Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 3, 319 – 342

Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях

Елена С. Афанасьева, Владимир И. Рязанов, Руслан Р. Салимов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Изучаются проблемы непрерывного и гомеоморфного продолжения на границу нижних Q-гомеоморфизмов между областями на римановых многообразиях, формулируются соответствующие следствия для гомеоморфизмов с конечным искажением классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{loc}$ при условии типа Кальдерона на функцию φ и, в частности, классов Соболева $W^{1,p}_{loc}$ при $p > n-1$.

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Римановы многообразия, слабо плоские границы, нижние Q-гомеоморфизмы, классы Орлича–Соболева, классы Соболева.

1. Введение

Напомним некоторые определения, относящиеся к теории многообразий, которые можно найти, напр., в [18,26,32,34]. *n-мерное топологическое многообразие* $\mathbb{M}^n$ — это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. *Картой на многообразии* $\mathbb{M}^n$ называется пара (U,φ), где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а φ — гомеоморфное отображение подмножества U на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$, с помощью которого каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат*. *Гладкое многообразие* — многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны гладким (C^∞) образом.

Статья поступила в редакцию 1.08.2010

Римановым многообразием $(\mathbb{M}^n, g)$ называется гладкое многообразие вместе с заданной на нем римановой метрикой, т.е. положительно определенным симметричным тензорным полем $g = g_{ij}(x)$, которое задается в координатных картах с правилом перехода:

$$'g_{ij}(x) = g_{kl}(y(x))\,\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial y^l}{\partial x^j}. \tag{1.1}$$

Тензорное поле $g_{ij}(x)$ в дальнейшем также подразумевается гладким.

Элемент длины на $(\mathbb{M}^n, g)$ задается инвариантной дифференциальной формой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j := \sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx^i dx^j$, где g_{ij} — метрический тензор, x^i — локальные координаты. *Геодезическое расстояние* $d(p_1, p_2)$ определяется как инфимум длин кусочно гладких кривых, соединяющих точки p_1 и p_2 в $(\mathbb{M}^n, g)$, см. [26, с. 94]. Напомним также, что *элемент объема* на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантной формой $dv = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \cdots dx^n$, см., напр., [34, §88]. Заметим, что $\det g_{ij} > 0$ в силу положительной определенности g_{ij}, см., напр., [7, с. 277].

Для нас важны следующие фундаментальные факты, см., напр., лемму 5.10 и следствие 6.11 в [26], а также [18, с. 260–261].

Предложение 1.1. *В каждой точке гладкого риманова многообразия существуют ее окрестности и соответствующие локальные координаты в них, в которых геодезическим сферам с центром в данной точке соответствуют евклидовы сферы с теми же радиусами и с центром в начале координат, а связке геодезических, исходящих из данной точки, соответствует связка отрезков лучей, исходящих из начала координат.*

Окрестности и координаты, указанные в предложении 1.1, принято называть *нормальными.*

Замечание 1.1. В частности, в нормальных координатах геодезические сферы имеют естественную гладкую параметризацию через направляющие косинусы соответствующих лучей, исходящих из начала координат. Кроме того, метрический тензор g в начале этих координат совпадает с единичной матрицей, см., напр., предложение 5.11 в [26], а ввиду его непрерывности g произвольно близок к единичной матрице в достаточно малых окрестностях нуля.

Пусть далее ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k}$ или более общо — k-мерное многообразие, где $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда *k-мерной поверхностью* S на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{M}^n$. Поверхности в $\mathbb{M}^n$ размерности $k = n-1$ принято называть *гиперповерхностями. Функцией кратности* $N(S, y)$ поверхности S называется число прообразов $y \in \mathbb{M}^n$.

Другими словами, символ $N(S,y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Хорошо известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, т.е., для каждой последовательности $y_m\in\mathbb{M}^n$, $m=1,2,\ldots$, такой, что $y_m\to y\in\mathbb{M}^n$ при $m\to\infty$, выполняется условие $N(S,y)\geq\liminf_{m\to\infty} N(S,y_m)$, см., напр., [33, с. 160]. Отсюда следует, что функция $N(S,y)$ является измеримой по Борелю и, следовательно, измеримой относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k, см., напр., теорему II (7.6) в [39].

В настоящей статье H^k, $k=1,\ldots,n-1,n$ обозначает *k-мерную меру Хаусдорфа* на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n,g)$ относительно геодезического расстояния d. Точнее, если A — множество в $\mathbb{M}^n$, то $H^k(A):=\sup_{\varepsilon>0}\ H^k_{\varepsilon}(A), H^k_{\varepsilon}(A):=\inf\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{diam}A_i\right)^k$, где инфимум берётся по всем покрытиям A множествами A_i с $\operatorname{diam}A_i<\varepsilon$, см., напр., [15]. Отметим, что H^k является *внешней мерой в смысле Каратеодори*, см. [39]. Величина $\dim_H A=\sup_{H^k(A)>0}k$ называется *хаусдорфовой размерностью* множества A.

В работе [11] было показано, что для любых p и $q\in(0,n)$ множество A такое, что $\dim_H A=p$, может быть отображено при помощи квазиконформного отображения f пространства $\mathbb{R}^n$ на множество B с $\dim_H B=q$.

k-мерной хаусдорфовой площадью борелевского множества B в $\mathbb{M}^n$ (либо просто *площадью* B при $k=n-1$), ассоциированной с поверхностью $S:\omega\to\mathbb{M}^n$, называем величину

$$\mathcal{A}_S(B)=\mathcal{A}^k_S(B):=\int\limits_B N(S,y)\ dH^ky, \tag{1.2}$$

ср., напр., разд. 3.2.1 в [5]. Поверхность S называется *спрямляемой (квадрируемой)*, если $\mathcal{A}_S(\mathbb{M}^n)<\infty$, см., напр., разд. 9.2 в [28].

Соответственно, для борелевской функции $\rho:\mathbb{M}^n\to[0,\infty]$, её *интеграл над поверхностью* S определяем равенством

$$\int\limits_S\rho\ d\mathcal{A}:=\int\limits_{\mathbb{M}^n}\rho(y)\,N(S,y)\ dH^ky. \tag{1.3}$$

Пусть D — область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n,g)$ $n\geq 2$. Для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, обозначим символом L^{φ} пространство всех функций $f:D\to\mathbb{R}$, таких что

$$\int\limits_D\varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\ dv(x)<\infty \tag{1.4}$$

при некотором $\lambda > 0$. Пространство L^{φ} называется *пространством Орлича.*

Классом Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщёнными производными (в локальных координатах), градиент ∇f которых локально в области D принадлежит пространству Орлича L^{φ}. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc} \subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geq 1$.

