Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 3, 356 – 380

О разрешимости задачи Коши с растущими начальными данными для одного класса анизотропных параболических уравнений

Сергей П. Дегтярев, Анатолий Ф. Тедеев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. В работе изучается задача Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью и анизотропным вырождением, когда начальные данные представляют собой локально конечные меры Радона, растущие, вообще говоря, на бесконечности. Слабое решение задачи получено как предел регулярных решений со сглаженными начальными данными.

2010 MSC. 35K65, 35K55.

Ключевые слова и фразы. Анизотропное параболическое уравнение, нестандартные условия роста, начальные данные меры, растущие начальные данные, слабое решение.

1. Постановка задачи и основной результат

В области $R^N_T = \mathbb{R}^N \times [0,T]$ рассмотрим следующую задачу Коши для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(|u|^{\beta-1}u(x,t)\big) - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + |u|^{\lambda-1}u(x,t) = 0,$$
$$(x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T), \quad (1.1)$$

$$|u(x,0)|^{\beta-1}u(x,0) = |u_0|^{\beta-1}u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^N. \quad (1.2)$$

Здесь β, p_i, $i = \overline{1,N}$, λ — заданные положительные постоянные, $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ — заданная неотрицательная функция, которая может быть локально конечной мерой Радона.

Статья поступила в редакцию 10.05.2011

Уравнение (1.1) представляет собой параболическое уравнение с двойной нелинейностью, нелинейной абсорбцией и анизотропным вырождением. Вырожденность уравнения по каждому из направлений Ox_i выражается в ограничении на параметры задачи β и p_i:

$$0 < \beta < p_i - 1, \quad i = \overline{1, N}, \tag{1.3}$$

причем, не ограничивая общности, мы будем считать, что

$$p_1 \le p_2 \le \dots \le p_N.$$

Кроме того, мы налагаем следующее ограничение на степень абсорбции λ

$$0 < \lambda < p\Big(1 + \frac{\beta}{N}\Big), \tag{1.4}$$

где

$$p = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}\right)^{-1} \quad - \tag{1.5}$$

среднее гармоническое показателей p_i.

Отметим, что в работе [1] было показано, что при нарушении условия (1.4) задача (1.1)–(1.2) с мерой Радона в качестве начальных данных, вообще говоря, неразрешима даже в простейшем изотропном случае $p_i = p$, $i = \overline{1, N}$. В указанном изотропном случае $p_i = p$, $i = \overline{1, N}$, задача вида (1.1)–(1.2) для различного типа начальных данных и для более общих, чем (1.1), уравнений (сохраняющих, однако, модельную структуру уравнения (1.1)), рассматривалась ранее в ряде работ, см. [1–11]. При этом в работах [2,4,6,10] рассмотрены параболические уравнения с абстрактным монотонным оператором, обобщающим оператор эллиптической части уравнения (1.1). Однако начальные данные в этих работах предполагались достаточно регулярными.

В работах [12, 13] исследовались тонкие локальные свойства решений уравнений с двойной нелинейностью даже более общих, чем уравнение (1.1). При этом в указанных работах были найдены, в частности, критерии устранимости особенности решений. Среди работ, посвященных анизотропным уравнениям, отметим также работы [11, 14, 15].

Целью данной работы является доказательство существования слабого решения задачи (1.1)–(1.2) при начальных данных, являющихся локально конечными мерами Радона, растущими, вообще говоря, на бесконечности. Кроме того, и это очень важно для приложений в качественной теории нелинейных уравнений, мы покажем, что слабое решение задачи (1.1)–(1.2) может быть получено, как локальный предел более регулярных решений со сглаженными начальными данными.

Под слабым решением задачи (1.1)–(1.2) на интервале времени $[0,T]$ мы понимаем функцию $u(x,t)$, определенную в $R_T^N = \mathbb{R}^N \times [0,T]$, и обладающую свойствами:

$$u(x,t) \in L_{\beta,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T]) \cap L_{\lambda,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T]),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{p_i-1,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T]); \tag{1.6}$$

для любой функции $\eta(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ финитной по x непрерывно отображение

$$t \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^{\beta-1} u(x,t)\eta(x,t)\,dx \in C([0,T]); \tag{1.7}$$

для любой пробной функции $\zeta(x,t) \in C^{1.1}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, финитной по x, выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^{\beta-1} u(x,t)\zeta(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}(x,\tau)\zeta_{x_i}(x,\tau)\,dx\,d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,\tau)|^{\lambda-1} u(x,\tau)\zeta(x,\tau)\,dx\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_0(x)|^{\beta-1} u_0(x)\zeta(x,0)\,dx$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,\tau)|^{\beta-1} u(x,\tau)\zeta_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau. \tag{1.8}$$

В данной работе мы существенно опираемся на работу [16], поэтому, как и в указанной работе, мы предполагаем, что показатели p_i имеют "не слишком большой" разброс сверху, а именно, мы предполагаем, что

$$p_i \le p\Big(1 + \frac{\beta}{N}\Big), \tag{1.9}$$

Далее, для доказательства разрешимости задачи Коши (1.1)–(1.2) со сглаженными начальными данными мы применяем известный метод Галеркина (см., например, [4,5,17]) вместе с регуляризацией уравнения. Наше доказательство разрешимости регуляризованой задачи

Коши почти дословно следует доказательству теорем существования из [4, 5], где рассматривалось изотропное уравнение, и, по существу, были отдельно рассмотрены случаи $\beta \geq 1$ и $\beta < 1$. Однако, наша регуляризация уравнения несколько отличается от указанных работ. Кроме того, мы покажем, что при любом $\beta > 0$ на самом деле можно ограничиться лишь схемой доказательства работы [4].

В данной статье мы используем вложения анизотропных пространств Соболева вида

$$\|v\|_{L_{p^*}(\Omega)} \leq C \prod_{i=1}^{N} \|v_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega)}^{\frac{1}{N}}, \tag{1.10}$$

где $p^* = Np/(N-p)$, справедливые при $p < N$ для любой функции $v(x)$, для которой конечна правая часть (1.10) и которая равна нулю на границе области Ω, а также неравенство Ниренберга–Гальярдо вида

$$\|v\|_{L_q(\Omega)} \leq C \left(\prod_{i=1}^{N} \|v_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega)}^{\frac{1}{N}} \right)^{\alpha} \|v\|_{L_\varepsilon(\Omega)}^{1-\alpha}$$
$$\leq C \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |v_{x_i}|^{p_i}\, dx \right)^{\frac{\alpha}{p}} \|v\|_{L_\varepsilon(\Omega)}^{1-\alpha}, \tag{1.11}$$

справедливое для $q < p^*$ при $p < N$ и для любого q при $p \geq N$. При этом константы C в неравенствах (1.10), (1.11) не зависят от размера области Ω, а параметр $\alpha \in (0,1)$ определяется из условия

$$\frac{1}{q} = \alpha\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{N}\Big) + (1-\alpha)\frac{1}{\varepsilon}. \tag{1.12}$$

Отметим, что здесь и всюду ниже мы будем обозначать одними и теми же символами C, γ, δ все абсолютные константы, либо константы, зависящие от раз и навсегда зафиксированных данных задачи.

