в точке t шкалы $\mathbb{T}$, который определяется формулой $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$; $\Lambda = \operatorname{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m\}$, $\Pi = \operatorname{diag}\{\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m\}$, M_{ij} — блок матрицы M, состоящий из элементов m_{kl} матрицы M, удовлетворяющих условиям:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{i-1} < k \le n_1 + n_2 + \cdots + n_i,$$
$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} < l \le n_1 + n_2 + \cdots + n_j.$$

Предположение 3.1. *Существуют связные окрестности $\mathcal{N}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ состояний равновесия $y_i = 0$, матрицы $X_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек шкалы $\mathbb{T}$, постоянные $\alpha_i, \widetilde{\alpha}_i, \alpha_{ij} > 0$, а также функции класса Хана $\delta(r), \delta_1(r), \ldots, \delta_m(r)$ ($\delta(r)$ — дифференцируемая) такие, что:*

1) *матрицы X_i являются симметричными положительно определенными;*

2) *последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей, неограниченной и обладающей свойством: $\sup_{k\in\mathbb{N}}\{\tau_{k+1} - \tau_k\} < \infty$;*

3) *для $\delta(r)$ в $\mathcal{N}$ выполняются предельные равенства:*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{r^{\nu_1+\nu_2+1}} = \infty, \quad \lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{\delta'(r) r^{\nu_1+1}} = \infty, \quad \lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{r^{2\nu_1}} = \infty;$$

4) *$\sum_{i=1}^m \widetilde{\alpha}_i \delta_i(\|y_i\|)\|y_i\|^2 \ge \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta(\|y\|)\|y_i\|^2$, при всех $y \in \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \times \cdots \times \mathcal{N}_m$, $(k,y_i) \in \mathbb{N} \times \mathcal{N}_i$, $i = 1,2,\ldots,m$;*

5) *$y_i^T\big(\Lambda_i^T(k,y_i)X_i\Lambda_i(k,y_i) - \Pi_i^T(k,y_i)X_i\Pi_i(k,y_i)\big)y_i < -\widetilde{\alpha}_i\delta_i(\|y_i\|)\|y_i\|^2$, при всех $y \in \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \times \cdots \times \mathcal{N}_m$, $(k,y_i) \in \mathbb{N} \times \mathcal{N}_i$, $i = 1,2,\ldots,m$;*

6) $y_i^T M_{ij}(E,k,y)y_j \leq \frac{1}{2}e_{ij}\alpha_{ij}\delta(\|y\|)\|y_i\|\|y_j\|$, *при всех* $y \in \mathcal{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $y_i \in \mathcal{N}_i$, $y_j \in \mathcal{N}_j$, $i,j = 1,2,\ldots,m$.

Условие 5) предположения 3.1 определяет ограничения на изолированную i-ую подсистему из (2.2), а 6) — условия на взаимосвязь H.

Обозначим $C(E)$ матрицу с элементами $c_{ij} = -\delta_{ij}\alpha_i + e_{ij}\alpha_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия предположения* 3.1 *и матрица* $\widetilde{C} = \frac{1}{2}(C^T(E_f) + C(E_f))$ *является отрицательно определенной. Тогда состояние* $y = 0$ *системы* (3.1) *связно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Для доказательства устойчивости воспользуемся вспомогательной матрично-значной функцией

$$U(t,y) = [v_{ij}(t,y)]_{i,j=1}^m,$$

элементы $v_{ij}(t,y)$ которой имеют вид псевдобилинейных форм:

$$v_{ij}(t,y) = y_i^T P_{ij}(t,y)y_j, \quad i,j = 1,2,\ldots,m,$$

где функция $P_{ij} : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ является блоком матрицы

$$P(t,p) = \Phi(t,\tau_k,p)X - \int_{\tau_k}^{t} \Phi(t,\sigma(s),p)Q(p)\Delta s, \tag{3.2}$$

состоящим из элементов p_{kl} матрицы P, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} n_1 + n_2 + \cdots + n_{i-1} < k \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_i, \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} < l \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_j. \end{gathered}$$

В формуле (11) $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $p \in \mathbb{R}^n$, $X = \mathrm{diag}\{X_1, X_2, \ldots, X_s\}$, $Q(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно-определенная дифференцируемая по компонентам p^k вектора p матричнозначная функция. $\Phi(t,\tau_k,p)$ обозначает оператор эволюции линейного динамического матричного уравнения с параметром p:

$$\begin{aligned} \Big[I + \mu(t)R(E,t,p)\Big]^T Z_t^{\Delta}(E,t,p)\Big[I + \mu(t)R(E,t,p)\Big] \\ + Z(E,t,p)R(E,t,p) + R(E,t,p)^T Z(E,t,p) \\ + \mu(t)R(E,t,p)^T Z(E,t,p)R(E,t,p) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

На основании матричнозначной функции $U(t,y)$ построим скалярную функцию Ляпунова в виде

$$v(t,y,\theta)=\theta^T U(t,y)\theta, \quad \theta\in\mathbb{R}^m_+. \tag{3.4}$$

Положим $\theta=(1,1,\dots,1)^T$ и рассмотрим функцию $v(t,y)=v(t,y,\theta) = \sum_{i,j=1}^m v_{ij}(t,y)$, которая является вспомогательной при доказательстве теоремы. Структура доказательства предлагается следующей. Найдем сначала, какими свойствами обладает Δ-производная $v^\Delta(t,y)$ в силу системы (3.1), а также разность $\Delta v=v(\tau_k,y(\tau_k))-v(\tau_k-0, y(\tau_k-0))$ в силу системы (3.1). Здесь $y(\tau_k-0)$ и $v(\tau_k-0,y(\tau_k-0))$ обозначают:

$$y(\tau_k-0)=\begin{cases} y(\rho(\tau_k)), & \text{если } \rho(\tau_k)<\tau_k,\\ \lim\limits_{s\to\tau_k-0} y(s), & \text{если } \rho(\tau_k)=\tau_k;\end{cases}$$

$$v(\tau_k-0,y(\tau_k-0))=\begin{cases} v(\rho(\tau_k),y(\rho(\tau_k))), & \text{если } \rho(\tau_k)<\tau_k,\\ \lim\limits_{s\to\tau_k-0} v(s,y(s)), & \text{если } \rho(\tau_k)=\tau_k.\end{cases}$$

На следующем этапе, исходя из найденных свойств функции $v(t,y)$ докажем связную асимптотическую устойчивость решения $y=0$ системы (3.1).

Обозначив для удобства $y(\tau_k-0)=y^{(k)}$, непосредственными вычислениями находим разность Δv_{ij}:

$$\begin{aligned}
\Delta v_{ij} &= y_i^T(\tau_k)P_{ij}(\tau_k,y(\tau_k))y_j(\tau_k)-(y_i^{(k)})^T P_{ij}(\tau_k-0,y^{(k)})y_j^{(k)}\\
&= y_i^T(\tau_k)\Bigg(\Phi_{ij}(\tau_k,\tau_k,y(\tau_k))X_j\\
&\quad -\int_{\tau_k}^{\tau_k}[\Phi_{ij}(\tau_k,\sigma(s),y(\tau_k))Q(y(\tau_k))]_{ij}\Delta s\Bigg)y_j(\tau_k)\\
&\quad -(y_i^{(k)})^T\Bigg([\Phi(\tau_k-0,\tau_{k-1},y^{(k)})X]_{ij}\\
&\quad -\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k-0}[\Phi(\tau_k-0,\sigma(s),y^{(k)})Q(y^{(k)})]_{ij}\Delta s\Bigg)y_j^{(k)}\\
&= y_i^T(\tau_k)I_{ij}X_j y_j(\tau_k)-(y_i^{(k)})^T\Bigg([\Phi(\tau_k-0,\tau_{k-1},y^{(k)})X]_{ij}
\end{aligned}$$

$$-\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k-0}[\Phi(\tau_k-0,\sigma(s),y^{(k)})Q(y^{(k)})]_{ij}\Delta s\Bigg)y_j^{(k)}, \quad (3.5)$$

где, а также всюду далее, матрицы вида R_{ij} обозначают блоки соответствующей матрицы R, состоящие из ее элементов таким же образом, как и ранее введенные блоки P_{ij} матрицы P.