Далее, если f — локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, m$, и на любом компакте $C \subset D$

$$\int\limits_C \varphi\left(\frac{|\nabla f(x)|}{\lambda}\right) dv(x) < \infty \tag{1.5}$$

для некоторого $\lambda > 0$, где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы также пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае отображений $f : D \to D_*$ между областями D и D_* на римановых многообразиях разной размерности и для более общих функций φ, чем в классах Орлича, априори всегда предполагавших выпуклость функции φ. Заметим, что классы Орлича–Соболева сейчас интенсивно изучаются в самых разных аспектах, см., напр., ссылки в [21].

2. Дифференцируемость и свойство Лузина

Основные результаты данной секции в $\mathbb{R}^n$, теоремы 2.1 и 2.3, были впервые получены в препринте [21] и приводятся здесь с краткими доказательствами для замкнутости изложения.

Нижеприведённое утверждение непосредственно следует из теоремы Фубини и критерия принадлежности функций классу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ в терминах ACL из разд. 1.1.3 в [30], ср. теорему II.5.5 в [12].

Предложение 2.1. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f : U \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(U)$, где функция $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая. Тогда для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}$, параллельных координатным плоскостям, сужение $f|_{\mathcal{P}\cap U} \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\mathcal{P} \cap U)$.*

Комбинируя предложение 2.1 с результатом Кальдерона о дифференцируемости в [3], получаем:

Следствие 2.1. *Пусть* Ω — *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — *непрерывная функция класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, *где* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — *возрастающая функция такая, что*

$$\int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда на почти каждой гиперплоскости, параллельной произвольной фиксированной гиперплоскости, функция f *имеет почти всюду полный дифференциал.*

Комбинируя следствие 2.1 с результатом Фаделя в [4], приходим к следующему заключению.

Теорема 2.1. *Пусть* Ω — *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — *непрерывное открытое отображение класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, *где* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — *возрастающая функция с условием* (2.1). *Тогда отображение* f *имеет полный дифференциал почти всюду в* Ω.

Замечание 2.1. При $n = 2$ заключение теоремы 2.1 имеет место для любых непрерывных открытых отображений класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ по теореме Геринга–Лехто–Меньшова, см., напр., [8, 31].

Теорема 2.2. *Пусть* Ω — *открытое множество в* $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, *и пусть* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, — *непрерывное отображение класса* $W^{1,\varphi}(\Omega)$, *где* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — *возрастающая функция такая, что*

$$\int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty. \tag{2.2}$$

Тогда для каждого измеримого множества $E \subset \Omega$

$$H^k(f(E)) \leq \gamma_{k,m}\, A_*^{k-1} \int\limits_E \varphi_*\left(\frac{|\nabla f|}{\lambda}\right) dm(x) \tag{2.3}$$

для некоторого $\lambda > 0$, *где* $\gamma_{k,m} = (\lambda m \alpha_k)^k$, α_k — *постоянная, зависящая только от* k,

$$A_* \colon = \left[\frac{1}{\varphi_0(1)}\right]^{\frac{1}{k-1}} + \int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi_0(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt, \tag{2.4}$$

где $\varphi_0(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$ *и* $\varphi_*(t) \equiv \varphi_0(1)$ *при* $t \in (0,1)$, $\varphi_*(0) = 0$ *и* $\varphi_*(t) = \varphi_0(t)$ *при* $t \geq 1$.

Доказательство теоремы 2.2 основано на следующей лемме.

Лемма 2.1. *При условиях и обозначениях теоремы* 2.2

$$\operatorname{diam}(f(C)) \leq \lambda m \alpha_k \, A_*^{\frac{k-1}{k}} \left[\int\limits_C \varphi_* \left(\frac{|\nabla f|}{\lambda} \right) \, dm(x) \right]^{\frac{1}{k}} \tag{2.5}$$

для кубов $C \subset \Omega$ с рёбрами, параллельными координатным осям.

Доказательство. Покажем справедливость (2.5) индукцией по $m = 1, 2, \ldots$. Действительно, при $m = 1$ неравенство (2.5) следует из оценки Кальдерона в [3, с. 208]. Предположим, что (2.5) справедливо при некотором $m = l$ и докажем (2.5) при $m = l + 1$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, v_{l+1})$ в $\mathbb{R}^{l+1}$, а также векторы $\vec{V_1} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, 0)$ и $\vec{V_2} = (0, 0, \ldots, 0, v_{l+1})$. По неравенству треугольника $|\vec{V}| = |\vec{V_1} + \vec{V_2}| \leq |\vec{V_1}| + |\vec{V_2}|$. Таким образом, обозначая через $\operatorname{Pr}_1 \vec{V} = \vec{V_1}$ и $\operatorname{Pr}_2 \vec{V} = \vec{V_2}$ проекции векторов из $\mathbb{R}^{l+1}$ на координатную гиперплоскость $y_{l+1} = 0$ и на $(l+1)$-ю координатную ось в $\mathbb{R}^{l+1}$, соответственно, мы получим, что $\operatorname{diam} f(C) \leq \operatorname{diam} \operatorname{Pr}_1 f(C) + \operatorname{diam} \operatorname{Pr}_2 f(C)$, и, применяя (2.5) при $m = l$ и $m = 1$, мы приходим к неравенству (2.5) при $m = l + 1$ ввиду монотонности функции φ. □

Доказательство теоремы 2.2. Ввиду счётной аддитивности меры и интеграла, не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что множество E ограничено и что $\overline{E} \subset \Omega$, т.е., что $\overline{E}$ — компакт в Ω. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\omega \subset \Omega$ такое, что $E \subset \omega$ и $|\omega \setminus E| < \varepsilon$, см. теорему III (6.6) в [39]. Учитывая замечание, сделанное выше, мы можем считать, что $\overline{\omega}$ компакт и, следовательно, отображение f равномерно непрерывно в ω. Таким образом, ω может быть покрыто счётным набором замкнутых ориентированных кубов C_i, внутренности которых попарно не пересекаются, и таких, что $\operatorname{diam} f(C_i) < \delta$ для каждого предписанного заранее $\delta > 0$ и $|\bigcup_{i=1}^{\infty} \partial C_i| = 0$. Тогда в силу леммы 2.1 мы получим, что

$$\begin{aligned} H_\delta^k(f(E)) \leq H_\delta^k(f(\omega)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} [\operatorname{diam} f(C_i)]^k \\ \leq \gamma_{k,m} A_*^{k-1} \int\limits_\omega \varphi_* \left(|\nabla f| \right) \, dm(x). \end{aligned}$$

Наконец, ввиду абсолютной непрерывности неопределённого интеграла, произвольности ε и $\delta > 0$, получаем (2.3). □

Следствие 2.2. *При условиях теоремы* 2.2*, отображение f обладает (N)-свойством Лузина, более того, f является абсолютно непрерывным относительно k-мерной хаусдорфовой меры.*

По теореме 2.2, см. также теорему VII.3 в [15], мы получаем следующее заключение типа Сарда.

