Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 2, 255 – 291

$\mathcal{Y}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{B}}$

Найкращі поліноміальні наближення цілих трансцендентних функцій узагальненого порядку зростання в банахових просторах $\mathcal{E}'_p(G)$ та $\mathcal{E}_p(G)$, $p \geqslant 1$

Сергій Б. Вакарчук, Сергій І. Жир

(*Представлена В. Я. Гутлянським*)

Анотація. Для цілих трансцендентних функцій f, які мають узагальнений α-порядок зростання $\rho_\alpha(f)$, одержано теорему типу Адамара, яка пов'язує між собою величини $\widetilde{M}(f,r)$ $(r > 1)$ та коефіцієнти $a_n(f)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ розвинення f в ряд Фабера в скінченній однозв'язній області G, обмеженій кривою γ з класу С. Я. Альпера. Цей результат є поширенням на однозв'язну область одного твердження, одержаного М. М. Шереметою у 1968 році в роботі [28]. За його допомогою в банахових просторах $\mathcal{E}'_p(G)$ та В. І. Смірнова $\mathcal{E}_p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ одержано умови, які є необхідними і достатніми для того, щоб аналітична функція f, яка належить одному з зазначенних просторів, була цілою трансцендентною узагальненого α-порядку зростання $\rho_\alpha(f)$. Вказані умови містять найкращі поліноміальні наближення функції f і визначають швидкість їх прямування до нуля при зростанні ступенів поліномів.

2010 MSC. 30D15, 30D20, 30E10, 41A10.

Ключові слова та фрази. Ціла трансцендентна функція, узагальнений порядок зростання, теорема типу Адамара, поліноми Фабера, найкращі поліноміальні наближення, банахові простори аналітичних функцій.

1. Вступ

Нехай Γ_R $(R > 1)$ — еліпс з фокусами в точках $(1,0)$ і $(-1,0)$ та сумою напівосей R; $\mathcal{D}_R$ — обмежена ним область. С. Н. Бернштейн показав [1, 2], що коли функція f регулярна в $\mathcal{D}_R$, то для послідовності $\{E_n(f)_C\}$ її найкращих наближень алгебраїчними поліномами

Стаття надійшла в редакцію 18.10.2010

степеня $\leqslant n$ в рівномірній метриці на відрізку $[-1,1]$ має місце співвідношення

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f)_C} = \frac{1}{R}.$$

Це означає, що для цілої функції f виконується рівність [2,3]

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f)_C} = 0. \tag{1.1}$$

У зв'язку з цим постало питання про швидкість прямування до нуля елементів послідовності найкращих поліноміальних наближень цілої трансцендентної функції f.

А. В. Батирєв [4], A. R. Reddy [5–7], R. S. Varga [8] показали, що ця швидкість залежить від характеристик зростання цілої функції — її порядку ρ і типу σ. Наприклад, згідно R. S. Varga [8] виконання рівності

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\cdot\ln n}{-\ln E_n(f)_C} = \rho$$

є необхідною і достатньою умовою для того, щоб $f(x) \in C([-1,1])$ була звуженням на $[-1,1]$ цілої трансцендентної функції $f(z)$ порядку ρ, де $\rho \in [0,\infty)$.

Граничні рівності аналогічного змісту, які пов'язують характеристики зростання цілих трансцендентних функцій з послідовностями їх найкращих поліноміальних наближень в деяких банахових просторах аналітичних функцій, у комплексній площині в подальшому було отримано І. І. Ібрагімовим та Н. І. Шихалієвим [9,10], A. Giroux [11], С. Б. Вакарчуком [12–16], авторами [17–26].

Введення М. М. Шереметою [27,28] більш "гнучкої" узагальненої шкали зростання цілих функцій суттєво розширило межі вищевказаних досліджень (дивись, наприклад, [29]) заснованих на застосуванні методів конструктивної теорії функцій комплексної змінної. Це також відкрило нові можливості для дослідження зв'язків між різними узагальненими характеристиками зростання цілих трансцендентних функцій та їх найкращими поліноміальними наближеннями в деяких банахових просторах аналітичних в однозв'язній області функцій (дивись, наприклад, [17–26]).

Дана стаття присвячена продовженню досліджень у зазначеному напрямку.

2. Характеристики зростання цілих функцій та їх найкращі поліноміальні наближення на відрізку $[-1, 1]$ та у колі одиничного радіуса

2.1 Нехай f є цілою функцією і

$$M(f,r) \overset{\text{df}}{=} \max\left\{|f(z)| : |z| = r\right\} \quad (r > 0),$$

$$\ln^{[g]} x \overset{\text{df}}{=} \underbrace{\ln \ln \ldots \ln}_{g} x \quad (g \in \mathbb{Z}_+) \quad \left(\ln^{[0]} x \overset{\text{df}}{=} x, \ln^{[1]} x \overset{\text{df}}{=} \ln x\right).$$

Наведемо деякі характеристики зростання цілих функцій, представивши їх у вигляді наступної таблиці 1.