Поскольку $y(t)$ — решение уравнения (3.1), то имеет место формула

$$y(\tau_k)=\Big(I+\mu(\rho(\tau_k))R(E,\rho(\tau_k),y(\rho(\tau_k)))\Big)y(\rho(\tau_k)).$$

Нетрудно доказать, что решение $y(t)$ является непрерывным слева в плотных слева точках τ_k, то есть $\lim_{s\to\tau_k-0}y(s)=y(\tau_k)$, если $\rho(\tau_k)=\tau_k$. Следовательно, приведенную формулу можно переписать в виде

$$y(\tau_k)=\Big(I+\mu(\rho(\tau_k))R(E,\rho(\tau_k),y(\rho(\tau_k)))\Big)y(\tau_k-0).$$

Подставив вместо $y(\tau_k)$ в (3.5) полученное выражение, приходим к следующей формуле для Δv_{ij}:

$$\begin{aligned}\Delta v_{ij}=\sum_{l=1}^{m}y_l^T(\tau_k-0)\Big[I+\mu(\rho(\tau_k))R^T(E,\rho(\tau_k),y^{(k)})\Big]_{li}I_{ij}X_j\\
\times\sum_{r=1}^{m}\Big[I+\mu(\rho(\tau_k))R(E,\rho(\tau_k),y^{(k)})\Big]_{jr}y_r(\tau_k-0)\\
-(y_i^{(k)})^T\Big[\Phi(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},y^{(k)})X\Big]_{ij}y_j^{(k)}\\
+(y_i^{(k)})^T\Bigg(\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)}[\Phi(\rho(\tau_k),\sigma(s),y^{(k)})Q(y^{(k)})]_{ij}\Delta s\Bigg)y_j^{(k)}\\
=\sum_{l=1}^{m}y_l^T(\tau_k-0)\Big[\Lambda^T(k,y^{(k)})+\widetilde{\Lambda}^T(E,k,y^{(k)})\Big]_{li}I_{ij}X_j\\
\times\sum_{r=1}^{m}\Big[\Lambda(k,y^{(k)})+\widetilde{\Lambda}(E,k,y^{(k)})\Big]_{jr}y_r(\tau_k-0)\\
-(y_i^{(k)})^T\Big[\Phi(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},y^{(k)})X\Big]_{ij}y_j^{(k)}\\
+(y_i^{(k)})^T\Bigg(\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)}[\Phi(\rho(\tau_k),\sigma(s),y^{(k)})Q(y^{(k)})]_{ij}\Delta s\Bigg)y_j^{(k)}.\end{aligned}$$

Как доказано в работе [22], оператор $\Phi(t,s,p)$ представляется в виде

$$\Phi(t,s,p)Y = \Big(e_R^{-1}(t,s,p)\Big)^T Y e_R^{-1}(t,s,p), \tag{3.6}$$

при любых $s,t \in \mathbb{T}$, где Y — $n\times n$-матрица, $e_R(t,s,p)$ обозначает матричную экспоненциальную функцию динамического уравнения

$$y^{\Delta}(t) = R(E,t,p)y,$$

содержащего $p \in \mathbb{R}^n$ в качестве параметра. В работе [23] доказано также равенство

$$e_R(t,s,p) = I + \int\limits_s^t R(s_1,p)\Delta s_1 + \int\limits_s^t R(s_1,p)\int\limits_s^{s_1} R(s_2,p)\Delta s_1\Delta s_2 + \cdots$$
$$+ \int\limits_s^t\int\limits_s^{s_1}\cdots\int\limits_s^{s_{l-1}} R(s_1,p)R(s_2,p)R(s_l,p)\Delta s_1\Delta s_2\cdots\Delta s_l + O\Big(\|p\|^{(l+1)\nu_1}\Big),$$

справедливое при всех $l\in\mathbb{N}$, $|t-s|<h$ и $\|p\| < \min\big\{\rho_1, ((\sum_{i=1}^m G_i^{(1)} + H_1)h)^{-1/\nu_1}\big\}$. Используя (3.6), оператор Φ можно записать через сумму в правой части последнего равенства, в частности, при $l=1$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
&\Phi(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},y^{(k)})X \\
&\qquad = \Big(e_R^{-1}(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},y^{(k)})\Big)^T X e_R^{-1}(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},y^{(k)}) \\
&\qquad = e_R^T(\tau_{k-1},\rho(\tau_k),y^{(k)}) X e_R(\tau_{k-1},\rho(\tau_k),y^{(k)}) \\
&= \Bigg(I + \int\limits_{\rho(\tau_k)}^{\tau_{k-1}} G^T(s,y^{(k)})\Delta s + \int\limits_{\rho(\tau_k)}^{\tau_{k-1}} \widetilde{H}^T(E,s,y^{(k)})\Delta s + O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1})\Bigg)X \\
&\quad \times\Bigg(I + \int\limits_{\rho(\tau_k)}^{\tau_{k-1}} G(s,y^{(k)})\Delta s + \int\limits_{\rho(\tau_k)}^{\tau_{k-1}} \widetilde{H}(E,s,y^{(k)})\Delta s + O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1})\Bigg) \\
&\qquad = \Big(\Pi^T(k,y^{(k)}) + \widetilde{\Pi}^T(E,k,y^{(k)}) + O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1})\Big)X \\
&\qquad \times \Big(\Pi(k,y^{(k)}) + \widetilde{\Pi}(E,k,y^{(k)}) + O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1})\Big) = \\
&\qquad = \Pi^T(k,y^{(k)})X\Pi(k,y^{(k)}) + \Pi^T(k,y^{(k)})X\widetilde{\Pi}(E,k,y^{(k)}) + \\
&\qquad + \widetilde{\Pi}^T(E,k,y^{(k)})X\Pi^T(k,y^{(k)}) + \widetilde{\Pi}^T(E,k,y^{(k)})X \\
&\qquad\qquad \times \widetilde{\Pi}(E,k,y^{(k)}) + O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1}),
\end{aligned}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\|y^{(k)}\| < \min\{\rho_1, \beta\}$, $\beta = \big(\big(\sum_{i=1}^m G_i^{(1)} + H_1\big)\sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_k - \tau_{k-1})\big)^{-1/\nu_1}$. С учетом последнего выражения, формула (3.5) примет вид

$$\begin{aligned}\Delta v_{ij} = \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^m (y_l^{(k)})^T \Big[[\Lambda^T]_{li}(k, y^{(k)}) I_{ij} X_j \Lambda_{jr}(k, y^{(k)}) \\ + [\Lambda^T]_{li}(k, y^{(k)}) I_{ij} X_j \widetilde{\Lambda}_{jr}(E, k, y^{(k)}) + [\widetilde{\Lambda}^T]_{li}(E, k, y^{(k)}) I_{ij} X_j \Lambda_{jr}(k, y^{(k)}) \\ + [\widetilde{\Lambda}^T]_{li}(E, k, y^{(k)}) I_{ij} X_j \widetilde{\Lambda}_{jr}(E, k, y^{(k)}) \Big] y_r^{(k)} \\ - (y_i^{(k)})^T \Big[\Pi^T(k, y^{(k)}) X \Pi(k, y^{(k)}) + \Pi^T(k, y^{(k)}) X \widetilde{\Pi}(E, k, y^{(k)}) \\ + \widetilde{\Pi}^T(E, k, y^{(k)}) X \Pi^T(k, y^{(k)}) + \widetilde{\Pi}^T(E, k, y^{(k)}) X \widetilde{\Pi}(E, k, y^{(k)}) \\ + O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1}) \Big]_{ij} y_j^{(k)} + F_{ij}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $F_{ij} = (y_i^{(k)})^T \big(\int_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)} [\Phi(\rho(\tau_k), \sigma(s), y^{(k)}) Q(y^{(k)})]_{ij} \Delta s \big) y_j^{(k)}$. В случае $i \neq j$ двойная сумма будет равна 0, поскольку блок I_{ij} единичной матрицы I в этом случае состоит только из нулей. В случае же $i = j$ двойная сумма равна

