Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 3, 404 – 420

О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с суммарно-разностным ядром на полуоси

Хачатур А. Хачатрян, Микаел Г. Костанян

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В статье рассмотрен один класс нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с суммарно-разностным ядром на положительной полуоси. При помощи построения специальной факторизации исходного линейного интегро-дифференциального оператора доказывается существование неотрицательного, нетривиального и монотонно возрастающего решения, а также находится его асимптотическое поведение в бесконечности. В конце работы приведены соответствующие примеры.

2010 MSC. 35XX, 35G50, 35G55.

Ключевые слова и фразы. Факторизация, собственное значение, предел решения, последовательные приближения, пространство Соболева.

1. Введение

Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$-\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\lambda^2\varphi(x)=\mu(x)\int\limits_0^\infty [K_1(x-t)-K_2(x+t)]\,G(\varphi(t))\,dt, \quad x>0 \tag{1.1}$$

относительно искомой вещественной функции $\varphi(x)$, с граничными условиями

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi(x)\in W^2_\infty(0;+\infty), \tag{1.2}$$

где $W^2_\infty(0;+\infty)=\left\{f : \frac{d^kf}{dx^k}\in L_\infty(0;+\infty),\ k=0,1,2\right\}$ — пространство Соболева, где $L_\infty(0;+\infty)$ — пространство существенно ограниченных

Статья поступила в редакцию 5.04.2010

функций на $(0;+\infty)$. Здесь $\lambda > 0$ — параметр уравнения, $\mu(x)$ — определенная на $(0;+\infty)$ измеримая функция, причем

а) $0 < \mu_0 \leqslant \mu(x) \leqslant 1$, $x \in (0;+\infty)$;

б) $\mu(x) \uparrow$ по x на $(0;+\infty)$;

в) $x^j(1-\mu(x)) \in L_1(0;+\infty)$, $j = 0, 1$;

$K_1(x)$ и $K_2(x)$ — суммируемые функции на $(-\infty;+\infty)$ и $(0;+\infty)$, соответственно, удовлетворяющие следующим условиям:

г) $0 \leqslant K_1(x) \in L_1(-\infty;+\infty) \cap M(-\infty;+\infty)$;

д) $K_1(-x) > K_1(x)$, $x > 0$ и существует

$$\nu(K_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau)\tau\, d\tau < +\infty,$$

причем последний интеграл абсолютно сходится;

е) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(x)\, dx = \lambda^2$;

ж) $\displaystyle m_j(K_2) = \int\limits_0^{\infty} K_2(x) \cdot x^j\, dx < \infty, \quad j = 0, 1, 2, 3$;

з) $0 \leqslant K_2(x) < K_1(x)$, $x > 0$;

и) $K_2(x) \downarrow$ по x на $(0;+\infty)$.

Функция $G(x)$, определенная на $(-\infty;+\infty)$, измеримая функция, причем предполагается, что существует число $\eta > 0$ такое, что

й) $G(x) \in C[0;\eta]$;

к) $G(x) \uparrow$ по x, $G(x) \geqslant x$, $x \in [0;\eta]$;

л) $G(\eta) = \eta$, $G(0) = 0$.

Задача (1.1)–(1.2) кроме самостоятельного математического интереса имеет применение в квантовой механике (см. [1]). В том частном случае, когда $K_2(x) \equiv 0$ и $\mu(x) \equiv 1$, задача (1.1)–(1.2) ранее была исследована в работах одного из авторов (см. [2, 3]).

В настоящей работе мы будем заниматься вопросами построения неотрицательного, нетривиального и монотонно возрастающего решения задачи (1.1)–(1.2) и исследованием асимптотического поведения решения в бесконечности, когда функции $K_1(x)$, $K_2(x)$ и $\mu(x)$ удовлетворяют вышеприведенным условиям а)–л).

Ниже будет доказано, что рассматриваемая задача обладает решением $\varphi(x) \geqslant 0$ на $[0;+\infty)$, причем $\varphi(x) \uparrow$ по x, $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$ и $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \eta$.

2. Основной результат

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия а)–л). Тогда задача* (1.1)–(1.2) *имеет неотрицательное ненулевое и монотонно возрастающее решение. Более того, при $x > 0$, $\varphi(x) > 0$ и $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \eta$.*

Доказательство теоремы разобьем на шаги.