Следствие 2.3. *При условиях теоремы* 2.2*, $H^k(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на измеримом множестве $E \subset \Omega$, и потому $\dim_H\, f(E) \le k$ и $\dim f(E) \le k-1$.*

Комбинируя предложение 2.1 и следствие 2.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция с условием* (2.1)*. Тогда любое непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ обладает (N)-свойством, более того, локально абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$-мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких $\mathcal{P}$, $H^{n-1}(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathcal{P}$.*

Заметим, что, если условие вида (2.1) имеет место для некоторой возрастающей функции φ, то функция $\varphi_* = \varphi(ct)$ при $c > 0$ также удовлетворяет (2.1). Кроме того, хаусдорфовы меры являются квазиинвариантными при квазиизометриях, см., напр., разд. 1.1.7 в [30]. По свойству Линделёфа в $\mathbb{R}^n$, см., напр., теорему Линделёфа в разд. I.5.XI в [24], множество $U \setminus \{x_0\}$ может быть покрыто счётным числом открытых сегментов сферических колец в $U \setminus \{x_0\}$ с центром в точке x_0, и каждый такой сегмент может быть отображён на прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ посредством квазиизометрии. Следовательно, применяя теорему 2.3 в каждом таком параллелепипеде, мы получаем следующее заключение.

Следствие 2.4. *При условии* (2.1) *любое непрерывное отображение $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ обладает (N)-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах S с центром в заданной предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$. Кроме того, на почти всех таких сферах S выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S$.*

Комментарии о точности условий в $\mathbb{R}^n$ при $n \ge 3$, особенно условия (2.1), и более широкий обзор литературы по данным вопросам, см. в препринте [21].

3. Связь $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с нижними Q-гомеоморфизмами

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $J_f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}$ и $\|f'(x)\|^n \leq K(x) \cdot J_f(x)$ для некоторой почти всюду конечной функции $K(x)$. Здесь $\|f'(x)\|$ обозначает матричную норму якобиевой матрицы f' отображения f в точке $x \in D$, $\|f'(x)\| = \sup_{h\in\mathbb{R}^n, |h|=1} |f'(x) \cdot h|$, $J_f(x) = \det f'(x)$ — якобиан отображения f в точке x. В дальнейшем $K_f(x)$ обозначает наименьшую такую функцию $K(x) \geq 1$, т.е., полагаем $K_f(x) = \|f'(x)\|^n / J_f(x)$ при $J_f(x) \neq 0$, $K_f(x) = 1$ при $f'(x) = 0$ и $K_f(x) = \infty$ в остальных точках.

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ в работе [17]. В дальнейшем это условие было заменено требованием $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, предполагающим дополнительно, что $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, см., напр., [16]. Заметим, что упомянутое дополнительное условие $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ излишне в случае гомеоморфизмов, поскольку

$$\int\limits_C J_f(x)\, dm(x) \leq |f(C)| \tag{3.1}$$

для любого компакта C в D, см., напр., пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [5]. Отображения с конечным искажением нашли многих последователей, см. дальнейшие ссылки в [28]. Предшествующие им отображения с ограниченным искажением давно стали классикой теории отображений, см., напр., [35].

Будем говорить, что гомеоморфизм f между областями D и D_* на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 3$, соответственно, называется *гомеоморфизмом с конечным искажением,* если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и $L^n(x, f) \leq K(x) \cdot J(x, f)$ для некоторой почти всюду конечной функции $K(x)$, где $J(x, f) = \liminf_{r\to 0} v_*(f(B(x, r)))/v(B(x, r))$ и $L(x, f) = \limsup_{y\to x} d_*(f(x), f(y))/d(x, y)$. Здесь $B(x, r)$ обозначает геодезический шар в $(\mathbb{M}^n, g)$ с центром в точке x радиуса r, v и v_*, d и d_* обозначают объемы и геодезические расстояния на многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно. В дальнейшем $K(x, f)$ обозначает наименьшую такую функцию $K(x) \geq 1$, т.е., полагаем $K(x, f) = L^n(x, f)/J(x, f)$ при $J(x, f) \neq 0$, $K(x, f) = 1$ при $L(x, f) = 0$ и $K(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Замечание 3.1. Переходя к локальным координатам, видим, что определения $K(x, f)$ и $K_f(x)$ согласованы в точках дифференцируемости отображения f. Величина $K_f(x)$ инвариантна относительно замен локальных координат и по теореме 2.1 $K(x, f)$ можно вычислять п.в. через $K_f(x)$ в любых локальных координатах для отображений класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (2.1).

Борелеву функцию $\rho:\mathbb{M}^n\to[0,\infty]$ называем *допустимой* для семейства k-мерных поверхностей Γ в $\mathbb{M}^n$, $k=1,2,\ldots,n-1$, пишем $\rho\in adm\,\Gamma$, если $\int_S\rho^k\,d\mathcal{A}\geq 1$ для любого $S\in\Gamma$. *Модуль семейства* Γ есть величина $M(\Gamma):=\inf_{\rho\in adm\Gamma}\int_{\mathbb{M}^n}\rho^n\,dv$.

Далее говорим, что некоторое свойство P имеет место для п.в. (почти всех) $S\in\Gamma$, если модуль подмножества Γ_* тех $S\in\Gamma$, для которых свойство P нарушается, равен нулю.

Аналогично [28], измеримую относительно меры объема v функцию $\rho:\mathbb{M}^n\to[0,\infty]$ называем *обобщенно допустимой* для семейства Γ, состоящего из k-мерных поверхностей S в $\mathbb{M}^n$, пишем $\rho\in ext\,adm\,\Gamma$, если условие допустимости выполнено для п.в. $S\in\Gamma$.

Здесь мы говорим также, что семейство Γ_1 *минорируется* с семейством Γ_2, пишем $\Gamma_1>\Gamma_2$, если для любой $S\in\Gamma_1$ найдется $S'\in\Gamma_2$ такая, что $\mathcal{A}_S(B)\geq\mathcal{A}_S{}'(B)$ для любого борелевского множества B в $\mathbb{M}^n$. Как известно, тогда $M(\Gamma_1)\leq M(\Gamma_2)$, см., напр., [6].

Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением Геринга для квазиконформных отображений в [10], было впервые введено в $\mathbb{R}^n$, см. статью [19], а также монографию [28].

Всюду далее мы предполагаем, что $(\mathbb{M}^n,g)$ и $(\mathbb{M}^n_*,g^*)$ — гладкие римановы многообразия. В дальнейшем подразумевается, что геодезические сферы $S(x_0,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{M}^n: d(x,x_0)=\varepsilon\}$, геодезические шары $B(x_0,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{M}^n: d(x,x_0)<\varepsilon\}$ и геодезические кольца $A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)=\{x\in\mathbb{M}^n:\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0\}$ лежат в нормальной окрестности точки x_0.