Кроме того, мы используем параболическое вложение вида

$$\|v\|_{L_{q^*}(\Omega_T)} \leq C \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_T} |v_{x_i}|^{p_i}\, dx\, dt \right)^{\frac{1}{p}} + C \sup_{0 \leq t \leq T} \|v(\cdot,t)\|_{L_\varepsilon(\Omega)}, \tag{1.13}$$

где $q^* = p(1+\varepsilon/N)$ и функция $v(x,t)$ такова, что для нее конечна правая часть (1.13) и обращается в ноль на боковой границе области.

Обозначим

$$B_\rho = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq \frac{\rho^{\alpha_i}}{2} \right\}, \quad \rho > 0, \tag{1.14}$$

где здесь и ниже мы используем обозначения

$$\alpha_i = \frac{pd_i}{p_i d}, \quad d = p - 1 - \beta, \quad d_i = p_i - 1 - \beta. \tag{1.15}$$

При этом несложно проверить, что показатели α_i и мера $|B_\rho|$ параллелепипеда B_ρ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = N, \quad |B_\rho| = \rho^N.$$

Мы предполагаем, что начальная функция $u_0(x)$ неотрицательна, и для нее конечна величина

$$|||u_0^\beta|||_r = \sup_{\rho \geq r} \rho^{-\frac{k}{d}} \int\limits_{B_\rho} u_0^\beta(x)\, dx < \infty, \quad r > 0, \tag{1.16}$$

где

$$k = N(p - 1 - \beta) + \beta p = Nd + \beta p. \tag{1.17}$$

Определим положительные числа

$$\varkappa_i = \frac{k - Nd_i}{pd_i} > 0, \quad i = \overline{1, N},$$

причем положительность этих чисел следует из условия (1.3). Введем строго монотонно возрастающую непрерывную функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} t^{\varkappa_N}, & t \leq 1, \\ t^{\varkappa_1}, & t \geq 1, \end{cases}$$

заметив при этом, что $\varkappa_N = \min\{\varkappa_i\}$, $\varkappa_1 = \max\{\varkappa_i\}$ и при равенстве всех $p_i = p$ выполнено $\varkappa_i = \beta/d$.

Определим также величины

$$\begin{gathered} M_\infty = \lim_{r \to \infty} |||u_0^\beta|||_r, \\ T_* = \begin{cases} \omega^{-1}\left(\frac{\gamma}{M_\infty}\right), & M_\infty \neq 0, \\ \infty, & M_\infty = 0, \end{cases} \end{gathered} \tag{1.18}$$

где γ — некоторая положительная постоянная, которая будет определена позднее.

Сформулируем теперь теорему о разрешимости задачи (1.1), (1.2) (ср. теорема 1 в [16]).

Теорема 1.1. *Пусть для задачи (1.1), (1.2) выполнены предположения (1.3)–(1.9), (1.16), $u_0(x) \geq 0$. Тогда существует положительная постоянная $\gamma = \gamma(p_i, N, \beta, \lambda)$ такая, что на интервале времени $[0, T_*]$ (где T_* определено в (1.18)) существует неотрицательное слабое решение $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.2), для которого справедливы оценки*

$$\big|\big|\big|u^{\beta}(\cdot,t)\big|\big|\big|_r \leq C\big|\big|\big|u_0^{\beta}\big|\big|\big|_r, \tag{1.19}$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,B_r} \leq Cr^{\frac{p}{d}}t^{-\frac{N}{k}}\big|\big|\big|u_0^{\beta}\big|\big|\big|_r^{\frac{p}{k}}, \tag{1.20}$$

для всех $0 < \overline{t} < t \leq T_*$

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{B_r}|u_{x_i}(x,\tau)|^{p_i-1}\,dx\,d\tau \leq C(r,t), \tag{1.21}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\overline{t}}^{t}\int\limits_{B_r}|u_{x_i}(x,\tau)|^{p_i}\,dx\,d\tau \leq C(r,t,\overline{t}). \tag{1.22}$$

Кроме того, указанное решение $u(x,t)$ является пределом более регулярных решений задачи (1.1), (1.2) со сглаженными начальными данными в следующем смысле. Существует последовательность неотрицательных функций $u_{0n}(x) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ такая, что для любого шара $K_R = \{x: \ |x| < R\}$

$$\int\limits_{K_R}u_{0n}^{\beta}(x)\zeta(x)\,dx \to \int\limits_{K_R}u_0^{\beta}(x)\zeta(x)\,dx, \tag{1.23}$$

для любой непрерывной в $\overline{K}_R$ функции $\zeta(x)$, а также выполнено неравенство

$$\int\limits_{K_R}u_{0n}^{\beta}(x)\,dx \leq C\int\limits_{K_R}u_0^{\beta}(x)\,dx. \tag{1.24}$$

При этом соответствующие решения $u_n(x,t) \geq 0$ задачи Коши (1.1), (1.2) с начальными функциями $u_{0n}(x)$ дополнительно к свойствам (1.19)–(1.22) обладают свойствами:

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{K_R}|u_{nx_i}(x,\tau)|^{p_i}\,dx\,d\tau \leq C_n(R,t), \quad n \geq N(R), \tag{1.25}$$

для любого $R > 0$*; функции* $u_n(x,t)$ *имеют почти всюду производную по* t*, причем*

$$\int\limits_0^t \int\limits_{K_R} u_n^{\beta-1}(u_{n\tau})^2\,dx\,d\tau \le C_n(R,t), \quad n \ge N(R) \tag{1.26}$$

для любого $R > 0$.

Кроме того, последовательность регуляризованных решений $u_n(x,t)$ *сходится к решению* $u(x,t)$ *в следующем смысле. Пусть* $0 < h < T \le T_*$ *— произвольны,* $K_{R,h,T} = K_R \times [h,T]$, $\overline{p} = \{p_1,\dots,p_N\}$, $L_{\overline{p}}(K_R \times [h,T]) = L_{p_1}(K_R \times [h,T]) \times \dots \times L_{p_N}(K_R \times [h,T])$. *Тогда*

$$u_n(x,t) \to u(x,t) \quad \textit{в} \quad L_{1+\beta}(K_{R,h,T}),$$

$$u_n(x,t) \to u(x,t) \quad \textit{п.в. в} \quad K_{R,h,T}$$

$$\nabla_x u_n(x,t) \to \nabla_x u(x,t) \quad \textit{слабо в} \quad L_{\overline{p}}(K_{R,h,T})$$

$$\{|u_{nx_i}|^{p_i-2}u_{nx_i}\} \to \{|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i}\} \quad \textit{слабо в} \quad (L_{\overline{p}}(K_{R,h,T}))^*.$$

2. Задача Коши–Дирихле в ограниченной области. Задача Коши с гладкими финитными начальными данными

Пусть K_R — шар радиуса R с центром в нуле, определенный выше, $T > 0$, $K_{R,T} = K_R \times [0,T]$. Рассмотрим в $K_{R,T}$ начально-краевую задачу, соответствующую задаче (1.1), (1.2) для неизвестной функции, которую мы также будем обозначать $u(x,t)$, чтобы не загромождать обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(|u|^{\beta-1}u(x,t)\big) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + |u|^{\lambda-1}u(x,t) = 0,$$

$$(x,t) \in K_{R,T}, \tag{2.1}$$

$$|u(x,0)|^{\beta-1}u(x,0) = |u_0|^{\beta-1}u_0(x), \quad x \in K_R, \tag{2.2}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in K_R \times [0,T]. \tag{2.3}$$

Здесь β, p_i, λ — такие же, как и в параграфе 1, а функция $u_0(x) \in C_0^\infty(K_R)$, $u_0(x) \ge 0$.