I шаг. Пусть E — одно из следующих банаховых пространств

1) $L_p(0;+\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$;

2) $L_\infty(0;+\infty)$ — пространство почти всюду ограниченных функций с нормой $\|f\| = \sup\operatorname{ess}_{x>0} |f(x)|$;

3) $C_M(0;+\infty)$ — пространство непрерывных и ограниченных функций с нормой $\|f\| = \sup_{x>0} |f(x)|$;

4) $C_0(0;+\infty) \subset C_M(0;+\infty)$ — подпространство функций из $C_M(0;+\infty)$, для которых $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Обозначим через Ω_1 — класс интегральных операторов Винера–Хопфа: $\mathbb{W}_1 \in \Omega_1$, если

$$(\mathbb{W}_1 f)(x) = \int\limits_0^\infty W_1(x-t) f(t)\,dt, \qquad W_1 \in L_1(-\infty,+\infty) \tag{2.1}$$

и через Ω_2 — класс интегральных операторов типа Ганкеля: $\mathbb{W}_2 \in \Omega_2$, если

$$(\mathbb{W}_2 f)(x) = \int\limits_0^\infty W_2(x+t) f(t)\,dt, \qquad W_2 \in L_1(0,+\infty). \tag{2.2}$$

Операторы из Ω_1 и Ω_2 действуют в каждом из пространств E. Как известно (см. [4]), операторы из Ω_2 являются вполне непрерывными в каждом из рассмотренных банаховых пространств E. В отличие от операторов из Ω_2, интегральные операторы из Ω_1 не обладают таким свойством. Ниже нами существенным образом будет использован данный замечательный факт.

Вначале рассмотрим следующее однородное линейное уравнение

$$S(x)=\int_0^\infty [W_1(x-t)-W_2(x+t)]\ S(t)\,dt, \qquad x>0 \tag{2.3}$$

относительно искомой функции $S(x)$, где

$$W_1(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda y}\int_0^\infty e^{-\lambda z}K_1(x-y+z)\,dz\,dy, \qquad x>0 \tag{2.4}$$

и

$$W_2(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda y}\int_0^\infty e^{-\lambda z}K_2(x+y+z)\,dz\,dy, \qquad x>0. \tag{2.5}$$

На первом шаге покажем, что уравнение (2.3) обладает ограниченным знакопеременным решением.

Согласно условиям д), е) получим

$$\int_{-\infty}^\infty W_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda y}\int_0^\infty e^{-\lambda z}K_1(x-y+z)\,dz\,dy\,dx$$
$$=\int_0^\infty e^{-\lambda y}\int_0^\infty e^{-\lambda z}\int_{-\infty}^\infty K_1(x-y+z)\,dz\,dx\,dy=1.$$

Можно показать также, что

$$\nu(W_1)<0, \quad \text{причем} \int_{-\infty}^\infty |x|W_1(x)\,dx<+\infty. \tag{2.6}$$

Из (2.5) с учетом условия ж) следует, что

$$m_j(W_2)\equiv\int_0^\infty W_2(x)\cdot x^j\,dx<\infty, \quad j=0,1,2,3. \tag{2.7}$$

Перепишем уравнение (2.3) в операторной форме:

$$(\mathbb{I}-\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)\,S=0, \tag{2.8}$$

где $\mathbb{I}$ — единичный оператор, а $\mathbb{W}_1 \in \Omega_1$ и $\mathbb{W}_2 \in \Omega_2$ с ядрами (2.4) и (2.5), соответственно. Известно (см. [5]), что при условии (2.6) оператор $\mathbb{I} - \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ допускает факторизацию

$$\mathbb{I} - \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = (\mathbb{I} - \mathbb{V}_-)(\mathbb{I} + \mathbb{T})(\mathbb{I} - \mathbb{V}_+), \tag{2.9}$$

где $\mathbb{V}_\pm$ — вольтерровы операторы типа свертки:

$$\begin{aligned} (\mathbb{V}_- f)(x) &= \int_x^\infty V_-(t-x) f(t)\, dt, \\ (\mathbb{V}_+ f)(x) &= \int_0^x V_+(x-t) f(t)\, dt, \end{aligned} \qquad x > 0, \tag{2.10}$$

$V_\pm(x) \in L_1(0; +\infty)$, $\forall f \in E$. Причем, в случае $\nu(W_1) < 0$

$$\gamma_- \equiv \int_0^\infty V_-(\tau)\, d\tau = 1, \qquad \gamma_+ \equiv \int_0^\infty V_+(\tau)\, d\tau < 1. \tag{2.11}$$

Факторизация (2.9) понимается как равенство интегральных операторов, действующих в пространстве E.