Пусть даны области D и D_* на $(\mathbb{M}^n,g)$ и $(\mathbb{M}^n_*,g^*)$, $n\geq 2$, соответственно, и измеримая функция $Q:D\to(0,\infty)$. Гомеоморфизм $f:D\to D_*$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0\in\overline{D}$, если существует $\delta_0\in(0,d(x_0))$, $d(x_0)=\sup_{x\in D}d(x,x_0)$ такое, что для всякого $\varepsilon_0<\delta_0$ и геодезических колец $A_\varepsilon=A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, выполнено условие

$$M(f(\Sigma_\varepsilon))\geq\inf_{\rho\in ext\,adm\,\Sigma_\varepsilon}\int\limits_{D\cap A_\varepsilon}\frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\,dv(x),\qquad(3.2)$$

где через Σ_ε обозначено семейство всех пересечений с областью D геодезических сфер $S(x_0,r), r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$.

Говорим, что гомеоморфизм $f:D\to D_*$ является *нижним Q-гомеоморфизмом в области D*, если f является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0\in\overline{D}$.

Отображение $f : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым,* если

$$\operatorname{dist}\,(f(x_1),\, f(x_2)) \leq M \cdot \operatorname{dist}\,(x_1,\, x_2)$$

для некоторой постоянной $M < \infty$ и всех $x_1, x_2 \in X$. Говорят, что отображение $f : X \to Y$ *билипшицево,* если, оно, во-первых, липшицево и, во-вторых,

$$\operatorname{dist}\,(x_1, x_2) \leq M^* \cdot \operatorname{dist}\,(f(x_1), f(x_2))$$

для некоторой постоянной $M^* < \infty$ и всех $x_1,\, x_2 \in X$.

Следующее важное утверждение впервые было получено в $\mathbb{R}^n$ в препринте [21]. Его доказательство на римановых многообразиях требует некоторой модификации.

Теорема 3.1. *Пусть D и D_* — области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 3$, соответственно, $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — возрастающая функция с условием (2.1). Тогда каждый гомеоморфизм $f : D \to D_*$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ является нижним Q-гомеоморфизмом в D с $Q(x) = K_f(x)$.*

Доказательство. Обозначим через B (борелевское) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J_f(x) \neq 0$ в локальных координатах. Применяя теорему Кирсбрауна и используя единственность аппроксимативного дифференциала, см., напр., разд. 2.10.43 и теорему 3.1.2 в [5], заключаем, что множество B представляет собой счётной объединение борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., лемму 3.2.2 и теоремы 3.1.4 и 3.1.8 в [5]. Без ограничения общности, можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются и лежат в картах многообразия $\mathbb{M}^n$. Обозначим также через B_* множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал и $f'(x) = 0$.

По построению множество $B_0 := D \backslash (B \bigcup B_*)$ имеет нулевой объем, см. теорему 2.1 и замечание 1.1. Следовательно, по лемме 8.1 из [28] площадь $B_0 \cap S_r$ равна нулю для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ в нормальной окрестности точки $x_0 \in \overline{D}$. Таким образом, по следствию 2.4 и замечанию 1.1, получаем, что площади $f(B_0) \cap S^*_r$ и $f(B_*) \cap S^*_r$ также равны нулю для почти всех таких S_r, где $S^*_r = f(S_r)$.

Здесь мы также воспользовались тем, что B_0 и B_* можно разбить на счетное число кусков, каждый из которых (и его образ) лежит в карте многообразия $\mathbb{M}^n$ ($\mathbb{M}^n_*$, соответственно.)

Пусть Γ обозначает семейство всех пересечений сфер S_r, $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$, в нормальной окрестности с областью D. Для произвольной функции $\rho_*\in\operatorname{adm} f(\Gamma)$ такой, что $\rho_*\equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho\equiv 0$ вне D и на B_0, и $\rho(x) := \rho_*(f(x))L(x,f)$ при $x\in D\setminus B_0$. Рассуждая на каждом B_l, $l=1,2,\ldots$, согласно 1.7.6 и 3.2.1 в [5], получаем

$$\int\limits_{S_r}\rho^{n-1}\,d\mathcal{A}=\int\limits_{S_r}\rho_*^{n-1}(f(x))L^{n-1}(x,f)\,d\mathcal{A}\geq\int\limits_{S_r^*}\rho_*^{n-1}d\mathcal{A}_*\geq 1$$

для почти всех S_r, и, следовательно, $\rho\in\operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$. Используя замену переменных на B_l, $l=1,2,\ldots$, см., напр., теоремы 2.10.43 и 3.2.5 в [5], ввиду счётной аддитивности интеграла, получаем оценку (3.2). $\square$

Следствие 3.1. *Каждый гомеоморфизм $f:D\to D_*$ с конечным искажением класса $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p>n-1$ является нижним Q-гомеоморфизмом в D с $Q(x)=K(x,f)$.*

Следствие 3.2. *В частности, каждый гомеоморфизм $f:D\to D_*$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ такой, что $K(x,f)\in L^q_{\rm loc}$ при $q>n-1$, является нижним Q-гомеоморфизмом в D с $Q(x)=K(x,f)$.*

Доказательство. Используя неравенства Гёльдера и (3.1) на каждом компакте C в локальных координатах получаем оценку норм первых частных производных

$$\|\partial_i f\|_p\leq\|K_f^{1/n}\|_s\cdot\|J_f^{1/n}\|_n\leq\|K_f\|_q^{1/n}\cdot|f(C)|^{1/n}<\infty,$$

где $\frac{1}{p}=\frac{1}{s}+\frac{1}{n}$ и $s=qn$, т.е., $\frac{1}{p}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{q}+1\right)$, и если $q>n-1$, то также $p>n-1$. Итак, мы имеем, что $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$, где $p=nq/(1+q)>n-1$ и по следствию 3.1 получаем следствие 3.2. $\square$

4. Связь с кольцевыми Q-гомеоморфизмами

В дальнейшем мы придерживаемся стандартных соглашений, что $a/\infty=0$ для $a\neq\infty$, $a/0=\infty$, если $a>0$ и $0\cdot\infty=0$, см., напр., [39].

Аналог следующего критерия нижних Q-гомеоморфизмов был получен ранее в $\mathbb{R}^n$, см. теорему 2.1 в [19].