Слабое решение задачи (2.1)–(2.3) определяется полностью аналогично (1.8). А именно, под слабым решением задачи (2.1)–(2.3) мы понимаем функцию $u(x,t)$ такую, что

$$\sup_{0<t<T}\int\limits_{K_R}|u|^{1+\beta}(x,t)\,dx+\sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_{K_R}|u_{x_i}(x,\tau)|^{p_i}\,dx\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{K_R}|u|^{1+\lambda}\,dx\,d\tau<\infty;$$

отображение

$$t\to\int\limits_{K_R}|u|^{\beta-1}(x,t)u(x,t)\zeta(x)\,dx$$

непрерывно на $[0,T]$ для любой функции $\zeta(x)\in L_{\frac{\beta+1}{\beta}}(K_R)$; для любой функции $\zeta(x,t)$ такой, что

$$\zeta(x,t)\in C\bigl([0,T],L_{\frac{\beta+1}{\beta}}(K_R)\bigr)\cap L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}(K_{R,T}),\quad \zeta_t\in L_{\frac{\beta+1}{\beta}}(K_{R,T}),$$

$$\sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_{K_{R,T}}|\zeta_{x_i}|^{p_i}\,dx\,d\tau<\infty$$

выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{K_R}|u(x,t)|^{\beta-1}u(x,t)\zeta(x,t)\,dx$$
$$+\sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_{K_R}|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i}(x,\tau)\zeta_{x_i}(x,\tau)\,dx\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{K_R}|u(x,\tau)|^{\lambda-1}u(x,\tau)\zeta(x,\tau)\,dx\,d\tau=\int\limits_{K_R}|u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x)\zeta(x,0)\,dx$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{K_R}|u(x,\tau)|^{\beta-1}u(x,\tau)\zeta_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau. \quad (2.4)$$

Теорема 2.1. *При любых $R>1$ и $T>0$ задача (2.1)–(2.3) имеет неотрицательное ограниченное слабое решение $u(x,t)\equiv u_R(x,t)$, имеющее почти всюду производную по t, для которого справедливы оценки*

$$\sup_{0<t<T}\int\limits_{K_R}|u|^{1+\beta}(x,t)\,dx+\sum_{i=1}^N\int\limits_0^T\int\limits_{K_R}|u_{x_i}(x,\tau)|^{p_i}\,dx\,d\tau$$

$$+\int_0^T\int_{K_R}|u|^{1+\lambda}\,dx\,d\tau\leq C(u_0),\quad (2.5)$$

$$\int_0^T\int_{K_R}|u|^{\beta-1}\,u_t^2\,dx\,dt\leq C(u_0),\tag{2.6}$$

для любого $h\in(0,T)$

$$\int_0^{T-h}\int_{K_R}|u(x,t+h)-u(x,t)|^{1+\beta}\,dx\,dt\leq C(u_0)h^{\delta},\tag{2.7}$$

где $\delta>0$ *— некоторая постоянная, а константа* $C(u_0)$ *в неравенствах* (2.5)–(2.7) *не зависит от* $R>1$.

Замечание 2.1. Отметим, что оценка (2.6) означает, что на множествах вида $\{(x,t):\,0<\varepsilon\leq u(x,t)\leq M\}$ производная u_t принадлежит L_2.

Доказательство. Мы не приводим подробного доказательства этой теоремы, так как оно, по существу, повторяет доказательство соответствующей теоремы существования решения из работы [4] с использованием формулы интегрирования по частям в параболических слагаемых, доказанной в [2]. Отметим только те отличия и изменения, которые необходимо сделать в рассуждениях работы [4]. Прежде всего, в [4] рассмотрен случай $\beta\geq 1$ (случаю $\beta<1$, по существу, посвящена другая работа того же автора [5] с несколько измененным видом уравнения). Поэтому регуляризация задачи, сделанная в [4] должна быть несколько изменена: выражение $|u|^{\beta-1}u$ под производной по времени в уравнении (2.1) заменяется регуляризованным выражением $(|u|+\varepsilon)^{\beta-1}u$.

Следуя методу Фаэдо–Галеркина, примененному в [4] (ср. [17]), как и в указанной работе, пусть

$$e_1(x),e_2(x),\ldots,e_n(x),\ldots\in C_0^1(K_R)\quad -$$

счетная полная система линейно независимых функций в пространстве $C_0^1(K_R)$ (которая полна также в пространстве $L_p(K_R)$, $p\geq 1$). Приближенные решения $u_n(x,t)$ задачи (2.1)–(2.3) ищутся в виде

$$u_n(x,t)=\sum_{k=1}^{n}c_{nk}(t)e_k(x),\tag{2.8}$$

где неизвестные функции $c_{nk}(t)$ определяются из системы соотношений ($\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$)

$$\beta\big((|u_n| + \varepsilon_n)^{\beta-1} u_{nt}, e_m\big) + \sum_{i=1}^{N} \big(|u_{nx_i}|^{p_i-2} u_{nx_i}, e_{mx_i}\big) \\ + \big(\,|u_n|^{\lambda-1}\, u_n, e_m\big) = 0, \quad m = \overline{1,n}, \quad (2.9)$$

где

$$(v, w) = \int\limits_{K_R} v(x) w(x)\, dx,$$

а начальные данные $c_{nk}(0)$ определяются из условий

$$(u_n(x,0), e_m) = (u_0(x), e_m)\,, \quad m = \overline{1,n}.$$

Дальнейшая схема рассуждений и оценок в точности такая же, как в [4]. В частности, оценка (2.5) получается точно так же, как и в [4, 17]. Единственное отличие присутствует в доказательстве равномерной по n непрерывности в смысле пространства $L_{\beta+1}(K_{R,T})$ по переменной t. Это отличие состоит в том, что при $\beta < 1$ мы, в отличие от [4], не имеем неравенства

$$(B(u) - B(v))\,(u - v) \ge \nu\, |u - v|^{1+\beta}\,,$$

где

$$B(u) = \beta \int\limits_0^u (|\xi| + \varepsilon_n)^{\beta-1} d\xi,$$

Вместо этого неравенства в общем случае $\beta > 0$ мы имеем только неравенства

$$(B(u) - B(v))\,(u - v) \ge \nu \begin{cases} |u-v|^{1+\beta}\,, & \beta \ge 1, \\ \frac{|u-v|^2}{(|u|+|v|+\varepsilon_n)^{1-\beta}}, & \beta < 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Однако, в то же время в случае $\beta < 1$ мы имеем интегральное неравенство (мы применяем неравенство Гельдера с показателями $p = 2/(1+\beta)$ $p' = 2/(1-\beta)$)