Положим

$$S_1 = (\mathbb{I} - \mathbb{V}_+) S \quad \text{и} \quad S_2 = (\mathbb{I} + \mathbb{T}) S_1. \tag{2.12}$$

Тогда решение уравнения (2.8) в обозначениях (2.12), согласно факторизации (2.9), равносильно решению следующих связанных уравнений:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{V}_-) S_2 = 0, \tag{2.13}$$

$$(\mathbb{I} + \mathbb{T}) S_1 = S_2, \tag{2.14}$$

$$(\mathbb{I} - \mathbb{V}_+) S = S_1. \tag{2.15}$$

Уравнение (2.13) в раскрытом виде будет

$$S_2(x) = \int_x^\infty V_-(t-x) S_2(t)\, dt.$$

Возьмем в качестве решения $S_2(x) \equiv 0$. Учитывая это, уравнение (2.14) в раскрытом виде будет

$$S_1(x) = -\int_0^\infty T(x+t) S_1(t)\, dt. \tag{2.16}$$

Рассмотрим два возможных случая:

1) $\varepsilon = -1$ собственное значение оператора $\mathbb{T}$;

2) $\varepsilon = -1$ не является собственным значением оператора $\mathbb{T}$.

В первом случае $\exists S_1(x) \not\equiv 0$, $S_1(x) \in M(0;\infty)$ такое, что выполнялось условие (2.16). Из следующего неравенства

$$|S_1(x)| \leqslant \int\limits_0^\infty T(x+t)\ |S_1(t)|\ dt \leqslant c \int\limits_x^\infty T(z)\, dz$$

с учетом теоремы Фубини и условия (2.7) заключаем, что $S_1(x) \in L_1(0;+\infty) \cap M(0;+\infty)$. Во втором случае, согласно условию (2.11), взяв за решение уравнения (2.13) $S_1(x) \equiv 1$, уравнение (2.14) будет таким

$$S_1(x) = 1 - \int\limits_0^\infty T(x+t) S_1(t)\, dt.$$

Поскольку оператор $\mathbb{T}$ является непрерывным в E и $\varepsilon = -1$ не является его собственным значением, то последнее уравнение обладает ограниченным решением.

Перейдем к решению уравнения (2.15). В раскрытом виде оно будет иметь вид

$$S(x) = S_1(x) + \int\limits_0^x V_+(x-t) S(t)\, dt.$$

Учитывая условие (2.11), заключаем, что в обеих случаях данное уравнение обладает ограниченным, но знакопеременным решением $S(x)$.

II шаг. Ниже покажем, что имеет место неравенство

$$W_1(x-t) - W_2(x+t) > 0. \tag{2.17}$$

Вначале покажем, что $W_1(x) - W_2(x) > 0$ при $x > 0$. Согласно (2.4)

$$\begin{aligned} W_1(x) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda y} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda z} K_1(x-y+z)\, dz\, dy \\ = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda y} \int\limits_0^{y-x} e^{-\lambda z} K_1(x-y+z)\, dz\, dy \end{aligned}$$

$$+\int_0^\infty e^{-\lambda y}\int_{y-x}^\infty e^{-\lambda z}K_1(x-y+z)\,dz\,dy.$$

В первом слагаемом $x-y+z<0$. Согласно условиям д), з), и)

$$K_1(x-y+z)>K_1(-x+y-z)>K_2(-x+y-z)>K_2(x+y+z).$$

Во втором слагаемом $x-y+z>0$.

$$K_1(x-y+z)>K_2(x-y+z)>K_2(x+y+z),$$

следовательно,

$$W_1(x)>\int_0^\infty e^{-\lambda y}\int_0^{y-x} e^{-\lambda z}K_2(x+y+z)\,dz\,dy$$
$$+\int_0^\infty e^{-\lambda y}\int_{y-x}^\infty e^{-\lambda z}K_2(x+y+z)\,dz\,dy=W_2(x).$$

Теперь покажем, что $W_1(x-t)>W_2(x+t)$. В случае $x>t$, в силу условия и)

$$W_1(x-t)>W_2(x-t)>W_2(x+t),$$

а в случае $x<t$

$$W_1(x-t)>W_1(t-x)>W_2(t-x)>W_2(t+x),$$

т.е. в любом случае выполняется неравенство (2.17).