Теорема 4.1. *Пусть D и D_* — области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n,g)$ и $(\mathbb{M}^n_*,g^*)$, $n\geq 2$, соответственно, $Q:D\to(0,\infty)$ — измеримая функция, и пусть $x_0\in\overline{D}$. Гомеоморфизм $f:D\to D_*$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке x_0 тогда* *и только тогда, когда для любой нормальной окрестности* $B(x_0, \varepsilon_0)$ *точки* x_0 *с* $\varepsilon_0 < d(x_0) := \sup_{x\in D} d(x, x_0)$

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geq \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0, r)} \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{4.1}$$

где Σ_ε *— семейство всех пересечений с областью* D *геодезических сфер* $S(x_0, r)$*,* $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$*, и*

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int\limits_{D(x_0,r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}} \; - \tag{4.2}$$

L^{n-1}*-норма* Q *по* $D(x_0, r) = \{x \in D : d(x, x_0) = r\} = D \cap S(x_0, r)$*.*

Доказательство. Для любого $\rho \in ext\, adm\, \Sigma_\varepsilon$

$$A_\rho(r) := \int\limits_{D(x_0,r)} \rho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \neq 0$$

п.в. является измеримой функцией по параметру r, скажем по теореме Фубини. Таким образом, мы можем требовать равенство $A_\rho(r) = 1$ п.в. вместо условия допустимости и

$$\inf_{\rho \in ext\, adm\, \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D\cap R_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dv(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\inf_{\alpha \in I(r)} \int\limits_{D(x_0,r)} \frac{\alpha^p(x)}{Q(x)}\, d\mathcal{A} \right) dr,$$

где $p = n/(n-1)$, $R_\varepsilon = \{x \in \mathbb{M}^n : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ и $I(r)$ обозначает множество всех измеримых функций α на поверхности $D(x_0, r)$ таких, что $\int_{D(x_0,r)} \alpha(x)\, d\mathcal{A} = 1$. Поэтому теорема 4.1 следует из леммы 2.1 работы [19] для $X = D(x_0, r)$ с мерой площади на $D(x_0, r)$ в качестве μ, $\varphi = \frac{1}{Q}|_{D(x_0,r)}$ и $p = n/(n-1) > 1$. □

Лемма 4.1. *Пусть* D *и* D_* *— области на гладких римановых многообразиях* $(\mathbb{M}^n, g)$ *и* $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$*,* $n \geq 2$*,* $Q : D \to (0, \infty)$ *— измеримая функция и* $f : D \to D_*$ *— нижний* Q*-гомеоморфизм в точке* $x_0 \in \overline{D}$*. Тогда*

$$M\left(\Delta(f(S_1), f(S_2); D_*)\right) \leq c I^{1-n}, \tag{4.3}$$

где $S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = r_i\}$*,* $i = 1, 2$*,* $0 < r_1 < r_2$*,* $B(x_0, r_2)$ *— нормальная окрестность точки* x_0*,*

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0, r)}, \tag{4.4}$$

$\|Q\|_{n-1}(x_0,r)$ определено в (4.2), а константа c произвольно близка к 1 в достаточно малых окрестностях точки x_0.

Здесь и далее, для произвольных множеств A, B и C в многообразии $\mathbb{M}^n_*$ через $\Delta(A,B;C)$ обозначается совокупность всех кривых $\gamma : [a,b] \to \mathbb{M}^n_*$, соединяющих A и B в C, т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ для всех $t \in (a,b)$.

Доказательство. По замечанию 1.1 метрический тензор в начале нормальных координат совпадает с единичной матрицей и, следовательно, в достаточно малом шаре с центром в нуле равномерно близок к единичной матрице. Поэтому, согласно равенствам Хессе и Циммера, см. [14] и [43], имеем, что $M\left(\Delta(f(S_1), f(S_2); D_*)\right) \le c/M^{n-1}(f(\Sigma))$, поскольку $f(\Sigma) \subset \Sigma(f(S_1), f(S_2); D_*)$, где Σ обозначает совокупность всех геодезических сфер с центром в точке x_0, расположенных между сферами S_1 и S_2, а $\Sigma(f(S_1), f(S_2); D_*)$ состоит из всех замкнутых множеств в D_*, отделяющих $f(S_1)$ и $f(S_2)$, а c — постоянная, произвольно близкая к единице для достаточно малых окрестностей x_0. Таким образом, из теоремы 4.1 получаем оценку (4.3). □

Замечание 4.1. В частности, ввиду гомеоморфности f, из неравенства (4.3) следует, что $I(x_0,r_1,r_2) \ne \infty$ при $0 < r_1 < r_2$ в нормальной окрестности точки x_0.

Следующая лемма доказывается совершенно аналогично лемме 11.6 из монографии [28], см. также статью [38].

Лемма 4.2. *Пусть D — область на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \ge 2$, $x_0 \in \overline{D}$, $0 < r_1 < r_2 < d(x_0) := \sup_{x\in D} d(x,x_0)$, $A = A(x_0,r_1,r_2)$ — геодезическое кольцо, $B(x_0,r_2)$ — нормальная окрестность точки x_0 и пусть $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Полагаем, в соответствии с (4.2) и (1.11) $\eta_0(t) = 1/I \cdot \|Q\|_{n-1}(x_0,t)$. Тогда*

$$I^{1-n} = \int\limits_{A\cap D} Q^{n-1}(x)\cdot \eta_0^n\left(d(x,x_0)\right) dv(x)$$

$$\le \int\limits_{A\cap D} Q^{n-1}(x)\cdot \eta^n\left(d(x,x_0)\right) dv(x) \quad (4.5)$$

для любой измеримой функции $\eta : (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1. \quad (4.6)$$

Следствие 4.1. *При условиях и обозначениях лемм 4.1 и 4.2,*

$$M(\Delta(f(S_1), f(S_2); D_*)) \leq c \int\limits_{A\cap D} Q^{n-1}(x)\, \eta^n(d(x,x_0))\, dv(x). \qquad (4.7)$$

Говорим, что гомеоморфизм f между областями D и D_* на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$, $n \geq 2$, называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если найдется $r_0 > 0$ такое, что $B(x_0, r_0)$ — нормальная окрестность точки x_0 и

$$M(\Delta(f(C_1), f(C_2); D_*)) \leq \int\limits_{A\cap D} Q(x)\ \eta^n(d(x,x_0))\ dv(x)$$

для $0 < r_1 < r_2 < r_0$, любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, любых двух континуумов $C_1 \subseteq \overline{B(x_0, r_1)}$ и $C_2 \subseteq \mathbb{M}^n \setminus B(x_0, r_2)$ и любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ с условием (2.3).