$$\int\limits_0^T \int\limits_{K_R} |u - v|^{1+\beta}\; dx\, dt \\ = \int\limits_0^T \int\limits_{K_R} \left[\frac{|u-v|^{1+\beta}}{(|u| + |v| + \varepsilon_n)^{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{2}}} \right] \left[(|u| + |v| + \varepsilon_n)^{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{2}} \right] dx\, dt$$

$$\leq \left[\int_0^T \int_{K_R} \frac{|u-v|^2}{(|u|+|v|+\varepsilon_n)^{(1-\beta)}}\, dx\, dt \right]^{\frac{1+\beta}{2}}$$

$$\times \left[\int_0^T \int_{K_R} (|u|+|v|+\varepsilon_n)^{1+\beta}\, dx\, dt \right]^{\frac{1-\beta}{2}}$$

$$\leq \left[\int_0^T \int_{K_R} (B(u)-B(v))\,(u-v)\, dx\, dt \right]^{\frac{1+\beta}{2}} \left[C(u_0) + C\varepsilon_n^{1+\beta}\,|K_R| \right]^{\frac{1-\beta}{2}},$$

где мы воспользовались оценкой (2.5) для функции

$$u = u_n(x, t+h), \quad v = u_n(x,t).$$

Точно так же, как в [4], с учетом (2.5), получается оценка

$$\int_0^T \int_{K_R} (B(u_n(x,t+h)) - B(u_n(x,t)))\,(u_n(x,t+h)-u_n(x,t))\, dx\, dt$$
$$\leq C(u_0) h^{\delta}.$$

Поэтому, равномерно по n имеем оценку

$$\int_0^T \int_{K_R} |u_n(x,t+h)-u_n(x,t)|^{1+\beta}\, dx\, dt \leq \left[C(u_0) + C\varepsilon_n^{1+\beta}\,|K_R| \right]^{\frac{1-\beta}{2}} h^{\delta}. \tag{2.11}$$

Эта оценка, как и в [4], дает компактность в пространстве $L_{\beta+1}(K_{R,T})$ последовательности u_n при фиксированных T и R, а также предельную оценку (2.7), так как $\varepsilon_n \to 0$.

Что же касается оценки (2.6), то она получается стандартным образом. Умножим уравнение (2.9) для индекса m на $c'_m(t)$, сложим по m от 1 до n. В результате получим

$$\beta \int_{K_R} (|u_n|+\varepsilon)^{\beta-1}(u_{nt})^2\, dx + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_{K_R} |u_{nx_i}|^{p_i}\, dx + \int_{K_R} |u_n|^{\lambda+1}\, dx = 0.$$

Интегрируя это равенство по t от 0 до T, получаем

$$\beta \int_0^T \int_{K_R} (|u_n|+\varepsilon)^{\beta-1}(u_{nt})^2\, dx\, dt + \sup_{0<t<T} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_{K_R} |u_{nx_i}|^{p_i}\, dx$$

$$+\int_0^T\int_{K_R}|u_n|^{\lambda+1}\,dx\,dt=\sum_{i=1}^N\frac{1}{p_i}\int_{K_R}|u_{0nx_i}|^{p_i}\,dx\le C(u_0). \quad (2.12)$$

Таким образом,

$$\int_0^T\int_{K_R}(|u_n|+\varepsilon)^{\beta-1}(u_{nt})^2\,dx\,dt\le C(u_0). \quad (2.13)$$

Следовательно, функции

$$w_n(x,t)=\int_0^{u_n(x,t)}(|\xi|+\varepsilon)^{\frac{\beta-1}{2}}\,d\xi \quad (2.14)$$

обладают тем свойством, что

$$\int_0^T\int_{K_R}w_n^2\,dx\,dt\le C(u_0), \quad (2.15)$$

$$\int_0^T\int_{K_R}w_{nt}^2\,dx\,dt\le C(u_0), \quad (2.16)$$

причем неравенство (2.16) — это неравенство (2.13), а неравенство (2.15) следует из оценки

$$|w_n|\le C\Big(|u_n|^{\frac{1+\beta}{2}}+\varepsilon_n^{\frac{1+\beta}{2}}\Big),$$

которая получается разбиением интеграла в определении w_n на две части, то есть

$$\int_0^{|u_n(x,t)|}(|\xi|+\varepsilon_n)^{\frac{\beta-1}{2}}\,d\xi=\int_0^{\varepsilon_n}(|\xi|+\varepsilon_n)^{\frac{\beta-1}{2}}\,d\xi+\int_{\varepsilon_n}^{|u_n(x,t)|}(|\xi|+\varepsilon_n)^{\frac{\beta-1}{2}}\,d\xi.$$

Из (2.15) и (2.16) следует, что из последовательности w_n может быть выбрана подпоследовательность такая, что

$$w_n\to w,\quad w_{nt}\to w_t$$

слабо в пространстве с нормой, являющейся суммой левых частей (2.15) и (2.16). Поскольку к тому же $u_n\to u$ сильно в $L_{1+\beta}(K_{R,T})$ и почти всюду (см. [4]), то последовательность w_n почти всюду сходится к функции

$$w(x,t) = \int\limits_0^{u(x,t)} |\xi|^{\frac{\beta-1}{2}}\, d\xi = C|u(x,t)|^{\frac{\beta-1}{2}} u(x,t).$$

Следовательно, функция $w(x,t)$ имеет производную по переменной t почти всюду, принадлежащую пространству $L_2(K_{R,T})$. Так как при этом

$$u = f(w) = \begin{cases} |w|^{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, & w \neq 0, \\ 0, & w = 0, \end{cases}$$

то $u(x,t)$ также имеет производную по t почти всюду, и, следовательно,

$$w_t(x,t) = C|u(x,t)|^{\frac{\beta-1}{2}} u_t(x,t) \in L_2(K_{R,T}),$$

что доказывает (2.6) в пределе при $n \to \infty$. Отметим, что переход к пределу при $n \to \infty$ для получения решения рассматриваемой задачи осуществляется точно так же, как в $[1,4]$.

Покажем неотрицательность полученного слабого решения. Для $0 < \varepsilon < M$ рассмотрим функцию

$$\varphi(x,t) \equiv \omega_{\varepsilon,M}(u(x,t)) = \begin{cases} 0, & -\varepsilon \le u(x,t), \\ u(x,t)+\varepsilon, & -M-\varepsilon \le u(x,t) \le -\varepsilon, \\ -M, & u(x,t) \le -M-\varepsilon. \end{cases}$$

Функция $\varphi(x,t) = \omega_{\varepsilon,M}(x,t)$ обладает свойствами

$$|\varphi(x,t)| \le M,$$

по построению, и

$$\varphi_t(x,t) \in L_2(K_{R,T}), \quad \varphi_{x_i}(x,t) \in L_{p_i}(K_{R,T})$$