$$\begin{aligned}(y_i^{(k)})^T \Lambda_i^T(k, y^{(k)}) X_i \Lambda_i(k, y^{(k)}) y_i^{(k)} \\ + \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^m (y_l^{(k)})^T \Big[[\Lambda^T]_{li}(k, y^{(k)}) X_i \widetilde{\Lambda}_{ir}(E, k, y^{(k)}) \\ + [\widetilde{\Lambda}^T]_{li}(E, k, y^{(k)}) X_i \Lambda_{ir}(k, y^{(k)}) \\ + [\widetilde{\Lambda}^T]_{li}(E, k, y^{(k)}) X_i \widetilde{\Lambda}_{ir}(E, k, y^{(k)}) \Big] y_r^{(k)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Далее, используя доказанный в работе [23] результат о том, что существуют положительные постоянные K_1 и r_0 такие, что

$$\sup_{\tau_k \le s \le t} \|\Phi(\sigma(t), \sigma(s), y)\| \le K_1, \tag{3.9}$$

при всех $\|y\| < r_0$ и $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, равномерно по $k \in \mathbb{Z}$, получим также оценку последней в формуле (3.7) псевдобилинейной формы F_{ij}

$$F_{ij} \le \|y_i^{(k)}\| \|y_j^{(k)}\| \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)} \|\Phi_{ij}(\rho(\tau_k), \sigma(s), y^{(k)})\| \|Q_{ij}(y^{(k)})\| \Delta s$$

$$\leq \|y_i^{(k)}\| \|y_j^{(k)}\| \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)} K_1 \|Q_{ij}(y^{(k)})\| \Delta s$$
$$\leq \|y_i^{(k)}\| \|y_j^{(k)}\| K_1 \sup_{k \in \mathbb{N}} (\tau_k - \tau_{k-1}) \|Q_{ij}(y^{(k)})\|,$$

справедливую при всех $\|y^{(k)}\| < r_0$. Положим

$$Q_{ij}(y) = \Gamma_{ij} \delta(\|y\|) \widetilde{Q}_{ij}, \quad \text{где } \Gamma_{ij} = \frac{e_{ij}\alpha_{ij}}{2K_1 \|\widetilde{Q}_{ij}\| \sup_{k \in \mathbb{N}} (\tau_k - \tau_{k-1})},$$

$\widetilde{Q}_{ij}$ — постоянная матрица размерности $n_i \times n_j$ такая, что $\|\widetilde{Q}_{ij}\| \neq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. Тогда оценка F_{ij} примет вид

$$F_{ij} \leq \frac{1}{2} e_{ij}\alpha_{ij} \delta(\|y^{(k)}\|) \|y_i^{(k)}\| \|y_j^{(k)}\|. \tag{3.10}$$

Из формул (3.7), (3.8) получаем выражение для Δv в силу системы (3.1) на промежутке (τ_k, τ_{k+1}):

$$\Delta v = \sum_{i,j=1}^{m} \Delta v_{ij}(t, y) = \sum_{i=1}^{m} (y_i^{(k)})^T \Lambda_i^T(k, y^{(k)}) X_i \Lambda_i(k, y^{(k)}) y_i^{(k)}$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{m} (y_i^{(k)})^T [M_{ij}(E, k, y^{(k)}) + F_{ij}] y_j^{(k)} + (y^{(k)})^T \Theta(y^{(k)}) y^{(k)} O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1}),$$

при всех $y^{(k)} \in \mathcal{N} \cap B(0, \min\{\rho_1, \beta, r_0\})$, где Θ обозначает некоторую ограниченную матричнозначную функцию. Учитывая далее оценки (3.9), (3.10) и условия 4)–6) предположения 3.1, находим:

$$\Delta v < \sum_{i=1}^{m} -\alpha_i \delta(\|y^{(k)}\|) \|y_i^{(k)}\|^2$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{m} e_{ij}\alpha_{ij} \delta(\|y^{(k)}\|) \|y_i^{(k)}\| \|y_j^{(k)}\| + (y^{(k)})^T \Theta(y^{(k)}) y^{(k)} O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1})$$
$$= z^T C(E) z \, \delta(\|y^{(k)}\|) + (y^{(k)})^T \Theta(y^{(k)}) y^{(k)} O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1}),$$

где $z = (\|y_1^{(k)}\|, \|y_2^{(k)}\|, \dots, \|y_m^{(k)}\|)^T$. Поскольку $C(E)$ при всех значениях матрицы взаимосвязей E является матрицей Мецлера, то $z^T C(E) z \leq z^T C(E_f) z$. Согласно условию теоремы, матрица $\widetilde{C}$, полученная симметризацией матрицы $C(E_f)$, является отрицательно определенной, следовательно, справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
&z^T C(E_f) z\, \delta(\|y^{(k)}\|) + (y^{(k)})^T \Theta(y^{(k)}) y^{(k)} O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1}) \\
&\qquad \le \big[\lambda_{\max}(\widetilde{C})\delta(\|y^{(k)}\|) + O(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1})\big]\|y^{(k)}\|^2 \\
&\qquad\qquad = \Big[\lambda_{\max}(\widetilde{C})\frac{\delta(\|y^{(k)}\|)}{\|y^{(k)}\|^{2\nu_1}} + \varphi(\|y^{(k)}\|^{2\nu_1})\Big]\|y^{(k)}\|^{2\nu_1+2},
\end{aligned}
$$

где функция $\varphi(r)$ — ограниченная константой φ_0, то есть такая, что при всех $r > 0$ $|\varphi(r)| \le \varphi_0$. В силу условия 3) предположения 3.1 имеем, что $\lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{r^{2\nu_1}} = \infty$ при всех $r \in \mathcal{N}$. Это означает, что для произвольного $\varphi_1 > 0$ существует $r_1 > 0$ такое, что при всех $r \in \mathcal{N} \cap B(0, r_1)$ будет выполнятся неравенство $\delta(r) > r^{2\nu_1}\big(\varphi_1 - \frac{\varphi_0}{\lambda_{\max}(\widetilde{C})}\big)$. Тогда для Δv получим окончательную оценку

$$
\Delta v < \varphi_1 \lambda_{\max}(\widetilde{C})\|y^{(k)}\|^{2\nu_1+2} =: -b(\|y^{(k)}\|), \tag{3.11}
$$

справедливую при всех $y^{(k)} \in \mathcal{N} \cap B(0, \min\{\rho_1, \beta, r_0, r_1\})$.