Теорема 4.2. *Пусть D и D_* — области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$, $n \geq 2$, соответственно, и пусть $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция. Если $f : D \to D_*$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in \overline{D}$, то f является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом в точке x_0 с $Q_*(x) = cQ^{n-1}(x)$, где константа c может быть выбрана произвольно близкой к 1.*

Доказательство. Поскольку семейство кривых $\Delta(f(C_1), f(C_2); D_*)$ минорируется семейством $\Delta(f(S_1), f(S_2); D_*)$, где $S_1 = S(x_0, r_1)$ и $S_2 = S(x_0, r_2)$, то $M(\Delta(f(C_1), f(C_2); D_*)) \leq M(\Delta(f(S_1), f(S_2); D_*))$ и заключение теоремы 4.2 получается из следствия 4.1. $\Box$

Замечание 4.2. Комбинируя теорему 4.2 с теоремой 3.1 и следствием 3.1 получаем соответствующие утверждения о гомеоморфизмах $f : D \to D_*$ конечного искажения в классах Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при условии типа Кальдерона (2.1) на функцию φ и, в частности, в классах Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$ с $Q(x) = K(x, f)$. Наконец, по следствию 3.2 все теоремы данного параграфа верны для любых гомеоморфизмов f класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ с $K_f \in L^q_{\rm loc}$, $q > n-1$, и, при этом, $Q(x) = K_f(x)$.

5. Регулярность по Альфорсу римановых многообразий

Лемма 5.1. *Хаусдорфова размерность областей на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ относительно геодезического расстояния совпадает с топологической размерностью n. Кроме того, гладкие римановы многообразия локально n-регулярны по Альфорсу.*

Определение регулярности по Альфорсу в метрических пространствах с мерами смотри в [36].

Доказательство. Напомним, что $d(z,y) = \inf_\gamma s_\gamma$ где инфимум берется по всем кусочно гладким кривым γ, соединяющим z и y в $\mathbb{M}^n$, и где s_γ — длина кривой γ. Ясно, что $s_\gamma = \int \sqrt{g_{ij}(x(s_*))\, \frac{dx^i}{ds_*}\frac{dx^j}{ds_*}}\; ds_*$, где s_* — естественный параметр длины кривой γ, и что $|\frac{dx}{ds_*}| = 1$. Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, где $\eta^i = \frac{dx^i}{ds_*}$. Оценим геодезическое расстояние $d(z,y)$ через евклидово расстояние $\rho(z,y)$ в локальных координатах. Для этой цели рассмотрим функцию $\varphi_{x_0}(\eta) = g_{ij}(x_0)\ \eta^i\eta^j$, заданную на единичной сфере $|\eta| = 1$ в $\mathbb{R}^n$, где $x_0 \in \mathbb{M}^n$ — фиксированная точка. По определению метрический тензор g_{ij} является положительно определенным и непрерывным. Так как непрерывная на компакте функция является ограниченной, то $\varphi_{x_0}(\eta)$ достигает на нем своего максимума и минимума $0 < m_{x_0} < \varphi_{x_0}(\eta) < M_{x_0} < \infty$, где m_{x_0} и M_{x_0} — константы, зависящие от x_0. Более того, ввиду непрерывной зависимости $\varphi_x(\eta)$ по совокупности переменных x и η, указанная двусторонняя оценка $\varphi_{x_0}(\eta)$ имеет место не только в точке x_0, но и во всех точках x некоторой окрестности x_0.

Таким образом, локально имеем двухстороннюю оценку геодезического расстояния через евклидово расстояние в соответствующей системе координат $m\cdot r(z,y) \le d(z,y) \le M\cdot r(z,y)$, где $0 < m \le M < \infty$.

С другой стороны, из тех же соображений имеем локальную двухстороннюю оценку объема $V(B) = \int_B \sqrt{\det g_{ij}}\ dx^1\cdots dx^n$ геодезических шаров B через их евклидов объем $W(B)$: $\widetilde{m}\cdot W(B) \le V(B) \le \widetilde{M}\cdot W(B)$, поскольку $\det g_{ij}$ положителен и непрерывен.

Комбинируя эти две оценки, получаем, что локально $c\cdot d^n \le V(B) \le C\cdot d^n$, где d — геодезический радиус шаров B.

Таким образом, римановы многообразия являются локально n-регулярными по Альфорсу, а значит их хаусдорфова размерность совпадает с топологической размерностью n, см. [13, с. 62]. □

Из леммы 2.7, в частности, получаем локальное условие удвоения меры.

Следствие 5.1. *Для любой точки x_0 на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ найдутся $r_0 > 0$ и $c \in (1,\infty)$ такие, что*

$$v(B(x_0, 2r)) \le c v(B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \le r_0. \tag{5.1}$$

6. Граничное поведение нижних Q-гомеоморфизмов

Определения локальной связности областей на границе, слабо плоских и сильно достижимых границ, а также функций конечного среднего колебания, используемые в дальнейшем, см. в работе [36].

Ввиду теоремы 4.2 и леммы 2.7, здесь мы можем применить теорию граничного поведения кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах с мерами, которая была развита в работе [40]. Всюду в данной секции D и D_* — области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$, $n \geq 2$, соответственно.

Начнем со следующего простого, но очень важного результата, ср. теорему 3 в [40].

Теорема 6.1. *Пусть D локально связна на границе, $\overline{D}$ компактно, ∂D_* — слабо плоская. Если $f : D \to D_*$ является нижним Q-гомеоморфизмом с $Q \in L^{n-1}(D)$, то f^{-1} имеет непрерывное продолжение на $\overline{D_*}$.*

Пример, приведенный при доказательстве предложения 6.3 в монографии [28], показывает, что сколь угодно высокая степень интегрируемости Q не гарантирует продолжение на границу по непрерывности прямых отображений. Соответствующие условия имеют гораздо более сложную природу, см. лемму 6.1 и следствия из нее ниже. Именно, из леммы 4 работы [40] имеем следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D_*}$ — компакт, а $f : D \to D_*$ — нижний Q-гомеоморфизм в x_0 такой, что ∂D_* сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \Big\{ y \in \mathbb{M}^n_* : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), \ x_k \to x_0, \ x_k \in D \Big\}, \qquad (6.1)$$

$Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{D\cap A} Q^{n-1}(x) \cdot \psi^n_{x_0,\varepsilon,\varepsilon_0}(d(x,x_0))\, dv(x) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \qquad (6.2)$$

для всех $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$ при $\varepsilon \to 0$, где $d(x_0) = \sup_{x\in D} d(x,x_0)$, $A = A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{M}^n : \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$, и $\psi_{x_0,\varepsilon,\varepsilon_0}(t)$ — семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0,\infty)$ таких, что

$$0 < I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) \colon = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon,\varepsilon_0}(t)\, dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \ \varepsilon_0 \in (0, d(x_0)). \qquad (6.3)$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.

Комбинируя лемму 6.1 с теоремой 6.1, получаем:

Лемма 6.2. *Пусть D и D_* имеют компактные замыкания, D локально связна на границе, а ∂D_* — слабо плоская. Если функция $Q \in L^{n-1}(D)$ удовлетворяет условию (6.2) в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то любой нижний Q-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Далее функция Q предполагается продолженной на все многообразие $\mathbb{M}^n$ каким-либо способом, например, нулем вне области D. В частности, выбирая в лемме 6.1 $\psi(t) = t \log 1/t$, и привлекая лемму 4.1 из работы [36], см. также лемму 2.7 и следствие 2.8 выше, приходим к следующему результату.