в силу (2.6) и по построению. Кроме того, $\varphi_t \equiv 0$ при $u \ge -\varepsilon$ и при $u \le -M-\varepsilon$. Из указанных свойств следует, что функция $\varphi(x,t)$ может быть использована в интегральном тождестве (2.4) в качестве пробной функции (указанное тождество может быть расширено на такие пробные функции по непрерывности). Отметим также, что $\varphi(x,0) \equiv 0$ и $\varphi|_{\partial K_R} \equiv 0$, так как $u_0(x) \ge 0$. Подставляя $\varphi(x,t)$ в (2.4), получим

$$\int\limits_{K_R} |u(x,t)|^{\beta-1}u(x,t)\varphi(x,t)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x)\varphi(x,0)\,dx$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_{K_R} |u(x,\tau)|^{\beta-1}u(x,\tau)\varphi_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau + \sum_{i=1}^N \iint\limits_{Q_{\varepsilon M}} |u_{x_i}(x,\tau)|^{p_i}\,dx\,d\tau$$
$$+\iint\limits_{Q_{\varepsilon M}} |u(x,\tau)|^{\lambda+1}\,dx\,d\tau + M\iint\limits_{\{u\le -M-\varepsilon\}} |u(x,\tau)|^{\lambda}\,dx\,d\tau$$
$$\equiv I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0, \quad (2.17)$$

где $Q_{\varepsilon,M} = \{(x,\tau) : -M-\varepsilon \le u(x,t) \le -\varepsilon\}$, а второй интеграл слева в (2.17) равен нулю, так как $\varphi(x,0)\equiv 0$.

Рассмотрим интеграл I_3, который равен

$$I_3 = \int\limits_0^T\int\limits_{K_R} |u(x,\tau)|^{\beta-1}u(x,\tau)\varphi_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau$$
$$= \int\limits_0^T\int\limits_{K_R} |u|^{\beta-1}u\omega'_{\varepsilon,M}(u)u_\tau\,dx\,d\tau = \int\limits_0^T\int\limits_{K_R} \Phi(u(x,\tau))\,dx\,d\tau, \quad (2.18)$$

где

$$\Phi(u) = \int\limits_0^u |\xi|^{\beta-1}\xi\omega'_{\varepsilon,M}(\xi)\,d\xi. \quad (2.19)$$

Интегрируя в (2.18) по t и подставляя в (2.17), получим, учитывая, что $\Phi(u_0(x))\equiv 0$ в силу свойств функции $\omega_{\varepsilon,M}$ и того, что $u_0(x)\ge 0$,

$$\int\limits_{K_R} |u|^{\beta-1}u(x,T)\omega_{\varepsilon,M}(u(x,T))\,dx - \int\limits_{K_R}\Phi(u(x,T))\,dx$$
$$+ I_4 + I_5 + I_6 = 0. \quad (2.20)$$

Рассмотрим функцию $\Phi(u)$, совершая в (2.19) интегрирование по частям

$$\Phi(u) = |\xi|^{\beta-1}\xi\omega_{\varepsilon,M}(\xi)\big|_0^u - \beta\int\limits_0^u |\xi|^{\beta-1}\omega_{\varepsilon,M}(\xi)\,d\xi$$
$$= |u|^{\beta-1}u\omega_{\varepsilon,M}(u) - f(u),$$

где

$$f(u) = \beta \int\limits_0^u |\xi|^{\beta-1} \omega_{\varepsilon,M}(\xi)\, d\xi.$$

Подставляя полученное выражение для $\Phi(u)$ в (2.20), получаем

$$\int\limits_{K_R} f(u(x,T))\, dx + I_4 + I_5 + I_6 = 0. \qquad (2.21)$$

Непосредственным вычислением соответствующего интеграла нетрудно убедиться, что

$$f(u) = \begin{cases} 0, & u \geq -\varepsilon, \\ \beta \frac{|u|^{\beta+1}}{\beta+1} + \frac{\varepsilon^{\beta+1}}{\beta+1} - \varepsilon |u|^\beta, & -M - \varepsilon \leq u \leq -\varepsilon, \\ M \left[|u|^{\beta+1} - (M+\varepsilon)^{\beta+1} \right] + C_0, & u \leq -M - \varepsilon, \end{cases}$$

где

$$C_0 = \beta \int\limits_\varepsilon^{M+\varepsilon} |\eta|^{\beta-1} (\eta - \varepsilon)\, d\eta.$$

В силу неравенства Юнга с $p = \frac{\beta+1}{\beta}$ и $q = \beta + 1$,

$$\varepsilon |u|^\beta \leq \frac{1}{p} |u|^{\beta p} + \frac{1}{q} \varepsilon^q = \frac{\beta}{\beta+1} |u|^{\beta+1} + \frac{\varepsilon^{\beta+1}}{\beta+1},$$

причем равенство достигается только, если $|u| = \varepsilon$. Таким образом,

$$f(u) \geq 0; \quad f(u) > 0,\ u < -\varepsilon. \qquad (2.22)$$

Так как все слагаемые в (2.21) неотрицательны, то все они равны нулю, откуда, с учетом (2.22), следует, что $u(x,t) \geq -\varepsilon$ почти всюду в $K_{R,T}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем, что $u(x,t) \geq 0$ почти всюду в $K_{R,T}$.

Совершенно аналогично доказывается, что

$$u(x,t) \leq \max_{\overline{K}_R} u_0(x)$$

почти всюду в $K_{R,T}$. Этим мы завершим доказательство теоремы 2.1. $\square$

Пусть теперь задана функция $u_0(x) \geq 0$ такая, что $u_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Рассмотрим последовательность задач (2.1)–(2.3) с расширяющимися радиусами $R = R_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и с начальными функциями $u_0(x) = u_0(x)|_{K_{R_n}}$.

Так как константы $C(u_0)$ в (2.5)–(2.7) не зависят от R_n, то пользуясь этими оценками, полностью аналогично $[1, 2, 4]$ можно показать, что из полученной последовательности решений $u_n(x,t)$ задач Коши–Дирихле (2.1)–(2.3) можно выделить подпоследовательность, которая на каждом компактном подмножестве множества $\mathbb{R}^N \times [0,T]$ сходится в некоторых пространствах Соболева (см. $[1, 2, 4]$) к функции $u(x,t)$, дающей неотрицательное ограниченное слабое решение задачи (1.1), (1.2). При этом сходимость решений носит такой характер, что для полученного решения $u(x,t)$ справедливы те же оценки (2.5)–(2.7). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если в задаче* (1.1), (1.2) *неотрицательная начальная функция $u_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, то эта задача имеет неотрицательное ограниченное слабое решение, для которого справедливы оценки* (2.5)–(2.7) *для любого $R > 0$.*

3. Схема доказательства теоремы 1.1

Решение задачи (1.1), (1.2) получается как предел задач Коши со сглаженными начальными данными $u_{0n}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ такими, что $u_{0n}^\beta(x) \to u_0^\beta(x)$ в пространстве мер, то есть

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_{0n}^\beta(x)\eta(x)\,dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0^\beta(x)\eta(x)\,dx, \quad n \to \infty, \tag{3.1}$$

для любой непрерывной функции $\eta(x)$ с компактным носителем.