Вычислим теперь дельта-производную функции $v(t,y)$ в силу системы (3.1) на промежутке времени $[\tau_k, \tau_{k+1})$:

$$
\begin{aligned}
&v^{\Delta}(t,y)\Big|_{(9)} = y^T(t)P(t,y)y^{\Delta}(t) + (y^T(t)P(t,y))^{\Delta}y(\sigma(t))\Big|_{(3.1)} \\
&\quad = y^T(t)P(t,y)y^{\Delta}(t) + (y^T(\sigma(t))P^{\Delta}(t,y) + (y^{\Delta}(t))^T P(t,y))(y(t) \\
&\qquad + \mu(t)y^{\Delta}(t))\Big|_{(3.1)} = y^T(P(t,y)R(E,t,y) + R^T(E,t,y)P(t,y) \\
&\qquad\qquad + \mu(t)R^T(E,t,y)P(t,y)R(E,t,y) \\
&\qquad\qquad + (I + \mu(t)R(E,t,y))^T P^{\Delta}(t,y)(I + \mu(t)R(E,t,y)))y\Big|_{(3.1)}.
\end{aligned}
$$

Согласно лемме 2.1 имеем

$$
\begin{aligned}
&P^{\Delta}(t,y)\Big|_{(3.1)} \\
&\quad = P_t^{\Delta}(t,y) + \Big\{\int_0^1 P'_y(\sigma(t), y(t) + h\mu(t)y^{\Delta}(t))\,dh\Big\}y^{\Delta}(t)\Big|_{(3.1)} \\
&= P_t^{\Delta}(t,y) + \Big\{\int_0^1 P'_y(\sigma(t), y(t) + h\mu(t)R(E,t,y)y)\,dh\Big\}R(E,t,y)y \\
&\qquad\qquad = P_t^{\Delta}(t,y) + Y(t,y)R(E,t,y)y,
\end{aligned}
$$

где $P_t^{\Delta}(t,y)$ обозначает дельта-производную функции $P(t,y)$ по явно содержащемуся времени, а $Y(t,y)$ обозначает выражение в скобках, и тогда производная $v^{\Delta}(t,y)$ при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ будет равна

$$
\begin{aligned}
v^{\Delta}(t,y)\Big|_{(3.1)} &= y^T(P(t,y)R(E,t,y)\\
&\quad + R^T(E,t,y)P(t,y) + \mu(t)R^T(E,t,y)P(t,y)R(E,t,y)\\
&\quad + (I+\mu(t)R(E,t,y))^T P_t^{\Delta}(t,y)(I+\mu(t)R(E,t,y)))y\\
&\qquad + y^T(I+\mu(t)R(E,t,y))^T Y(t,y)R(E,t,y)yy.
\end{aligned}
$$

Нетрудно убедиться, что функция $P(t,p)$, определена формулой (3.2), при подстановке ее выражения в уравнение (3.3) преобразует его в правильное тождество на промежутке $[\tau_k,\tau_{k+1})$. Следовательно, первая в последнем выражении псевдоквадратичная форма равна $-y^TQ(y)y$, и тогда

$$
v^{\Delta}(t,y)\Big|_{(3.1)} = -y^TQ(y)y + y^T(I+\mu(t)R(E,t,y))^T Y(t,y)R(E,t,y)yy. \tag{3.12}
$$

Поскольку обе части тождества

$$
\begin{aligned}
&(I+\mu(t)R^T(E,t,y))P_t^{\Delta}(t,y)(I+\mu(t)R(E,t,y))\\
&\qquad + P(t,y)R(E,t,y) + R^T(E,t,y)P(t,y)\\
&\qquad\quad + \mu(t)R^T(E,t,y)P(t,y)R(E,t,y) = -Q(y)
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

удовлетворяют всем условиям леммы о дифференцируемости по параметру решений динамических уравнений на временной шкале [23], то, продифференцировав обе части тождества (3.13) по y^i ($i = 1,2,\ldots,n$), получим n тождеств относительно функций $\frac{\partial P(t,y)}{\partial y^i}$:

$$
\begin{aligned}
&(I+\mu(t)R^T(E,t,y))\Big(\frac{\partial P(t,y)}{\partial y^i}\Big)_t^{\Delta}(I+\mu(t)R(E,t,y))\\
&\qquad + \frac{\partial P(t,y)}{\partial y^i}R(E,t,y) + R^T(E,t,y)\frac{\partial P(t,y)}{\partial y^i}\\
&\qquad + \mu(t)R^T(E,t,y)\frac{\partial P(t,y)}{\partial y^i}R(E,t,y) = -M_i(t,y),\\
&\qquad\qquad i = 1,2,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

где $M_i(t,y)$ обозначает сумму

$$
\begin{aligned}
&\mu(t)\Big(\frac{\partial R(E,t,y)}{\partial y^i}\Big)^T P_t^{\Delta}(t,y)(I+\mu(t)R(E,t,y))\\
&\qquad + \mu(t)(I+\mu(t)R^T(E,t,y))P_t^{\Delta}(t,y)\frac{\partial R(E,t,y)}{\partial y^i}\\
&\qquad + P(t,y)\frac{\partial R(E,t,y)}{\partial y^i} + \Big(\frac{\partial R(E,t,y)}{\partial y^i}\Big)^T P(t,y)
\end{aligned}
$$

$$+\,\mu(t)\Big(\frac{\partial R(E,t,y)}{\partial y^i}\Big)^T P(t,y)R(E,t,y)$$
$$+\,\mu(t)R^T(E,t,y)P(t,y)\Big(\frac{\partial R(E,t,y)}{\partial y^i}\Big)^T+\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i},$$
$$i=1,2,\dots,n. \quad (3.15)$$

Рассматривая (3.14) как уравнения относительно $\frac{\partial P(t,y)}{\partial y^i}$, находим формулу

$$\frac{\partial P(\sigma(t),y)}{\partial y^i}=\Phi(\sigma(t),\tau_k,y)\frac{\partial P(\tau_k,y)}{\partial y^i}-\int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)}\Phi(\sigma(t),\sigma(s),y)M_i(s,y)\Delta s,$$
$$i=1,2,\dots,n,$$

при всех $[\tau_k,\tau_{k+1})$. Поскольку $P(\tau_k,y)=X$, то $\frac{\partial P(\tau_k,y)}{\partial y^i}=0$, ввиду постоянности матрицы X. Следовательно,

$$\frac{\partial P(\sigma(t),y)}{\partial y^i}=-\int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)}\Phi(\sigma(t),\sigma(s),y)M_i(s,y)\Delta s,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Из оценки (3.9) следует существование положительных постоянных K_2 и K_3 таких, что

$$\|P(t,y)\|\le K_2,\quad \|P_t^{\Delta}(t,y)\|\le K_3, \quad (3.16)$$

при всех $\|y\|<r_0$ и $t\in\mathbb{T}$. Действительно, из формулы (3.2) имеем

$$\|P(t,y)\|\le\|\Phi(t,\tau_k,y)X\|+\int\limits_{\tau_k}^{t}\|\Phi(t,\sigma(s),y)Q(y)\|\Delta s$$
$$\le\|\Phi(t,\tau_k,y)\|\|X\|+\int\limits_{\tau_k}^{t}\|\Phi(t,\sigma(s),y)\|\|Q(y)\|\Delta s.$$

Отсюда, в силу оценки (3.9) получаем, что если $\|y\|<r_0$, то

$$\|P(t,y)\|\le K_1\|X\|+\int\limits_{\tau_k}^{t}K_1\|Q(y)\|\Delta s$$
$$\le K_1\|X\|+(\tau_{k+1}-\tau_k)K_1\sup_{\|y\|<r_0}\|Q(y)\|$$

$$\leq K_1\|X\| + K_1 \sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_{k+1}-\tau_k) \sup_{\|y\|<r_0} \|Q(y)\| =: K_2. \quad (3.17)$$

Вторая в (3.16) оценка является следствием того факта, что функция $P(t,y)$ является решением линейного динамического матричного уравнения с ограниченными в r_0-окрестности точки $y=0$ (в силу свойств $G(t,y)$ и $H(t,y)$) коэффициентами и свободным членом.