Теорема 6.2. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, а ∂D_* сильно достижима и $\overline{D_*}$ компактно. Если $Q^{n-1} \in FMO(x_0)$, то любой нижний Q-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

По следствию 4.1 в работе [36], мы также имеем следующее заключение.

Следствие 6.1. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, а ∂D_* сильно достижима и $\overline{D_*}$ компактно. Если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \quad \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q^{n-1}(x)\, dv(x) < \infty, \tag{6.4}$$

то любой нижний Q-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.

Комбинируя теоремы 6.1 и 6.2, имеем:

Теорема 6.3. *Пусть D локально связна на границе, ∂D_* — слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и $Q \in L^{n-1}(D)$. Если Q^{n-1} принадлежит FMO в точках ∂D, то любой нижний Q-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Далее, в качестве одного из следствий леммы 6.1 получаем:

Теорема 6.4. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, ∂D_* сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty, \tag{6.5}$$

где $0 < \delta(x_0) < d(x_0) = \sup_{x\in D} d(x, x_0)$ *таково, что* $B(x_0, \delta(x_0))$ — *нормальная окрестность точки* x_0 *и*

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \qquad (6.6)$$

Тогда любой нижний Q*-гомеоморфизм* $f : D \to D_*$ *допускает продолжение по непрерывности в точку* x_0*. Если дополнительно* (6.5) *выполнено для всех* $x_0 \in \partial D$*,* D *локально связна во всех точках границы,* $\overline{D}$ *компактно,* ∂D_* — *слабо плоская и* $Q \in L^{n-1}(D)$*, то* f *допускает гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$*.*

Доказательство. Положим для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < d(x_0)$

$$\psi_{x_0,\varepsilon,\varepsilon_0}(t) := \psi_{x_0}(t) = 1/\|Q\|_{n-1}(x_0, t). \qquad (6.7)$$

Тогда, по замечанию 4.1 для любых $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0)), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\int\limits_{A\cap D} Q^{n-1}(x) \cdot \psi^n_{x_0}\left(d(x, x_0)\right)\, dv(x) = I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0, t)},$$

где $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$. Однако, по условию (6.5) $I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon))$. Таким образом, по леммам 6.1 и 6.2 получаем заключение теоремы 6.4. □

Следствие 6.2. *Пусть* D *локально связна на границе,* ∂D_* — *слабо плоская,* $\overline{D}$ *и* $\overline{D_*}$ *компактны,* $Q \in \mathrm{L}^{n-1}(D)$ *и*

$$Q(x) = O\left(\log \frac{1}{r}\right) \qquad \forall\, x_0 \in \partial D \qquad (6.8)$$

при $r = d(x, x_0) \to 0$*. Тогда любой нижний* Q*-гомеоморфизм* $f : D \to D_*$ *допускает гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$*.*

Следующая лемма вытекает из ее евклидового аналога, леммы 1 в [22], ввиду предложения 1.1 и замечания 1.1.

Лемма 6.3. *Пусть* $\mathbb{B}_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$ — *нормальная окрестность точки* x_0 *на римановом многообразии* $(\mathbb{M}^n, g)$*,* $n \geq 2$*,* $K : \mathbb{B}_0 \to (0, \infty)$ — *измеримая функция и* $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — *возрастающая выпуклая функция. Тогда*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rk^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{c}{n} \int\limits_{eM_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} \qquad \forall\, p \in (0, \infty), \qquad (6.9)$$

где M_0 — *среднее значение функции* $\Phi \circ K$ *над* $\mathbb{B}_0$, $k(r)$, $r \in (0, \varepsilon_0)$, — *среднее значение функции* $K(x)$ *над геодезической сферой* $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = r\}$, c — *постоянная, произвольно близкая к единице для малых* ε_0.

Комбинируя теорему 6.4 с леммой 6.3 при $p = n - 1$, получаем следующий результат.

Теорема 6.5. *Пусть* D *локально связна в точке* $x_0 \in \partial D$, ∂D_* — *сильно достижима,* $\overline{D_*}$ *компактно и пусть* $f : D \to D_*$ — *нижний* Q*-гомеоморфизм,*

$$\int\limits_D \Phi(Q^{n-1}(x))\, dv(x) < \infty \tag{6.10}$$

для выпуклой возрастающей функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ *такой, что*

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{6.11}$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$. *Тогда* f *продолжимо в точку* x_0 *по непрерывности. Если дополнительно* D *локально связна всюду на своей границе,* $\overline{D}$ *компактно,* ∂D_* — *слабо плоская, то* f *допускает гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Следствие 6.3. *В частности, заключения теоремы* 6.5 *имеют место, если при некотором* $\alpha > 0$

$$\int\limits_D e^{\alpha Q^{n-1}(x)}\, dv(x) < \infty. \tag{6.12}$$

7. Следствия для классов Орлича–Соболева

Наконец, приведем соответствующие результаты о граничном поведении гомеоморфизмов с конечным искажением классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ между областями D и D_* на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 3$. Именно, ввиду теоремы 3.1, а также следствий 3.1 и 3.2, получаем следующую серию следствий из соответствующих теорем предыдущего параграфа.

Теорема 7.1. *Пусть* D *локально связна на границе,* $\overline{D}$ *компактно,* ∂D_* — *слабо плоская. Если* $f : D \to D_*$ *является гомеоморфизмом с конечным искажением класса Орлича–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *с условием* (2.1) *и* $K(x, f) \in L^{n-1}(D)$, *то* f^{-1} *имеет непрерывное продолжение на* $\overline{D_*}$.

Далее функция $K(x, f)$ предполагается продолженной нулем вне области D.

Теорема 7.2. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, ∂D_* сильно достижима, а $\overline{D_*}$ компактно. Тогда любой гомеоморфизм с конечным искажением $f : D \to D_*$ класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (2.1) и $K^{n-1}(x, f) \in FMO(x_0)$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

Следствие 7.1. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, ∂D_* сильно достижима, а $\overline{D_*}$ компактно. Тогда любой гомеоморфизм с конечным искажением $f : D \to D_*$ класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (2.1) и*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K^{n-1}(x, f)\, dv(x) < \infty, \tag{7.1}$$

продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.