Пусть $\zeta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\zeta(x) \equiv 1$ при $|x| \le 1$, $s > \max\{2, 1/\beta\} + 2$. Для заданной функции $u_0^\beta(x) \ge 0$, которая может быть локально конечной мерой Радона, положим

$$u_{0n}(x) = \zeta^s(h_n x)\big[(\zeta^s(h_n x)u_0^\beta(x))_{h_n} + h_n\big]^{\frac{1}{\beta}}, \tag{3.2}$$

где $h_n > 0$, $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, $(f(x))_{h_n}$ — усреднение функции $f(x)$ с каким-либо гладким неотрицательным ядром с параметром h_n. Непосредственная проверка показывает, что $u_{0n}(x) \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ и выполнено соотношение (3.1). Ключевым моментом доказательства существования решения является получение независящих от номера n локальных интегральных оценок решений задачи (1.1), (1.2) с заданными начальными функциями $u_{0n}^\beta(x)$. Получение этих оценок подробно изложено в работе [16], поэтому здесь мы только продемонстрируем получение из интегрального тождества (1.8) необходимых интегральных соотношений для решения (со сглаженными начальными данными) и опишем соответствующий предельный переход при $n \to \infty$.

Чтобы не загромождать обозначения мы будем обозначать начальные данные $u_{0n}(x)$ и соответствующее решение $u_n(x,t)$, даваемое теоремой 2.2, опуская индекс n просто через $u_0(x)$ и $u(x,t)$. Итак, пусть в задаче (1.1), (1.2) неотрицательная начальная функция $u_0(x) \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$. Тогда согласно теореме 2.2 существует неотрицательное ограниченное слабое решение $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.2), для которого справедливы оценки (2.5)–(2.7).

В силу теоремы 2.2, для $k > 0$ функция

$$(u-k)_+ = \begin{cases} u-k, & u-k \geq 0, \\ 0, & u-k \leq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

обладает свойствами (в силу замечания 2.1)

$$|(u-k)_+| \leq C, \quad [(u-k)_+]_t \in L_{2,loc}(R_T^N), \quad [(u-k)_+]_{x_i} \in L_{p_i,loc}(R_T^N). \tag{3.4}$$

В силу того, что $0 \leq u(x,t) \leq C$, свойства (3.4) позволяют использовать функции вида $(u-k)_+\zeta^s(x,t)$ с достаточно большим s в качестве пробных функций в интегральном тождестве (1.8), где $\zeta(x,\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ имеет компактный по x носитель и равна нулю при $\tau \leq t/4$. Это позволяет получить оценки, содержащиеся в леммах 1, 2 и 3 работы [16].

Для получения некоторых интегральных оценок параграфа 2.2 статьи [16] мы "умножаем" уравнение (1.1) на функции вида $t^a u^b(x,t)\zeta^s(x)$, $a, b > 0$, $\zeta(x) \in C_0^\infty$. Этот процесс состоит, по существу, в использовании в интегральном тождестве (1.8) пробных функций вида $t^a[(u-k)_+ + k]^b \zeta^s(x)$, $k > 0$ с последующим предельным переходом при $k \to 0$. Указанное интегральное тождество распространяется на такие пробные функции по непрерывности, так как само решение ограничено, $0 \leq u(x,t) \leq C$, а кроме того

$$\{t^a[(u-k)_+ + k]^b \zeta^s(x)\}_t \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T]),$$

$$\{t^a[(u-k)_+ + k]^b \zeta^s(x)\}_{x_i} \in L_{p_i,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

При этом переход к пределу осуществляется на основании теоремы Лебега и теоремы о монотонной сходимости под знаком интеграла, а также используется тот факт, что при $k \to 0$ почти всюду

$$[(u-k)_+ + k]^b \to u^b, \quad [(u-k)_+ + k]^b \leq C,$$

$$
[(u-k)_+ + k]^b_{x_i} = \begin{cases} b\,[(u-k)_+ + k]^{b-1}\, u_{x_i}, & u > k, \\ 0, & u \le k \end{cases}
\to \begin{cases} b u^{b-1} u_{x_i}, & u > 0, \\ 0, & u = 0 \end{cases} = b u^{b-1} u_{x_i}.
$$

Итак, интегральное тождество (1.8) для решений с рассматриваемыми свойствами может быть по непрерывности распространено на функции $\widetilde{\zeta}(x,t)$ вида

$$
\widetilde{\zeta}(x,t) = t^a\,[u-k)_+ + k]^b\,\zeta^s(x,t),
$$

так как такие функции обладают свойствами

$$
\widetilde{\zeta}_t(x,t) \in L_1(R^N_T), \quad \widetilde{\zeta}_{x_i}(x,t) \in L_{p_i}(R^N_T).
$$

Следовательно, подставляя $\widetilde{\zeta}(x,t)$ в интегральное тождество (1.8), получим, обозначая $u_k = [(u-k)_+ + k]$,

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^\beta(x,t) t^a u_k(x,t) \zeta^s(x,t)\,dx \\
&\qquad + \sum_{i=1}^N b \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^a |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} (u-k)_{+x_i} u_k^{b-1} \zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau \\
&\qquad\qquad + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^a u^\lambda u_k^b \zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^a u^\beta \left[u_k^b\right]_\tau \zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau + a \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^{a-1} u^\beta u_k^b \zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau \\
&\qquad + s \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^a u^\beta u_k^b \zeta^{s-1}(x,\tau) \zeta_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau \\
&\qquad - s \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^a |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} u_k^b \zeta^{s-1}(x,\tau) \zeta_{x_i}(x,\tau)\,dx\,d\tau. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части последнего соотношения. Поскольку

$$
\left[u_k^b\right]_t = \begin{cases} b u_k^{b-1} u_t, & u > k, \\ 0, & u \le k, \end{cases}
$$

а при $u \geq k$ выполнено $u = u_k$, то выполнено равенство

$$u^{\beta}(x,t)\big[u_k^b\big]_t = bu_k^{\beta+b-1}(u_k)_t = \frac{b}{\beta+b}(u_k^{\beta+b})_t.$$

Таким образом, производя в указанном слагаемом интегрирование по частям по τ, получим

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^a u^{\beta}\big[u_k^b\big]_{\tau}\zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau$$

$$= \frac{b}{\beta+b}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^a \big[u_k^{\beta+b}\big]_{\tau}\zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau = \frac{b}{\beta+b}\int_{\mathbb{R}^N} t^a u_k^{\beta+b}\zeta^s(x,t)\,dx$$

$$-\frac{ab}{\beta+b}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^{a-1}u_k^{\beta+b}\zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau - \frac{sb}{\beta+b}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^a u_k^{\beta+b}\zeta^{s-1}\zeta_{\tau}\,dx\,d\tau.$$

Следовательно, соотношению (3.5) можно придать вид

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} t^a\Big[u^{\beta}u_k^{\beta} - \frac{b}{\beta+b}u_k^{\beta+b}\Big]\zeta^s(x,t)\,dx \\
&\qquad + \sum_{i=1}^N b\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N\cap\{u\geq k\}} \tau^a |u_{x_i}|^{p_i}u_k^{b-1}\zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau \\
&\qquad\qquad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^a u^{\lambda}u_k^b\zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau \\
&= a\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^{a-1}\Big[u^{\beta}u_k^{\beta} - \frac{b}{\beta+b}u_k^{\beta+b}\Big]\zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau \\
&+ s\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^a\Big[u^{\beta}u_k^{\beta} - \frac{b}{\beta+b}u_k^{\beta+b}\Big]\zeta^{s-1}(x,\tau)\zeta_{\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau \\
&- s\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^a |u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i}u_k^b\zeta^{s-1}(x,\tau)\zeta_{x_i}(x,\tau)\,dx\,d\tau. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