Порядок зростання	Тип
$\rho = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln \ln M(f,r)}{\ln r}$ (дивись, наприклад, [30])	Якщо $0 < \rho < \infty$, то величину $\sigma = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln M(f,r)}{r^{\rho}}$ називають типом функції f (дивись, наприклад, [30])
У випадку $\rho = \infty$ розглядають величину $\rho(g) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln^{[g]} M(f,r)}{\ln r}$ $(g = 3, 4, \ldots)$ Якщо $\rho(g-1) = \infty$, а $\rho(g) < \infty$, то кажуть, що функція f має g-порядок зростання $\rho(g)$ [31]	Якщо $0 < \rho(g) < \infty$, то величину $\sigma(g) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln^{[g-1]} M(f,r)}{r^{\rho(g)}}$ називають g-типом функції f [7]
Якщо $\rho = 0$, то величину $\rho_l = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln \ln M(f,r)}{\ln \ln r}$ називають логарифмічним порядком зростання функції f [6]	Якщо $1 < \rho_l < \infty$, то величину $\sigma_l = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln M(f,r)}{(\ln r)^{\rho_l}}$ називають логарифмічним типом функції f [6]

Таблиця 1.

Для зазначених характеристик зростання цілих функцій $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)z^n$, де $c_n(f)(n \in \mathbb{Z}_+)$ — коефіцієнти Тейлора, мають місце співвідношення типу Адамара, які, для зручності, теж представимо у вигляді таблиці 2.

Порядок зростання	Тип
$\rho = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln n}{-\ln\lvert c_n(f)\rvert}$	Якщо $0 < \rho < \infty$, то $\big(\sigma e\rho\big)^{1/\rho} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} n^{1/\rho}\cdot\sqrt[n]{\lvert c_n(f)\rvert}$
$\rho(g) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln^{[g-1]} n}{-\ln\lvert c_n(f)\rvert}$	Якщо $0 < \rho(g) < \infty$, то $\sigma(g) = k_g \varlimsup\limits_{n\to\infty} \ln^{[g-2]} n\lvert c_n(f)\rvert^{\rho(g)/n}$, де $k_g = \begin{cases} \frac{1}{e\rho(g)}, & \text{якщо } g = 2; \\ 1, & \text{якщо } g > 2 \end{cases}$
Якщо $\rho_l \geqslant 1$, то $\rho_l = 1 + \varlimsup\limits_{n\to\infty} \ln\ln \dfrac{1}{\sqrt[n]{\lvert c_n(f)\rvert}}$	Якщо $1 < \rho_l < \infty$, то $\sigma_l = \dfrac{(\rho_l - 1)^{\rho_l - 1}}{\rho_l^{\rho_l}} \times \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\rho_l}}{\big(-\ln\lvert c_n(f)\rvert\big)^{\rho_l - 1}}$

Таблиця 2.

Продовживши ідеї робіт С. Н. Бернштейна і R. S. Varga стосовно найкращих поліноміальних наближень цілих трансцендентних функцій на відрізку $[-1, 1]$, A. R. Reddy отримав наступні результати.

Теорема A ([5]). *Нехай $g \in \mathbb{N}$ $(g > 2)$. Тоді співвідношення*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln^{[g-1]} n}{-\ln E_n(f)_C} = \tau,$$

де $0 < \tau < \infty$, є необхідним і достатнім для того, щоб $f(x)$ була звуженням на $[-1, 1]$ цілої трансцендентної функції $f(z)$ g-порядку зростання $\rho(g) = \tau$.

Теорема B ([5]). *Нехай f — дійсна неперервна на відрізку $[-1, 1]$*

функція. Тоді рівність

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln\big(-n^{-1}\cdot \ln E_n(f)_C\big)} = \delta,$$

де $0 \leqslant \delta < \infty$, *є необхідною і достатньою для того, щоб* $f(x)$ *була звуженням на* $[-1,1]$ *цілої трансцендентної функції* $f(z)$ *логарифмічного порядка* $\rho_l = 1+\delta$.

Теорема C ([5]). *Нехай* f *є дійсною неперервною на відрізку* $[-1,1]$ *функцією. Якщо* $f(x)$ *є звуженням на* $[-1,1]$ *цілої функції логарифмічного порядку* $\rho_l \in (1,\infty)$ *і логарифмічного типу* $\sigma_l \in (0,\infty)$, *то*

$$\frac{(\rho_l-1)^{\rho_l-1}}{\rho_l^{\rho_l}} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{\rho_l}}{\big(-\ln E_n(f)_C\big)^{\rho_l-1}} = \sigma_l.$$

2.2 Запропоновані М. М. Шереметою узагальнення класичних характеристик зростання цілих функцій суттєво збагатили шкалу зростання та дозволили в подальшому одержати змістовні результати з поліноміальної апроксимації цілих трансцендентних функцій в $C[-1,1]$ [32]. Для їх формулювання наведемо спочатку необхідні поняття та означення [27].