III шаг.

Лемма 2.1. *Уравнение* (2.3) *обладает также ненулевым, неотрицательным и ограниченным решением* $S^*(x)$, *причем* $S^*(x)\geq|S(x)|$.

Доказательство. Рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{cases} S^{(0)}(x)=\sup\limits_{x>0}|S(x)|\equiv S_0\\ S^{(n+1)}(x)=\int\limits_0^\infty[W_1(x-t)-W_2(x+t)]\,S^{(n)}(t)\,dt,\ n=0,1,2,\ldots\end{cases}\tag{2.18}$$

Убедимся, что последовательность $S^{(n)}(x)\downarrow$ по n при фиксированном $x>0$. В самом деле

$$S^{(1)}(x) = \int\limits_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\, S^{(0)}(t)\, dt$$

$$\leqslant S_0 \int\limits_0^\infty W_1(x-t)\, dt = S_0 \int\limits_{-\infty}^{x} W_1(\tau)\, d\tau$$

$$\leqslant S_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_1(\tau)\, d\tau = S_0 = S^{(0)}(x).$$

Допустим, что $S^{(n)}(x) \leqslant S^{(n-1)}(x)$ и докажем, что в этом случае $S^{(n+1)}(x) \leqslant S^{(n)}(x)$. Действительно, согласно (2.17)

$$S^{(n+1)}(x) = \int\limits_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\, S^{(n)}(t)\, dt$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\, S^{(n-1)}(t)\, dt = S^{(n)}(x).$$

Покажем, что все члены последовательности $S^{(n)}(x)$ снизу ограничены функцией $|S(x)|$. Для $n = 0$ это очевидно, поскольку $S^{(1)}(x) = \sup\limits_{x>0} |S(x)| \geqslant |S(x)|$. Допустим, что $S^{(n)}(x) \geqslant |S(x)|$ и покажем, что $S^{(n+1)}(x) \geqslant |S(x)|$.

Так как

$$S^{(n+1)}(x) = \int\limits_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\, S^{(n)}(t)\, dt$$

$$\geqslant \int\limits_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\, |S(t)|\, dt$$

$$\geqslant \left| \int\limits_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\, S(t)\, dt \right| = |S(x)|.$$

Согласно теореме Б. Леви о монотонной сходимости (см. [6]) заключаем, что последовательность функций $\{S^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ почти всюду в $(0; +\infty)$ имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} S^{(n)}(x) = S^*(x) \in M(0; +\infty),$$

а этот предел является решением уравнения (2.3). $\square$

IV шаг.

Лемма 2.2. *Построенное решение* $S^*(x)$ *уравнения* (2.3) *монотонно возрастающая и строго положительная функция.*

Доказательство. Сначала заметим, что построенная при помощи итераций (2.18) последовательность $S^{(n)}(x) \uparrow$ по x при каждом фиксированном n. В самом деле возьмем $x_1 > x_2$. Тогда

$$S^{(n)}(x_1) = \int_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\ S^{(n)}(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty W_1(x-t)S^{(n-1)}(t)\,dt - \int_0^\infty W_2(x+t)S^{(n-1)}(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} W_1(z)S^{(n-1)}(x_1-z)\,dz - \int_{x_1}^\infty W_2(z)S^{(n-1)}(z-x_1)\,dz$$

$$> \int_{-\infty}^{x_2} W_1(z)S^{(n-1)}(x_2-z)\,dz - \int_{x_2}^\infty W_2(z)S^{(n-1)}(z-x_2)\,dz = S^{(n)}(x_2).$$

Следовательно, предельная функция $S^*(x) \uparrow$ по x.