В силу ограниченности функции $u(x,t)$ и, следовательно, равномерной по k ограниченности функций $u_k(x,t)$, предельный переход во всех слагаемых кроме второго слагаемого слева последнего интегрального соотношения производится очевидным образом на основании теоремы Лебега. Что же касается второго слагаемого слева в интегральном соотношении (3.6), то этот интеграл равен

$$I_k = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau^a |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \big\{ [u-k)_+ + k]^b \big\}_{x_i} \zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau$$

$$= b \int\limits_0^t \int\limits_{K_R \cap \{u \ge k\}} \tau^a |u_{x_i}|^{p_i} [u-k)_+ + k]^{b-1} \zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau.$$

При $b \ge 1$ ввиду свойств подынтегральных функций для предельного перехода достаточно воспользоваться теоремой Лебега. Если же $b < 1$, то предельный переход осуществляется после оценки всех остальных слагаемых интегрального соотношения, что дает равномерную по k ограниченность интегралов I_k. Кроме того, при $k \to +0$ неотрицательные функции

$$f_k(x,t) = \begin{cases} b\tau^a |u_{x_i}|^{p_i} [u-k)_+ + k]^{b-1} \zeta^s(x,\tau), & u \ge k, \\ 0, & u < k \end{cases}$$

монотонно возрастают и сходятся почти всюду к функции

$$f_k(x,t) \to f(x,t) = \begin{cases} b\tau^a |u_{x_i}|^{p_i} u^{b-1} \zeta^s(x,\tau), & u > 0, \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $k \to +0$

$$I_k \to I = b \int\limits_0^t \int\limits_{K_R} \tau^a |u_{x_i}|^{p_i} u^{b-1} \zeta^s(x,\tau)\,dx\,d\tau.$$

Аналогичные предельные переходы в других слагаемых позволяют получить нужные интегральные соотношения, используемые для оценок в статье [16], что дает сформулированные ниже свойства решений.

Таким образом, построена последовательность функций $u_n(x,t)$, удовлетворяющих в слабом смысле задаче (1.1), (1.2) с начальными функциями $u_{0n}(x)$ из (3.2) и обладающих следующими свойствами (см. оценки статьи [16]):

$$\sup_{t_1 \le \tau \le t_2} \int\limits_{K_R} u_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx \le C(t_1,t_2,R,\mu), \tag{3.7}$$

$$\sup_{0\le\tau\le t_2}\int\limits_{K_R} u_n^{\beta}(x,\tau)\,dx \le C(t_2,R,\mu), \tag{3.8}$$

$$\sup_{t_1\le\tau\le t_2}\ \sup_{x\in K_R} u_n(x,\tau) \le C(t_1,t_2,R,\mu), \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{K_R} |u_{x_i}|^{p_i}(x,\tau)\,dx\,d\tau \le C(t_1,t_2,R,\mu), \tag{3.10}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{K_R} |u_{x_i}|^{p_i-1}(x,\tau)\,dx\,d\tau \le t^{\delta}C(R,\mu), \tag{3.11}$$

где $0 < t_1 < t_2$, $R > 0$ — произвольны, $\delta > 0$ — некоторая постоянная, зависит только от β, p_i, λ, $\mu = \mu_r = |||u_0^{\beta}|||_r$, а константы $C(t_1,t_2,R,\mu)$, $C(t_2,R,\mu)$, $C(R,\mu)$ в соотношениях (3.7)–(3.11) не зависят от номера n.

Кроме того, каждая из функций $u_n(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (1.8) с любой достаточно регулярной функцией $\zeta(x,t)$ с компактным по переменным x носителем, содержащимся в множестве $K_{R,T}$.

Пусть сначала $\zeta(x,t) \equiv 0$ при $0 \le t \le h$. Тогда тождество (1.8) имеет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n^{\beta}(x,t)\zeta(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_{nx_i}|^{p_i-2}u_{x_i}(x,\tau)\zeta_{x_i}(x,\tau)\,dx\,d\tau$$
$$+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n^{\lambda}(x,\tau)\zeta(x,\tau)\,dx\,d\tau = \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n^{\beta}(x,\tau)\zeta_{\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau. \tag{3.12}$$

Из тождества (3.12), формулы интегрирования по частям из [2] и из оценок (3.7)–(3.11) следует, что на любом цилиндре $K_{R,T}$ в смысле распределений выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u_n^{\beta}\big) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-1}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big) - u_n^{\lambda}(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T),$$

то есть, в силу (3.7)–(3.11), для любого шара K_R

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u_n^{\beta}\big) \in L_{p_1}\big([0,T],\big(\dot W^1_{p_N}(K_R)^*\big)\big), \tag{3.13}$$

где $p_1 = \min p_i$, $p_N = \max p_i$, $T > 0$, причем нормы $\partial u_n^\beta / \partial t$ в этом пространстве равномерно ограничены по n. Кроме того, если $\beta \geq 1$, то, в силу (3.9) и (3.10),

$$\left|\left(u_n^\beta\right)_{x_i}\right| = |\beta u_n^{\beta-1} u_{nx_i}| \leq C(h, T, R, u_0)|u_{nx_i}|,$$

так что

$$u_n^\beta(x,t) \in L_{p_1}([0,T], W_{p_1}^1(K_R)), \tag{3.14}$$

причем нормы u_n^β в этом пространстве равномерно ограничены по n.

Из теоремы 5.1 в [17] следует, что последовательность u_n предкомпактна в пространстве $L_{p_1}([h,T], L_{p_1}(K_R)) = L_{p_1}(K_R \times [h,T])$.

Если же $\beta < 1$, то, аналогично [2], последовательность $u_n^\beta(x,t)$ ограничена в пространстве $L_{p_1}([h,T], H_{p_1}^\beta(K_R))$, где $H_{p_1}^\beta(K_R)$ — соответствующее пространство Никольского, которое, как и $W_{p_1}^1(K_R)$, компактно вложено в $L_{p_1}(K_R)$. Следовательно, и в этом случае на основании теоремы 5.1 из [17] последовательность $u_n^\beta(x,t)$ предкомпактна в пространстве $L_{p_1}(K_R \times [h,T])$.

С учетом (3.7)–(3.11) заключаем, что из последовательности $u_n(x,t)$ можно выбрать подпоследовательность $u_r(x,t)$ такую, что

$$u_r(x,t) \to u(x,t) \quad \text{в} \quad L_{1+\beta}(K_R \times [h,T]), \tag{3.15}$$

$$u_r(x,t) \to u(x,t) \quad \text{п.в. в} \quad K_R \times [h,T], \tag{3.16}$$

$$\nabla_x u_r(x,t) \to \overrightarrow{\xi}(x,t) \quad \text{слабо в} \quad L_{\overline{p}}(K_R \times [h,T]), \tag{3.17}$$

$$\left\{|u_{rx_i}|^{p_i-1} u_{rx_i}\right\} \to \overrightarrow{\eta}(x,t) \quad \text{слабо в} \quad \left(L_{\overline{p}}(K_R \times [h,T])\right)^*, \tag{3.18}$$

где $L_{\overline{p}}(K_R \times [h,T]) = L_{p_1}(K_R \times [h,T]) \times \cdots \times L_{p_N}(K_R \times [h,T])$. Кроме того, в силу (3.9) и (3.16) подпоследовательность $u_r \to u$ в пространстве $L_q(K_R \times [h,T])$ для любого $q > 0$. При этом для предельной функции $u(x,t)$ сохраняются все оценки (3.7)–(3.11).