Используя оценки (3.9), (3.16), а также выражение (3.15) для $M_i(t,y)$, находим оценку нормы $\frac{\partial P(\sigma(t),y)}{\partial y^i}$ на промежутке $[\tau_k,\tau_{k+1})$:

$$\Big\|\frac{\partial P(\sigma(t),y)}{\partial y^i}\Big\| \leq \int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)} \|\Phi(\sigma(t),\sigma(s),y)\|\|M_i(s,y)\|\Delta s$$

$$\leq \int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)} K_1\|M_i(s,y)\|\Delta s \leq K_1 \int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)} \Big(2\mu(s)\Big\|\frac{\partial R(E,s,y)}{\partial y^i}\Big\|\|P_s^{\Delta}(s,y)$$

$$\times \|(1+\mu(s)\|R(E,s,y)\|) + 2\|P(s,y)\|\Big\|\frac{\partial R(E,s,y)}{\partial y^i}\Big\|$$

$$+ 2\mu(s)\Big\|\frac{\partial R(E,s,y)}{\partial y^i}\Big\|\|P(s,y)\|\|R(E,s,y)\| + \Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big\|\Big)\Delta s$$

$$\leq K_1 \int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)} \Big(2\Big\|\frac{\partial R(E,s,y)}{\partial y^i}\Big\|\Big(K_3\mu(s)(1+\mu(s)\|R(E,s,y)\|)$$

$$+ K_2 + K_2\mu(s)\|R(E,s,y)\|\Big) + \Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big\|\Big)\Delta s$$

$$\leq K_1 \int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)} \Big(2C_2\|y\|^{\nu_2}(K_2+K_3\mu_0)(1+C_1\mu_0\|y\|^{\nu_1}) + \Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big\|\Big)\Delta s$$

$$\leq K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\Big(2(C_2K_2+C_2K_3\mu_0)\|y\|^{\nu_2}$$

$$+ 2(C_2K_2C_1\mu_0 + C_2K_3C_1\mu_0^2)\|y\|^{\nu_1+\nu_2} + \Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big\|\Big)$$

$$=: h(\|y\|) + K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big\|,$$

при всех $\|y\| < r_0$, $t \in [\tau_k,\tau_{k+1})$ и $k\in\mathbb{N}$. Здесь обозначено $C_1 = \sum_{i=1}^m G_i^{(1)} + H_1$, $C_2 = \sum_{i=1}^m G_i^{(2)} + H_2$.

Если y выбрать принадлежащим окрестности нуля радиуса $\widetilde{\rho}$, выбранного меньшим положительного решения γ_+ уравнения

$\gamma^{\nu_1+1}C_1\mu_0+\gamma-r_0=0$, то тогда получим, что при $h\in[0,1]$

$$\begin{aligned}\|y+h\mu(t)R(E,t,y)y\| &\le \|y\|+\mu(t)\|R(E,t,y)\|\|y\|\\ &\le \|y\|+\mu_0C_1\|y\|^{\nu_1+1}<\gamma_+ +\mu_0C_1\gamma_+^{\nu_1+1}=r_0,\end{aligned}$$

то есть полученная для $\left\|\frac{\partial P(\sigma(t),y)}{\partial y^i}\right\|$ оценка будет справедлива и в точке $\xi=y+h\mu(t)R(E,t,y)y$

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{\partial P(\sigma(t),y)}{\partial y^i}\Big|_{y=\xi}\Big\| &\le h(\|\xi\|)+K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big|_{y=\xi}\Big\|\\ &\le h(\|y\|+C_1\mu_0\|y\|^{\nu_1+1})+K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big|_{y=\xi}\Big\|. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Используя неравенство (3.18) и выражение для $Y(t,y)$, получаем оценку

$$\begin{aligned}\|Y(t,y)\| &\le \Big\|\int_0^1 P'_y(\sigma(t),\xi)\,dh\Big\| \le \int_0^1 \|P'_y(\sigma(t),\xi)\|\,dh\\ &= C_3\int_0^1 \max_{1\le i\le n}\Big\|\frac{\partial P(\sigma(t),y)}{\partial y^i}\Big|_{y=\xi}\Big\|dh = C_3h(\|y\|+C_1\mu_0\|y\|^{\nu_1+1})+\\ &\qquad + C_3K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\max_{1\le i\le n}\int_0^1\Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big|_{y=\xi}\Big\|dh.\end{aligned}$$

Оценим максимум во втором слагаемом, учитывая, что $Q(y)=\delta(\|y\|)[\Gamma_{ij}\widetilde{Q}_{ij}]_{i,j=1}^m$ и обозначив $\Gamma=\|[\Gamma_{ij}\widetilde{Q}_{ij}]_{i,j=1}^m\|$

$$\begin{aligned}\max_{1\le i\le n}\int_0^1\Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big|_{y=\xi}\Big\|dh &= \max_{1\le i\le n}\int_0^1\Big\|\frac{\partial Q(r)}{\partial r}\Big|_{r=\|\xi\|}\Big\|\Big|\frac{\partial\|\xi\|}{\partial y^i}\Big|dh\\ &= \Gamma\max_{1\le i\le n}\int_0^1\delta'(\|\xi\|)\Big|\frac{\partial}{\partial y^i}\|y+h\mu(t)R(E,t,y)y\|\Big|dh\\ &\le \Gamma\max_{1\le i\le n}\int_0^1\delta'(\|y\|+hC_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1+1})\Big|\frac{\partial}{\partial y^i}(\|y\|+hC_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1+1})\Big|dh\\ &= \Gamma\max_{1\le i\le n}\int_0^1\delta'(\|y\|+hC_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1+1})(1+hC_1\mu(t)(\nu_1+1)\|y\|^{\nu_1})\Big|\frac{\partial\|y\|}{\partial y^i}\Big|dh.\end{aligned}$$

Поскольку, как нетрудно в этом убедиться, $\left|\frac{\partial\|y\|}{\partial y^i}\right| \le 1$, то

$$\max_{1\le i\le n}\int_0^1 \Big\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y^i}\Big|_{y=\xi}\Big\|dh$$
$$\le \Gamma\max_{1\le i\le n}\int_0^1 \delta'(\|y\| + hC_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1+1})(1 + hC_1\mu(t)(\nu_1+1)\|y\|^{\nu_1})\,dh$$
$$= \Gamma\delta'(\|y\| + \theta C_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1+1})(1 + \theta C_1\mu(t)(\nu_1+1)\|y\|^{\nu_1}),$$

где $\theta \in [0,1]$.

Таким образом,

$$\|Y(t,y)\| \le C_3h(\|y\| + C_1\mu_0\|y\|^{\nu_1+1}) + C_3K_1(\sigma(\tau_{k+1}) - \tau_k)$$
$$\times\Gamma\delta'(\|y\| + \theta C_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1+1})(1 + \theta C_1\mu(t)(\nu_1+1)\|y\|^{\nu_1}), \quad (3.19)$$

где $\|y\| < \widetilde{\rho}$, $\theta \in [0,1]$.

Используя (3.19), находим оценку нормы второго слагаемого в выражении (3.12) для дельта-производной функции $v(t,y)$

$$\|y^T(I + \mu(t)R^T(E,t,y))Y(t,y)R(E,t,y)yy\|$$
$$\le C_1\|y\|^{\nu_1+3}(1 + C_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1})\|Y(t,y)\|$$
$$\le C_1C_3h(\|y\| + C_1\mu_0\|y\|^{\nu_1+1})(\|y\|^{\nu_1+3} + C_1\mu(t)\|y\|^{2\nu_1+3})$$
$$+ C_1C_3K_1(\sigma(\tau_{k+1}) - \tau_k)\Gamma\delta'(\|y\| + \theta C_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1+1})(\|y\|^{\nu_1+3}$$
$$+ C_1\mu(t)\|y\|^{2\nu_1+3})(1 + \theta C_1\mu(t)(\nu_1+1)\|y\|^{\nu_1})$$
$$=: \Sigma_1\|y\|^{\nu_1+\nu_2+3} + o(\|y\|^{\nu_1+\nu_2+3}) +$$
$$+ \delta'(\|y\| + \theta C_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1+1})(\Sigma_2\|y\|^{\nu_1+3} + o(\|y\|^{\nu_1+3})),$$

где $\|y\| < \widetilde{\rho}$. Здесь Σ_1 и Σ_2 являются ограниченными функциями от μ.