Следовательно, существует $x_0 \in [0; +\infty)$ такое, что $\alpha \equiv S^*(x_0) > 0$. Поскольку $S^*(x)$ решение уравнения (2.3), то из (2.17) получим

$$S^*(x) = \int_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\,S^*(t)\,dt$$

$$\geqslant \int_{x_0}^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\,S^*(t)\,dt$$

$$\geqslant \alpha \int_{x_0}^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\ dt$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{x-x_0} W_1(z)\,dz - \alpha \int_{x+x_0}^\infty W_2(z)\,dz$$

$$\geqslant \alpha \int_{-\infty}^{-x_0} W_1(z)\,dz - \alpha \int_{x_0}^\infty W_2(z)\,dz$$

$$= \alpha \int\limits_{x_0}^{\infty} [W_1(-\tau) - W_2(\tau)] \, d\tau$$

$$\geqslant \alpha \int\limits_{x_0}^{\infty} [W_1(-\tau) - W_2(\tau)] \, d\tau > 0$$

следовательно, $\inf_{x>0} S^*(x) > 0$.

Таким образом, $S^*(x) \uparrow$ по x и $\inf_{x>0} S^*(x) > 0$. □

V шаг. Ниже покажем, что аналогичными свойствами обладает также решение следующего уравнения

$$B(x) = \mu(x) \int\limits_0^{\infty} [W_1(x-t) - W_2(x+t)] \, B(t) \, dt, \quad x > 0 \qquad (2.19)$$

относительно искомой функции $B(x)$, где функция $\mu(x)$ удовлетворяет условиям а)–в).

С этой целью рассмотрим следующее неоднородное линейное уравнение:

$$R(x) = (1-\mu(x)) \, S^*(x) + \mu(x) \int\limits_0^{\infty} [W_1(x-t) - W_2(x+t)] \; R(t) \, dt, \quad x > 0 \qquad (2.20)$$

относительно искомой функции $R(x)$.

Покажем, что уравнение (2.20) имеет решение в $L_1(0;+\infty)$. Действительно, рассмотрим следующее вспомогательное уравнение:

$$R^*(x) = (1-\mu(x)) \, S^*(x) + \int\limits_0^{\infty} W_1(x-t) R^*(t) \, dt, \quad x > 0. \qquad (2.21)$$

Так как $g(x) \equiv (1-\mu(x)) \, S^*(x) \in L_1(0;+\infty)$ и $m_1(g) < +\infty$, то из результатов работы [7] следует, что уравнение (2.21) имеет положительное решение из пространства $L_1(0;+\infty)$. Поскольку $g(x) \leqslant S_0$, а $W_1(x) \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \sup_{x>0} K_1(x)$, то это решение является ограниченным.

Таким образом, $R^*(x) \in M(0;+\infty) \cap L_1(0;+\infty)$.

Введем следующие простые итерации для уравнения (2.20):

$$\begin{cases} R^{(0)}(x) = (1-\mu(x)) \, S^*(x) \\ R^{(n+1)}(x) = (1-\mu(x)) \, S^*(x) \\ \qquad + \mu(x) \displaystyle\int\limits_0^{\infty} [W_1(x-t) - W_2(x+t)] \, R^{(n)}(t) \, dt, \; n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Очевидно, что последовательность функций $R^{(n)}(x) \uparrow$ по n, $R^{(n)}(x) \leqslant R^*(x)$, следовательно она имеет точечный предел $R(x) \in L_1(0;+\infty) \cap M(0;+\infty)$.

Таким образом, мы показали, что уравнение (2.20) обладает $R(x) \in L_1(0;+\infty) \cap M(0;+\infty)$ решением. Используя (2.3), простой подстановкой можно убедиться, что функция $S^*(x)$ также является решением уравнения (2.20).

Из итераций

$$\begin{cases} R^{(0)}(x) \equiv 0 \\ R^{(n+1)}(x) = (1-\mu(x))\, S^*(x) \\ \qquad +\mu(x) \int\limits_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\, R^{(n)}(t)\, dt, \;\; n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

вытекает, что $R^{(n)}(x) \leqslant S^*(x)$, следовательно, $R(x) \leqslant S^*(x)$. Заметим, что $R(x) \not\equiv S^*(x)$ ибо $\inf\limits_{x>0} S^*(x) > 0$, а $R(x) \in L_1(0;+\infty) \cap M(0;+\infty)$. Обозначим

$$B_0(x) \equiv S^*(x) - R(x) > 0,$$

которая удовлетворяет уравнению (2.19).