Из полученных соотношений (3.15)–(3.18) следует, что мы можем перейти к пределу при $r \to \infty$ во всех слагаемых тождества (3.12), что дает при почти всех $t > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^\beta(x,t)\zeta(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \eta_i(x,t)\zeta_{x_i}(x,\tau)\,dx\,d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^\lambda(x,\tau)\zeta(x,\tau)\,dx\,d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^\beta(x,\tau)\zeta_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau. \tag{3.19}$$

Так как все слагаемые в этом равенстве, кроме, возможно, первого, непрерывны по t, то и первое слагаемое непрерывно по t при $t > 0$. Следовательно, по непрерывности, равенство (3.19) выполнено не только для почти всех $t > 0$, но для всех $t > 0$.

Используя технику предельного перехода под знаком монотонного оператора и (3.7)–(3.11), полностью аналогично, например, [1, 4], получаем, что в (3.19) выполнено $\eta_i = |u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i}$, то есть $u(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^\beta(x,t)\zeta(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_{x_i}|^{p_i-1}u_{x_i}\zeta_{x_i}(x,\tau)\,dx\,d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^\lambda(x,\tau)\zeta(x,\tau)\,dx\,d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^\beta(x,\tau)\zeta_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau. \quad (3.20)$$

Далее, из (3.8), (3.11) и параболического вложения (1.13) с заменой p на $p-1$ следует, что

$$u_n \in L_q(K_{R,T}), \quad q = (p-1)\Big(1 + \frac{\beta}{N}\Big),$$

причем равномерно по n

$$\|u_n\|_{L_q(K_{R,T})} \le C(R,T,\mu). \quad (3.21)$$

Так как $\lambda, \beta < q$ по предположению, то, в силу, также, (3.11), интегральное тождество (3.20) справедливо для всех функций $\zeta(x,t)$ соответствующей регулярности с компактным носителем в некотором множестве $K_{R,T}$ и таких, что $\zeta(x,0) \equiv 0$.

Кроме того, если $\zeta(x,0) \ne 0$, то из интегрального тождества (1.8) для $u_n(x,t)$ и оценок (3.11), (3.21) с учетом того, что $\lambda < q$ получаем равномерно по n

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n^\beta(x,t)\zeta(x,t)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0^\beta(x)\zeta(x,0)\,dx \right| \le C(R,T,\mu)t^\delta, \quad (3.22)$$

с некоторым $\delta > 0$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^\beta(x,t)\zeta(x,t)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0^\beta(x)\zeta(x,0)\,dx \right| \le C(R,T,\mu)t^\delta, \quad (3.23)$$

то есть функция

$$t \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^\beta(x,t)\zeta(x,t)\,dx$$

непрерывна не только при $t > 0$, но и при $t = 0$.

Выберем теперь в тождестве (3.20) в качестве пробной функции функцию $\zeta(x,t) = \widetilde{\zeta}(x,t)\zeta_h(t)$, $h > 0$, где $\widetilde{\zeta}(x,t)$ — произвольная пробная функция соответствующей регулярности с компактным по переменной x носителем, а функция $\zeta_h(t)$ равна

$$\zeta_h(t) = \begin{cases} \frac{t}{h}, & 0 \le t \le h, \\ 1, & h \le t \le T. \end{cases}$$

Переходя к пределу при $h \to +0$, полностью аналогично тому, как это сделано, например, в [20], приходим к тождеству (1.8) с функцией $\widetilde{\zeta}(x,t)$ вместо $\zeta(x,t)$. Этим мы завершаем доказательство теоремы 1.1.

Литература

[1] Fan Hui Jun, *Cachy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure* // Acta Mathematica Sinica, English Series, **20** (2004), No. 4, 663–682.

[2] F. Bernis, *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domain* // Math. Am., **279** (1988), No. 3, 373–394.

[3] H. W. Alt, S. Luckhous, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z., **183** (1983), No. 3, 311–341.

[4] Г. И. Лаптев, *Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью* // Матем. сб., **188** (1997), No. 9, 83–112.

[5] Г. И. Лаптев, *Разрешимость квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойным вырождением* // Сиб. мат. журнал, **38** (1997), No. 6, 1335–1355.

[6] Г. И. Лаптев, *Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени* // Матем. сб., **191** (2000), No. 9, 43–64.

[7] M. Tsutsumi, *On solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations with absorption* // J. Math. Anal. Appl., **132** (1988), No. 1, 187–212.

[8] K. Ishige, *On the existence of solutions of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation* // SIAM J. Math. Anal., **27** (1996), No. 5, 1235–1260.

[9] С. Н. Глазатов, *О некоторых задачах для дважды нелинейных параболических уравнений и уравнений переменного типа* // Математические труды, **3** (2000), No. 2, 71–110.

[10] А. В. Кузнецов, *Разрешимость дважды нелинейных эволюционных уравнений с монотонными операторами* // Диф. уравнения, **39** (2003), No. 9, 1176–1187.

[11] S. N. Antontsev, J. I. Diaz, S. I. Shmarev, *Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **48**, Birkhäuser, Basel–Boston, MA, 2002.

[12] Yu. V. Namlyeyeva, A. E. Shishkov, I. I. Skrypnik, *Isolated singularities of solutions of quasilinear anisotropic elliptic equations* // Adv. Nonlinear Stud., **6** (2006), No. 4, 617-–641.

[13] Yu. V. Namlyeyeva, A. E. Shishkov, I. I. Skrypnik, *Removable isolated singularities for solutions of doubly nonlinear anisotropic parabolic equations* // Appl. Anal., **89** (2010), No. 10, 1559—1574.

[14] M. Bendahmane, K. H. Karlsen, *Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with advection and lower order terms and locally integrable data* // Potential Anal., **22** (2005), No. 3, 207–227.

[15] M. Sango, *On a doubly degenerate quasilinear anisotropic parabolic equation* // Analysis (Munich), **23** (2003), No. 3, 249–260.

[16] С. П. Дегтярев, А. Ф. Тедеев, L_1-L_∞ *оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными* // Матем. сб., **198** (2007), No. 5, 46–66.

[17] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М.: Мир, 1972, 588 с.

[18] А. Г. Королев, *Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева-Орлича* // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1. Матем. мех., (1983), No. 1, 32–37.

[19] M. Troisi, *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi* // Ricerche Mat., **18** (1969), 3–24.

[20] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967, 736 с.

Сведения об авторах

Сергей Петрович Дегтярев, Анатолий Федорович Тедеев

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
ул. Р. Люксембург 74,
83114 Донецк
Украина
E-Mail: tedeev@iamm.ac.donetsk.ua