Теорема 7.3. *Пусть D локально связна на границе, ∂D_* — слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны. Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D_*$ класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (2.1) и $K^{n-1}(x, f) \in FMO$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Теорема 7.4. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, ∂D_* сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и пусть $f : D \to D_*$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (2.1). Если*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_f\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty, \tag{7.2}$$

где $0 < \delta(x_0) < d(x_0) = \sup_{x \in D} d(x, x_0)$ таково, что $B(x_0, \delta(x_0))$ — нормальная окрестность точки x_0 и

$$\|K_f\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} K^{n-1}(x, f)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{7.3}$$

то f имеет продолжение в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$. Если дополнительно (7.2) выполнено для всех точек $x_0 \in \partial D$, D локально связна на границе, $\overline{D}$ компактно, ∂D_* — слабо плоская и $K(x, f) \in L^{n-1}(D)$, то f имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Следствие 7.2. *Пусть D локально связна на границе, ∂D_* — слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны. Тогда любой гомеоморфизм с конечным искажением $f : D \to D_*$ класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (2.1) и*

$$K(x,f) = O\Big(\log\frac{1}{r}\Big) \qquad \forall\, x_0 \in \partial D \tag{7.4}$$

при $r = d(x, x_0) \to 0$ имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Теорема 7.5. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, ∂D_* сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и пусть $f : D \to D_*$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (2.1) и*

$$\int\limits_D \Phi(K^{n-1}(x,f))\, dv(x) < \infty \tag{7.5}$$

для выпуклой возрастающей функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{7.6}$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$. Тогда f продолжима в точку x_0 по непрерывности. Если дополнительно D локально связна всюду на своей границе, $\overline{D}$ компактно, ∂D_* — слабо плоская, то f допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Замечание 7.1. Ввиду следствий 3.1 и 3.2, все результаты данного параграфа имеют место, в частности, для гомеоморфизмов с конечным искажением класса Соболева $W^{1,p}_{loc}$ при $p > n-1$, а также для гомеоморфизмов класса $W^{1,1}_{loc}$ с $K_f \in L^q_{loc}$ при $q > n-1$.

Заметим также, что условие (7.6) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с $K_f \in L^q_{loc}$ при $q > n-1$ и с интегральными условиями (7.5) на $K(x,f)$, см. пример в лемме 5.1 в [20].

Заметим, наконец, что все известные в настоящее время регулярные области на римановых многообразиях — гладкие, липшицевы, выпуклые, квазивыпуклые, равномерные и QED-области, квазиэкстремальной длины по Герингу–Мартио, см. [9], имеют слабо плоские и, следовательно, сильно достижимые границы, а также локально связны на своих границах, см. [1]. Таким образом, результаты работы применимы ко всем вышеперечисленным регулярным областям.

Литература

[1] Е. С. Афанасьева, В. И. Рязанов, *Регулярные области в теории отображений на римановых многообразиях* // Труды ИПММ НАН Украины, **22**, (2011), 21–30.

[2] Ch. Bishop, V. Ya. Gutlyanskiĭ. i, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space* // Int. J. Math. and Math. Sci., **22**, (2003), 1397–1420.

[3] A. P. Calderon, *On the differentiability of absolutely continuous functions* // Riv. Math. Univ. Parma, **2**, (1951), 203–213.

[4] A. G. Fadell, *A note on a theorem of Gehring and Lehto* // Proc. Amer. Math. Soc., **49**, (1975), 195–198.

[5] Г. Федерер *Геометрическая теория меры*, М.: Наука, 1987.

[6] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion* // Acta Math., **98**, (1957), 171–219.

[7] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, М.: Наука, 1966.

[8] F. W. Gehring, O. Lehto, *On the total differentiability of functions of a complex variable* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **272**, (1959), 3–8.

[9] F. W. Gehring, O. Martio, *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings* // J. d'Anal. Math., **24**, (1985), 181–206.

[10] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103**, (1962), 353–393.

[11] F. W. Gehring, J. Väisälä, *Hausdorff dimension and quasiconformal mappings* // J. London Math. Soc., **6**, (1973), No. 2, 504–512.

[12] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения*, Новосибирск: Наука, 1983.

[13] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, New York: Springer, 2001.

[14] J. Hesse, *A p-extremal length and p-capacity equality* // Ark. Mat., **13**, (1975), 131–144.

[15] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.

[16] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non–Linear Analysis*, Oxford: Clarendon Press, 2001.

[17] T. Iwaniec, V. Sverák, *On mappings with integrable dilatation* // Proc. Amer. Math. Soc., **118**, (1993), 181–188.

[18] Э. Картан, *Риманова геометрия в ортогональном репере*, М.: МГУ, 1960.

[19] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, *К теории нижних Q-гомеоморфизмов* // Укр. мат. вест., **5** (2008), No. 2, 159–184.

[20] D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, *On boundary behavior of generalized quasi-isometries* // ArXiv: 1005.0247v1 [math.CV], 3 May 2010. 20 pp.

[21] D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *On mappings in the Orlicz-Sobolev classes* // ArXiv: 1012.5010v4 [math.CV], 12 Jan 2011. 69 pp.

[22] D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, *Toward the theory of generalized quasi-isometries* // Мат. Студ., **34**, (2010), No. 2, 129–135.

[23] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1958.

[24] К. Куратовский, *Топология. Т. 1*, М.: Мир, 1966.

[25] К. Куратовский, *Топология. Т. 2*, М.: Мир, 1969.

[26] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, New York: Springer, 1997.

[27] Т. В. Ломако, *О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу* // Укр. мат. ж., **61**, (2009), No. 10, 1329–1337.

[28] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monographs in Mathematics, New York: Springer, 2009.

[29] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability*, Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[30] V. Maz'ya, *Sobolev Spaces*, Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[31] D. Menchoff, *Sur les differencelles totales des fonctions univalentes* // Math. Ann., **105**, (1931), 75–85.

[32] Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин, *Дифференциальная геометрия*, М.: Изд-во МГУ, 1990.

[33] T. Rado, P.V. Reichelderfer, *Continuous Transformations in Analysis*, Berlin: Springer-Verlag, 1955.

[34] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1953.

[35] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск: Наука, 1982.

[36] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Слабо плоские пространства в теории отображений* // Укр. мат. вест., **4**, (2007), No. 2, 199–234.

[37] В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов, *Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов* // Сиб. мат. журн., **48**, (2007), No. 6, 1361–1376.

[38] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equation and ring homeomorphisms* // Укр. мат. вест., **4**, (2007), No. 1, 97–115.

[39] С. Сакс, *Теория интеграла*, М.: ИЛ, 1949.

[40] Е. С. Смоловая, *Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах* // Укр. мат. журн., **62**, (2010), No. 5, 682–689.

[41] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. **229**, Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.

[42] J. Väisälä, *On quasiconformal mappings in space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **298**, (1961), 1–36.

[43] W. P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity* // Trans. Amer. Math. Soc., **126**, (1967), No. 3, 460–473.

Сведения об авторах

Елена Сергеевна Афанасьева, Владимир Ильич Рязанов, Руслан Радикович Салимов	Институт прикладной математики и механики НАН Украины ул. Р. Люксембург, 74 83114 Донецк Украина *E-Mail:* `es.afanasjeva@yandex.ru`, `vlryazanov1@rambler.ru`, `ruslan623@yandex.ru`