Покажем, что уравнение (2.19) обладает ограниченным решением $B^*(x)$, причем $B^*(x)$ монотонно возрастающая функция и $\inf_{x>0} B^*(x) > 0$. Для этого рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{cases} B^{(0)}(x) = \sup\limits_{x>0} B_0(x) \\ B^{(n+1)}(x) = \mu(x) \int\limits_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\, B^{(n)}(t)\, dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

Используя те же методы, что и на предыдущих шагах, доказывается, что последовательность функций $B^{(n)}(x) \downarrow$ по n, $B^{(n)}(x) \geqslant B_0(x)$, $B^{(n)} \uparrow$ по x, следовательно, согласно теоремам Б. Леви и Лебега, существует $\inf_{n\to\infty} B^{(n)}(x) = B^*(x) \in M(0;+\infty)$. Доказательство фактов $B^*(x) \uparrow$ по x и $r_0 \equiv \inf_{x>0} B^*(x) > 0$ совершается аналогичным путем как в шаге IV.

VI шаг. Перейдем к решению уравнения (1.1). Для этого запишем его в операторной форме:

$$\left(\mathbb{D}^2 - \lambda^2 \mathbb{I} + \mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2\right) \varphi = 0, \tag{2.22}$$

где $\mathbb{D}$ — оператор дифференцирования, $\mathbb{I}$ — единичный оператор, $\mathbb{K}_1$ и $\mathbb{K}_2$ — интегральные операторы, определенные по формулам

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{K}_1 f)(x) = \mu(x)\int\limits_0^\infty K_1(x-t)G(f(t))\,dt,\\
&(\mathbb{K}_2 f)(x) = \mu(x)\int\limits_0^\infty K_2(x+t)G(f(t))\,dt,
\end{aligned}\qquad \forall\, f\in E,\ x>0.$$

Оператор $\mathbb{D}^2-\lambda^2\mathbb{I}+\mathbb{K}_1-\mathbb{K}_2$ допускает следующую факторизацию

$$\mathbb{D}^2-\lambda^2\mathbb{I}+\mathbb{K}_1-\mathbb{K}_2 = (\mathbb{D}-\lambda\mathbb{I})(\mathbb{D}+\lambda\mathbb{I}-\mathbb{U}_1+\mathbb{U}_2), \tag{2.23}$$

где

$$(\mathbb{U}_1 f)(x) = \int\limits_0^\infty U_1(x,t)G(f(t))\,dt$$

и

$$(\mathbb{U}_2 f)(x) = \int\limits_0^\infty U_2(x,t)G(f(t))\,dt,$$

ядра которых определяются посредством

$$U_1(x,t) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\mu(x+\tau)K_1(x-t+\tau)\,d\tau$$

и

$$U_2(x,t) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\mu(x+\tau)K_2(x+t+\tau)\,d\tau.$$

Согласно условию б) имеем

$$U_1(x,t) \geqslant \mu(x)\int\limits_0^\infty K_1(x-t+\tau)\,d\tau \equiv \mu(x)\tilde{U}_1(x-t),$$

$$U_2(x,t) \geqslant \mu(x)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}K_2(x+t+\tau)\,d\tau \equiv \mu(x)\tilde{U}_2(x+t).$$

С использованием факторизации (2.23), уравнение (2.22) примет вид

$$(\mathbb{D}-\lambda\mathbb{I})(\mathbb{D}+\lambda\mathbb{I}-\mathbb{U}_1+\mathbb{U}_2)\,\varphi = 0. \tag{2.24}$$

Обозначим $(\mathbb{D}+\lambda\mathbb{I}-\mathbb{U}_1+\mathbb{U}_2)\,\varphi=\xi$. Тогда решение уравнения (2.24) будет равносильно решению двух связанных уравнений:

$$(\mathbb{D}-\lambda\mathbb{I})\,\xi=0, \tag{2.25}$$

$$(\mathbb{D}+\lambda\mathbb{I}-\mathbb{U}_1+\mathbb{U}_2)\,\varphi=\xi. \tag{2.26}$$

Уравнение (2.25) в раскрытом виде будет

$$\xi'(x)=\lambda\xi(x),$$

общее уравнение которого $\xi(x)=ce^{\lambda x}$. Из уравнения (2.26), с учетом условия (1.2), вытекает, что $\xi(x)\in W^1_\infty(0;+\infty)$, а это возможно лишь когда $c=0$, следовательно $\xi(x)\equiv 0$.