Таким образом, оценка Δ-производной v вдоль решений уравнения (3.1) принимает вид

$$v^{\Delta}(t,y)\Big|_{(9)} \le -\Gamma\delta(\|y\|)\|y\|^2 + \Sigma_1\|y\|^{\nu_1+\nu_2+3} + o(\|y\|^{\nu_1+\nu_2+3})$$
$$+ \delta'(\|y\| + \theta C_1\mu(t)\|y\|^{\nu_1+1})(\Sigma_2\|y\|^{\nu_1+3} + o(\|y\|^{\nu_1+3})) = W(\|y\|). \quad (3.20)$$

Исходя из условия 3) предположения 3.1, выясним свойства функции $W(r)$. С этой целью вычислим предел

$$\mathcal{L} = \lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{\Sigma_1 r^{\nu_1+\nu_2+1} + o(r^{\nu_1+\nu_2+1}) + \delta'(\overline{r})(\Sigma_2 r^{\nu_1+1} + o(r^{\nu_1+1}))},$$

где $\overline{r} = r + \theta C_1\mu(t)r^{\nu_1+1}$. Заметим, что взаимоотношение функций $\delta'(r)$ и r^{ν_2} исчерпывается двумя взаимоисключающими случаями, а именно: $\delta'(r) = O(r^{\nu_2})$ или $r^{\nu_2} = o(\delta'(r))$. В первом случае передел $\mathcal{L}$ равен

$$\mathcal{L} = \lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{\Sigma_1 r^{\nu_1+\nu_2+1} + o(r^{\nu_1+\nu_2+1}) + \Sigma_2 O(1) r^{\nu_1+\nu_2+1}}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{\delta(r)}{r^{\nu_1+\nu_2+1}}}{\Sigma_1 + \Sigma_2 O(1) + o(1)} = \frac{\lim\limits_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{r^{\nu_1+\nu_2+1}}}{\lim\limits_{r\to 0}(\Sigma_1 + \Sigma_2 O(1) + o(1))} = \infty,$$

согласно первому предельному равенству условия 3) предположения 3.1. То же самое имеем во втором случае

$$\mathcal{L} = \lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{\Sigma_1 r^{\nu_1+1} o(\delta'(r)) + o(r^{\nu_1+1} o(\delta'(r))) + \delta'(\overline{r})(\Sigma_2 r^{\nu_1+1} + o(r^{\nu_1+1}))}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{(\Sigma_1 o(1) + \Sigma_2)\delta'(r) r^{\nu_1+1} + o(r^{\nu_1+1}\delta'(r))}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{\delta(r)}{\delta'(r) r^{\nu_1+1}}}{(\Sigma_1 + 1)o(1) + \Sigma_2} = \infty,$$

согласно второму предельному равенству условия 3) предположения 3.1.

Следовательно, $\mathcal{L} = +\infty$, то есть существует ρ_3-окрестность точки $y = 0$, для всех y из которой слагаемое $-\Gamma\delta(\|y\|)\|y\|^2$ является по модулю большим остальных слагаемых в правой части неравенства (3.20). Это означает, что поведение функции $W(\|y\|)$ в указанной окрестности полностью определяется поведением функции $-\Gamma\delta(\|y\|)\|y\|^2$, то есть имеет место представление $W(\|y\|) = -\delta_1(\|y\|)$, где $\delta_1(r)$ — функция класса Хана. Таким образом, при всех $\|y\| < \min\{\widetilde{\rho}, \rho_3\}$ правильно неравенство

$$v^{\Delta}(t, y)\Big|_{(3.1)} \leq -\delta_1(\|y\|). \tag{3.21}$$

Оценки (3.11) и (3.21) отображают свойства разности и дельта-производной, соответственно, вспомогательной функции $v(t, y)$ вдоль решений уравнения (3.1). Исходя из них, нетрудно также выявить и другие свойства функции $v(t, y)$. Так, очевидна оценка

$$v(\tau_k, y) = y^T\Phi(\tau_k, \tau_k, y)Xy = y^T Xy \geq \lambda_{\min}(X)\|y\|^2 =: a(\|y\|), \tag{3.22}$$

где $\lambda_{\min}(X)$ суть наименьшее собственное число матрицы X. Из (3.16) следует, что при всех $\|y\| < r_0$ справедлива оценка

$$v(t, y) \leq K_2\|y\|^2 =: c(\|y\|). \tag{3.23}$$

Таким образом, оценки (3.11), (3.21)–(3.23) отображают свойства матрично-значной функции Ляпунова $v(t, y)$ в силу решения системы динамических уравнений (3.1). Покажем, что из этих оценок следует связная асимптотическая устойчивость решения $y = 0$ системы (3.1).

Из уравнения (3.1) следует интегральное уравнение

$$y(t) = y(\tau_k) + \int_{\tau_k}^{t} R(E, s, y(s))y(s)\Delta s,$$

справедливое для любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{T}$ таких, что $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$. Обозначив $R_1(E, t, y) = R(E, s, y)y$, приходим к оценке $\|y(t)\|$

$$\|y(t)\| \leq \|y(\tau_k)\| + \int_{\tau_k}^{t} \|R_1(E, s, y(s))\|\Delta s$$
$$= \|y(\tau_k)\| + \int_{\tau_k}^{t} \|R_1(E, s, y(s)) - R_1(E, s, 0)\|\Delta s.$$

Функция $R_1(E, t, y)$ удовлетворяет условию Липшица, то есть существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\|R_1(E, s, u) - R_1(E, s, v)\| \leq L\|u - v\|, \tag{3.24}$$

при всех $t \in \mathbb{T}$, u, v таких, что $\|u\|, \|v\| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$.

Действительно, рассмотрим функцию $w(h) = R_1(E, t, hu + (1 - h)v) = R_1(E, t, z_h)$. Поскольку по предположению 1, существуют производные $\frac{\partial G_i(t,y_i)}{\partial y_i^k}$ и $\frac{\partial H(t,y)}{\partial y^k}$, являющиеся ограниченными в ρ_2-окрестности точки $y = 0$, то существует производная $\frac{dw}{dh}$, которая находится по формуле:

$$\frac{dw}{dh} = [R_2(E, t, z_h)z_h + R_1(E, t, z_h)](u - v) = w_0(h)(u - v),$$

где через $R_2(E, t, z_h)$ обозначен оператор, действующий так, что $R_2 y$ является матрицей, в которой i-ый столбец образует вектор $\frac{\partial R_1}{\partial y^i} y$. Оценим норму $w_0(h)$:

$$\|w_0(h)\| \leq \|R_2(E, t, z_h)z_h\| + \|G(t, z_h)\| + \|\widetilde{H}(E, t, z_h)\|$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial R_1}{\partial y^i}\Big|_{y=z_h} z_h \right\|^2 \right)^{1/2} + \|G(t, z_h)\| + \|\widetilde{H}(E, t, z_h)\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} G_j^{(2)} + H_2\Big)\|z_h\|^{\nu_2+1} + \Big(\sum_{j=1}^{m} G_j^{(1)} + H_1\Big)\|z_h\|^{\nu_1}$$
$$= nC_2\|z_h\|^{\nu_2+1} + C_1\|z_h\|^{\nu_1} \leq nC_2(h\|u\| + (1-h)\|v\|)^{\nu_2+1}$$
$$+ C_1(h\|u\| + (1-h)\|v\|)^{\nu_1} =: \chi(h, \|u\|, \|v\|).$$

Очевидно, что функция $\chi(h,u,v)$ является ограниченной в области $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2 | u, v < \min\{\rho_1,\rho_2\}\}$, при всех $h \in [0,1]$, следовательно, ограниченной в D будет также и функция $\chi_1(u,v) = \int_0^1 \chi(h,u,v)\,dh$, то есть, существует постоянная $L > 0$ такая, что $\chi_1(u,v) \leq L$ при всех $(u,v) \in D$. Таким образом,

$$\|R_1(E,t,u) - R_1(E,t,v)\| = \|w(1) - w(0)\| = \|\int\limits_0^1 w_0(h)\,dh(u-v)\|$$

$$\leq \int\limits_0^1 \|w_0(h)\| dh \|u-v\| = \chi_1(\|u\|,\|v\|)\|u-v\| \leq L\|u-v\|,$$

при всех u, v таких, что $\|u\|, \|v\| < \min\{\rho_1,\rho_2\}$. Неравенство (3.24) доказано.

Используя неравенство (3.24) к оценке $\|y(t)\|$, имеем

$$\|y(t)\| \leq \|y(\tau_k)\| + \int\limits_{\tau_k}^{t} L\|y(s)\|\Delta s.$$

Далее, используя обобщенное неравенство Гронуолла, получаем окончательную оценку

$$\|y(t)\| \leq e_L(t,\tau_k)\|y(\tau_k)\|, \tag{3.25}$$

справедливую для любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{T}$ таких, что $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$. Поскольку последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет, по предположению 3.1, условию 2), то $\sup_{k\in\mathbb{N}} e_L(\tau_{k+1},\tau_k)$ является положительным числом, которое обозначим L_1. Тогда неравенство (3.25) примет вид

$$\|y(t)\| \leq L_1\|y(\tau_k)\|, \tag{3.26}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{T}$ таких, что $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$.

Выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и положим $l = a(\frac{\varepsilon}{L_1})$. Пусть $t_0 \in \mathbb{T}$ — произвольно. Поскольку функция $v(t,y)$ непрерывна в точке $y = 0$, то существует $\eta > 0$ такое, что $\eta < \varepsilon$ и для всех y из η-окрестности нуля выполняется неравенство: $v(t,y) < l$. Исследуем поведение функции $v(t,y(t))$. Обозначим $\underline{k}=\min\{k:\tau_k\geq t_0\}$ и $\overline{k}=\max\{k:\tau_k\leq t\}$. Тогда имеет место представление

$$v(t,y(t))=v(t_0,y(t_0))+\int\limits_{t_0}^{\rho(\tau_{\underline{k}})}v^{\Delta}(s,y(s))\Delta s+\int\limits_{\tau_{\underline{k}}}^{\rho(\tau_{\underline{k}+1})}v^{\Delta}(s,y(s))\Delta s$$
$$+\cdots+\int\limits_{\tau_{\overline{k}}}^{t}v^{\Delta}(s,y(s))\Delta s+\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}\Big(v(\tau_k,y(\tau_k))-v(\tau_k-0,y(\tau_k-0))\Big), \tag{3.27}$$

в чем нетрудно убедиться при помощи принципа индукции на временной шкале [19]. Поскольку решение уравнения (3.1) непрерывно зависит от начальных данных (согласно лемме 2 из работы [23]), то, выбрав y_0 из достаточно малой η_1-окрестности нуля ($\eta_1<\eta$), можно добиться, чтобы на промежутках интегрирования в формуле (3.27) решение $y(t;t_0,y_0)$ находилось в окрестности точки $y=0$ наперед заданного радиуса. Поэтому, выбрав y_0 принадлежащим пересечению η_1-окрестности и окрестностей нуля, в которых выполняются оценки (3.11) и (3.21), в силу последних из (3.27) получим оценку

$$v(t,y(t))\leq v(t_0,y_0)-\int\limits_{t_0}^{\rho(\tau_{\underline{k}})}\delta_1(\|y(s)\|)\Delta s-\int\limits_{\tau_{\underline{k}}}^{\rho(\tau_{\underline{k}+1})}\delta_1(\|y(s)\|)\Delta s-\cdots$$
$$-\int\limits_{\tau_{\overline{k}}}^{t}\delta_1(\|y(s)\|)\Delta s-\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}b(\|y(\tau_k-0)\|)<v(t_0,y_0)-\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}b(\|y(\tau_k-0)\|),$$

из которой для любых $t_1,t_2\in\mathbb{T}$, $t_0\leq t_1<t_2$ имеем аналогично

$$v(t_2,y(t_2))<v(t_1,y(t_1))-\sum_{\tau_k\in[t_1,t_2]}b(\|y(\tau_k-0)\|). \tag{3.28}$$

А поскольку функция $b(r)$ является функцией класса Хана, то окончательно имеем

$$v(t_2,y(t_2))<v(t_1,y(t_1)), \tag{3.29}$$

если существует $k\in\mathbb{N}$ такое, что $\tau_k\in[t_1,t_2]$, и

$$v(t_2,y(t_2))\leq v(t_1,y(t_1)), \tag{3.30}$$

если такого k не существует.

Обозначим η_2 ($\eta_2 < \eta$) — радиус окрестности точки $y = 0$ такой, что если $\|y_0\| < \eta_2$, то выполняются оценки (3.29)–(3.30). Из предыдущих рассуждений очевидно, что такая окрестность существует. Докажем, что траектория решения $y(t) = y(t; t_0, y_0)$ динамического уравнения (3.1) с начальным условием $\|y_0\| < \eta_2$ никогда не покинет ε-окрестность точки $y = 0$, то есть

$$\|y(t)\| < \varepsilon \quad \text{при любых} \quad t \geq t_0. \tag{3.31}$$

Действительно, в точке $t = t_0$ условие (3.31) выполняется:

$$\|y_0\| < \eta_2 < \eta < \varepsilon.$$

Пусть неравенство (3.31) неверно для некоторого $\bar{t} > t_0$, то есть $\|y(\bar{t})\| \geq \varepsilon$, и $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau_{k_0-1} < \bar{t} \leq \tau_{k_0}$. Отсюда, используя оценку (3.26), находим

$$\|y(\tau_{k_0})\| \geq \frac{\varepsilon}{L_1}. \tag{3.32}$$

На основании (3.22), (3.27)–(3.30), (3.32) и вследствие монотонности функции $a(r)$ получаем цепочку неравенств

$$l > v(t_0, y(t_0)) > v(\bar{t}, y(\bar{t})) > v(\tau_{k_0}, y(\tau_{k_0})) \geq a(\|y(\tau_{k_0})\|) \geq a\Big(\frac{\varepsilon}{L_1}\Big) = l,$$

что невозможно. Таким образом, найденное противоречие доказывает (3.31).

Покажем, что для любого движения $y(t) = y(t; t_0, y_0)$ существует $\eta_0 > 0$ такое, что из условия $\|y_0\| < \eta_0$ следует $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Из (3.29) и (3.30) заключаем, что функция $v(t, y(t))$ монотонно убывает и ограничена снизу. Следовательно, справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} v(t, y(t)) = \inf_t v(t, y(t)) = \alpha \geq 0. \tag{3.33}$$

Если $\alpha > 0$, то тогда существует σ такое, что

$$\|y(t)\| \geq \sigma > 0, \quad \text{при} \quad t \geq t_0. \tag{3.34}$$

Действительно, если это не так, то существует последовательность точек $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \to +\infty$ шкалы такая, что

$$\lim_{k\to\infty} x(t_k) = 0.$$

Тогда из оценок (3.22), (3.23) получаем неравенства

$$\lim_{k\to\infty} a(\|y(t_k)\|) \leq \lim_{k\to\infty} v(t_k, y(t_k)) \leq \lim_{k\to\infty} c(\|y(t_k)\|).$$

Так как функции $a(r)$ и $b(r)$ — непрерывные и равны нулю в точке $r = 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} v(t_k, y(t_k)) = 0,$$

что противоречит положительности α.