Перейдем к решению уравнения (2.26). Обозначим $\psi\equiv(\mathbb{D}-\lambda\mathbb{I})\,\varphi$. В новых обозначениях оно в раскрытом виде будет

$$\psi(x)=\int\limits_0^\infty [U_1(x,t)-U_2(x,t)]\;G\Bigg(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\psi(\tau)\,d\tau\Bigg)dt. \tag{2.27}$$

Для этого уравнения рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{cases}\psi^{(0)}(x)\equiv\lambda\eta\\ \psi^{(n+1)}(x)=\displaystyle\int\limits_0^\infty [U_1(x,t)-U_2(x,t)]\,G\Bigg(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\psi^{(n)}(\tau)\,d\tau\Bigg)dt,\\ \hfill n=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

Заметим, что из условий a) и e) следует, что

$$\int\limits_0^\infty U_1(x,t)\,dt\leqslant\lambda.$$

Используя последнее неравенство, покажем, что последовательность функций $\left\{\psi^{(n)}(x)\right\}_{n=0}^\infty$ монотонно убывает по n. Действительно,

$$\psi^{(1)}(x)=\int\limits_0^\infty [U_1(x,t)-U_2(x,t)]\,G\Bigg(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\lambda\eta\,d\tau\Bigg)\,dt$$
$$\leqslant\int\limits_0^\infty U_1(x,t)G(\eta)\,dt=\eta\int\limits_0^\infty U_1(x,t)\,dt\leqslant\lambda\eta=\psi^{(0)}(x).$$

Неравенство $\psi^{(n+1)}(x) \leqslant \psi^{(n)}(x)$ следует из неотрицательности подынтегральной функции и монотонности функции G.

Индукцией покажем, что

$$0 < B^*(x) \leqslant \psi^{(n)}(x) \leqslant \lambda\eta.$$

Для $n = 0$ это очевидно. Допустим, что для $n = k$ эта цепочка неравенств выполняется и докажем, что она выполняется для $n = k + 1$.

Поскольку

$$0 \leqslant \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\psi^{(k)}(\tau)\,d\tau \leqslant \lambda\eta\frac{1}{\lambda}\bigl(1 - e^{-\lambda t}\bigr) \leqslant \eta,$$

то, учитывая условие к), будем иметь

$$\begin{aligned}
\psi^{(k+1)}(x) \geqslant \int\limits_0^\infty [U_1(x,t) - U_2(x,t)]\,G\Biggl(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}B^*(\tau)\,d\tau\Biggr)\,dt \\
= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\mu(x+\tau)\bigl[K_1(x-t+\tau) \\
- K_2(x+t+\tau)\bigr]\,d\tau\,G\Biggl(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}B^*(\tau)\,d\tau\Biggr)\,dt \\
\geqslant \mu(x)\int\limits_0^\infty \Bigl[\tilde{U}_1(x-t) - \tilde{U}_2(x+t)\Bigr]\,G\Biggl(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}B^*(\tau)\,d\tau\Biggr)\,dt \\
\geqslant \mu(x)\int\limits_0^\infty \Bigl[\tilde{U}_1(x-t) - \tilde{U}_2(x+t)\Bigr]\cdot\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}B^*(\tau)\,d\tau\,dt \\
= \mu(x)\int\limits_0^\infty [W_1(x-t) - W_2(x+t)]\;B^*(t)\,dt = B^*(x)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\psi^{(k+1)}(x) \leqslant \int\limits_0^\infty U_1(x,t)G\Biggl(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\lambda\eta\,d\tau\Biggr)\,dt \\
\leqslant \int\limits_0^\infty U_1(x,t)G(\eta)\,dt \leqslant \lambda\eta.
\end{aligned}$$

Используя теорему Леви заключаем, что существует $\lim_{n\to\infty}\psi^{(n)}(x) = \psi(x)$, который является решением. Более того, по теореме о предельном переходе в неравенствах, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\psi(x) = \lambda\eta. \tag{2.28}$$

Согласно обозначениям

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{-\lambda(x-t)}\psi(t)\,dt.$$

Покажем, что $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \eta$. Для этого оценим $|\varphi(x)-\eta|$:

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\eta| &= \left|\int_0^x e^{-\lambda(x-t)}\psi(t)\,dt-\eta\right| \\ &= \left|\int_0^x e^{-\lambda\tau}\psi(x-\tau)d\tau-\eta\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}d\tau\right| \\ &= \left|\int_0^x e^{-\lambda\tau}\left[\psi(x-\tau)-\eta\lambda\right]\,d\tau-\eta\lambda\int_x^\infty e^{-\lambda\tau}d\tau\right| \\ &\leqslant \int_0^x e^{-\lambda\tau}\left|\psi(x-\tau)-\eta\lambda\right|\,d\tau+\eta\lambda\int_x^\infty e^{-\lambda\tau}d\tau.\end{aligned}$$

Второе слагаемое в силу абсолютной непрерывности интеграла стремится к нулю при $x\to\infty$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ такое, что при $x\geqslant\delta$ следует $\int_x^\infty e^{-\lambda t}dt<\varepsilon$.

Условие (2.28) означает, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_1>0\quad \text{такое, что при } t>\delta_1 \text{ следует } |\psi(t)-\eta\lambda|<\varepsilon.$$

Интеграл $\int_0^x e^{-\lambda\tau}\left|\psi(x-\tau)-\eta\lambda\right|\,d\tau$ разделим на две части

$$\int_0^\delta e^{-\lambda\tau}\left|\psi(x-\tau)-\eta\lambda\right|\,d\tau \quad \text{и} \quad \int_\delta^x \left|\psi(x-\tau)-\lambda\eta\right|\,e^{\lambda\tau}d\tau.$$

Пусть $x>\delta+\delta_1$, тогда в первой части $\tau<\delta\Rightarrow-\tau>-\delta\Rightarrow x-\tau> x-\delta>\delta_1$, т.е.

$$\int_0^\delta e^{-\lambda\tau}\left|\psi(x-\tau)-\lambda\eta\right|\,d\tau<\varepsilon\cdot\frac{1}{\lambda}$$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\int_\delta^\infty e^{-\lambda\tau} d\tau < \varepsilon$. Используя неравенство треугольника и (2.28), для второй части имеем

$$\int\limits_\delta^x e^{-\lambda\tau} \left|\psi(x-\tau) - \lambda\eta\right| d\tau \leqslant 2\lambda\eta \int\limits_\delta^\infty e^{-\lambda\tau} d\tau < 2\lambda\eta\varepsilon,$$

ибо $|\psi(x)| \leqslant \lambda\eta$. Таким образом,

$$|\varphi(x) - \eta| < \Big(\frac{1}{\lambda} + 3\lambda\eta\Big)\varepsilon,$$

откуда вытекает, что пределом функции $\varphi(x)$ является η. □

В конце приведем несколько примеров функции G, удовлетворяющих условиям теоремы:

а) $G(x) = x + \sin x$, $\eta = \pi$,

б) $G(x) = \sqrt{xe^{x-1}}$, $\eta = 1$.

в) $G(x) = \sqrt{x}$, $\eta = 1$.

Благодарности. Авторы выражают благодарность проф. А. Х. Хачатряну за внимание к работе, а также рецензенту за полезные замечания.

Литература

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Т. 3*, Москва, Наука, 1989, 768 с.

[2] Х. А. Хачатрян, *Разрешимость одного класса интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с монотонной нелинейностью на полуоси* // Известия РАН, серия математическая, **74** (2010), No. 5, 191–204.

[3] Х. А. Хачатрян, Э. А. Хачатрян, *О разрешимости некоторых классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с некомпактным оператором* // Известия ВУЗов, математика, КГУ, **54** (2011), No. 1, 91–100.

[4] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Москва, Наука, 1968, 500 с.

[5] Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, *О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки* // Дифференц. уравнения, **26** (1990), No. 1, 1442–1452.

[6] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Москва, Наука, 1981.

[7] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения* // Итоги науки и техники, Математический анализ, **22** (1984), 175–242.

Сведения об авторах

Хачатур Агавардович Хачатрян

Институт математики НАН РА,
пр-т. Баграмяна 24б
0019 Ереван
Республика Армении
E-Mail: khach82@rambler.ru

Микаел Геворгович Костанян

Армянский государственный аграрный университет
ул. Теряна 74
0009, Ереван
Республика Армении
E-Mail: mikakost@mail.ru