Таким образом, если $\alpha > 0$, то выполняется (3.34), и можно в силу (3.31) предполагать также, что $\|y(t)\| < \eta_0$.

Обозначим $l = b(\sigma)$. Тогда из (3.34) очевидно следует, что для всех $s \in [t_0, t]$ справедливо неравенство

$$b(\|y(s)\|) \geq l > 0, \tag{3.35}$$

так как $b(r)$ монотонно возрастает, являясь функцией класса Хана. Следуя далее неравенству (3.28), получим оценку для функции $v(t, y(t))$ в виде

$$v(t, y(t)) \leq v(t_0, y(t_0)) - l(t - t_0). \tag{3.36}$$

Из (3.36) следует, что существует $\bar{t} \geq t_0$ такое, что $v(\bar{t}, y(\bar{t})) < 0$, а это противоречит равенству (3.33). Таким образом, предположение о положительности α неверно, следовательно

$$\lim_{t\to\infty} v(t, y(t)) = \alpha = 0. \tag{3.37}$$

Положим $\gamma_1 = a(\varepsilon)$. В силу (3.37) существует $T = T(\varepsilon) > t_0$ такое, что

$$v(T, y(T)) < \gamma_1.$$

Так как функция $v(t, y(t))$ монотонно убывает, то

$$v(t, y(t)) < \gamma \quad \text{при} \quad t \geq T, \tag{3.38}$$

и отсюда имеем

$$\|y(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t > T. \tag{3.39}$$

Действительно, если для некоторого значения t_1, большего T, выполняется противоположное неравенство

$$\|y(t_1)\| \geq \varepsilon,$$

то, учитывая равенство $a(\varepsilon) = \gamma_1$ и формулу (3.38), мы имели бы

$$\gamma_1 > v(t_1, y(t_1)) \geq a(\|y(t_1)\|) \geq \gamma_1,$$

что, очевидно, невозможно.

Таким образом, на основании неравенства (3.39) делаем вывод:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \tag{3.40}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, поскольку имеют место оценка (3.31) и предельное равенство (3.40), причем при всех значениях матрицы взаимосвязей E, то отсюда делаем вывод об асимптотической устойчивости решения $y = 0$ системы (3.1) при всех значениях матрицы взаимосвязей E, то есть, о связной асимптотической устойчивости. Теорема доказана. □

В силу леммы 2.1, положение равновесия $x = 0$ исходной системы S является связно асимптотически устойчивым.

Заключение

В статье рассмотрена крупномасштабная система динамических уравнений на временной шкале при некоторых предположениях относительно динамики независимых подсистем и свойств связей между ними. На экспоненциальные функции линейных приближений независимых подсистем и функции, обратные к экспоненциальным функциям, наложено требование ограниченности. Нелинейные части независимых подсистем и связи между подсистемами имеют при этом псевдолинейный вид. Такие предположения обобщают для произвольной шкалы $\mathbb{T}$ множество упомянутых во введении критических случаев в теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.

Исследование связной устойчивости, то есть, устойчивости при всех значениях матрицы взаимосвязи, проведено на основании матрично-значной концепции метода вспомогательных функций Ляпунова, причем вспомогательные функции являются разрывными по переменной шкалы (по обобщенному времени). В результате получены достаточные условия связной асимптотической устойчивости нулевого решения крупномасштабной системы динамических уравнений на временной шкале.

Логичным продолжением выполненных в данной статье исследований является более подробное рассмотрение отдельных критических случаев, которые охватываются условием (1.6), а также поиск крупномасштабных систем динамических уравнений на временной шкале, которые при помощи некоторой ляпуновской замены переменных приводятся к системам исследованного в данной статье типа. Актуальной также является задача построения примеров, иллюстрирующих полученные теоретические результаты.

Литература

[1] N. Huu Du, L. Huy Tien, *On the exponential stability of dynamic equations on time scales* // J. Math. Anal. Appl., **331** (2007), 1159-–1174.

[2] J. J. DaCunha, *Stability for time varying linear dynamic systems on time scales* // J. Comp. Appl. Math., **176** (2005), 381-–410.

[3] S. Kyu Choi, N. Koo, *On the stability of linear dynamic systems on time scales* // J. Diff. Equat. Appl., **15** (2009), No. 2, 167-–183.

[4] C. Potzsche, *Topological decoupling, linearization and perturbation on inhomogeneous time scales* // J. Diff. Equat., **245** (2008), 1210-–1242.

[5] V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala, *Hybrid systems on time scales* // J. Comp. Appl. Math., **141** (2002), 227-–235.

[6] A. S. Vatsala, *Strict stability criteria for dynamic systems on time scales* // J. Diff. Equat. Appl., **3** (1997) No. 3, 267–276.

[7] A. Ruffing, M. Simon, *Corresponding Banach spaces on time scales* // J. Comp. Appl. Math., **179** (2005), 313-–326.

[8] Z. Drici, *Practical stability of large-scale uncertain control systems on time scales* // J. Diff. Equat. Appl., **2** (1996), No. 2, 139–159.

[9] A. Tuna, S. Kutukcu, *Some integral inequalities on time scales* // Appl. Math. Mech., **29(1)** (2008), 23-–29.

[10] Л. Г. Хазин, Э. Э. Шноль, *Устойчивость критических положений равновесия*, Изд-во НЦБИ АН СССР, Пущино, 1985.

[11] В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Динамические системы **1**, ВИНИТИ, М., 1985.

[12] А. М. Молчанов, *Об устойчивости нелинейных систем*, Дис. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. М.: Мат. ин.-т АН СССР, 1963.

[13] А. Я. Савченко, А. О. Игнатьев, *Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем*, Киев: Наук. думка, 1989.

[14] А. О. Игнатьев, *Об устойчивости решений систем разностных уравнений в одном критическом случае* // Укр. мат. вісн., **5** (2008, No. 4, 488–506.

[15] О. С. Черникова, *Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* // Укр. мат. журнал, **34** (1982), No. 6, 601–607.

[16] A. I. Dvirnyi, V. I. Slyn'ko, *Stabylity of solutions to impulsive differential equations in critical cases* // Sib. Math. J., **52** (2011), No. 1, 54–62.

[17] А. А. Мартынюк, А. Ю. Оболенский, *Исследование устойчивости автономных систем сравнения*, Киев, Институт математики АН УССР, 1978 (Препринт 78.28), 24 с.

[18] А. Ю. Оболенский, *Критерии устойчивости движения некоторых нелинейных систем*, К.: Феникс, 2010.

[19] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications*, Birkhaser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[20] D. D. Siljak, *Asymptotic stability and Instability of Large-Scale Systems* // IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-18** (1973), No. 6, 636–645.

[21] Л. Т. Груйич, А. А. Мартынюк, М. Риббенс-Павелла, *Устойчивость крупномасштабных систем при структурных возмущениях*, Киев: Наук. думка, 1984.

[22] С. В. Бабенко, *К теории устойчивости на временной шкале класса линейных систем при структурных возмущениях* // Прикладная механика, **47** (2011), No. 1, 107–118.

[23] С. В. Бабенко, В. И. Слынько, *Устойчивость решений одного класса нелинейных динамических уравнений* // Нелинейные колебания, **13** (2010), No. 4, 439–460.

Сведения об авторах

Сергей Витальевич Бабенко, Виталий Иванович Слынько

Институт механики
им. С. П. Тимошенко НАНУ
ул. Нестерова, 3,
03057 Киев,
Украина
E-Mail: `sofuslee@rambler.ru`, `vitstab@ukr.net`