Символом L позначимо клас функцій h, які задовольняють наступні умови:

1) функція h, означена на напівсегменті $[a,\infty)$, є диференційовною, строго монотонно зростаючою і прямує до ∞ при $x\to\infty$;
2) $\lim_{x\to\infty} \frac{h((1+\gamma(x))x)}{h(x)} = 1$ для довільної функції γ такої, що $\gamma(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Під Λ розуміємо клас функцій h, які задовольняють умову 1) означення класу L і є повільно змінюючимися, тобто

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1$$

для довільного числа $c\in(0,\infty)$ (дивись, наприклад, [33]).

Очевидно, що $\Lambda \subset L$, причому $\Lambda \neq L$, оскільки, наприклад, $x^\nu \subset L$ $(\nu > 0)$, але $x^\nu \notin \Lambda$.

Нехай функція f є цілою трансцендентною, $\alpha\in\Lambda$ і $\beta\in L$. Тоді величину

$$\rho(f;\alpha,\beta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\alpha\big(\ln M(f,r)\big)}{\beta(\ln r)} \qquad (2.1)$$

будемо називати узагальненим (α, β)-порядком зростання функції f.

Наступне твердження є теоремою типу Адамара, в якій встановлено зв'язок між величиною $\rho(f; \alpha, \beta)$ та коефіцієнтами Тейлора $c_n(f)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ цілої функції f.

Теорема D ([27]). *Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) z^n$ є цілою трансцендентною функцією узагальненого $(\alpha, \beta)-$порядку зростання $\rho(f; \alpha, \beta)$, де $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in L$. Якщо для функції $F(x, c) \overset{\mathrm{df}}{=} \beta^{-1}\big(c \cdot \alpha(x)\big)$, де β^{-1} є функцією, оберненою до β, при будь-якому $c \in (0, \infty)$ та $x \to \infty$ виконано умову*

$$\frac{\mathrm{d}F(x, c)}{\mathrm{d} \ln x} = O(1), \tag{2.2}$$

то має місце рівність

$$\rho(f; \alpha, \beta) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\big(-n^{-1} \ln |c_n(f)|\big)}.$$

Зокрема, якщо у формулі (2.1) покласти $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = x$, то отримаємо звичайне означення порядку зростання ρ цілої функції f. Якщо ж $\alpha(x) = \ln^{[g-1]} x$, $(g = 3, 4, \dots)$, $\beta(x) = x$, то маємо означення g-порядку зростання $\rho(g)$ цілої функції f.

У роботі [32] S. M. Shah було розглянуто питання про найкращі поліноміальні наближення на відрізку $[-1, 1]$ цілих трансцендентних функцій узагальненого (α, β)–порядку зростання і отримано наступний результат.

Теорема E ([32]). *Нехай $f \in C([-1, 1])$ і виконано умову (1.1). Тоді $f(x)$ є звуженням на відрізок $[-1, 1]$ цілої трансцендентної функції $f(z)$. Якщо при цьому мають місце умови теореми D, то f має узагальнений (α, β)-порядок зростання, який виражається формулою*

$$\rho(f; \alpha, \beta) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\big(-n^{-1} \ln E_n(f)_C\big)}.$$

Дана теорема у якості частинних містить у собі достатні умови для наступних випадків, наведених у таблиці 3:

$\alpha(x)$	$\beta(x)$	Роботи
$\ln x$	x	Varga R. S. [8]
$\ln^{[g-1]} x (g = 3, 4, \dots)$	x	Reddy A. R. [5]

Таблиця 3.

У випадку, коли порядок зростання

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(f,r)}{\ln r}$$

дорівнює нулю, тобто для цілих функцій повільного зростання з метою отримання характеристик зростання $M(f,r)$ та спадання $\big|c_n(f)\big|$ М. М. Шеремета ввів наступні величини [28]:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(f) &= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\big(\ln\ln M(f,r)\big)}{\alpha(\ln\ln r)}, \\ \rho'_\alpha(f) &= \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\big(-n^{-1}\ln\big|c_n(f)\big|\big)\Big)}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

де $\alpha \in \Lambda$. Виключивши тривіальний випадок $f \not\equiv \mathrm{const}$, з [28] маємо $\rho_\alpha(f) \geqslant 1$.

Якщо $\alpha \in \Lambda$ і f — ціла трансцендентна функція, то величину $\rho_\alpha(f)$ будемо називати узагальненим α-порядком зростання функції f.

М. М. Шереметою було отримано наступну теорему типу Адамара.

Теорема F ([28]). *Нехай* $\mathcal{F}(x,c) \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha^{-1}\big(c\cdot\alpha(x)\big)$, *де* $\alpha \in \Lambda$, α^{-1} *є функцією оберненою до* α, *і для усіх* $c \in (0,\infty)$, *починаючи з деякого* $x = x_1$, *виконується співвідношення*

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}(x,c)}{\mathrm{d}x} \leqslant A\Big(\exp\big(\mathcal{F}(x,c)\big)\Big)^B, \tag{2.4}$$

де A, B — *постійні величини* $(0 < A, B < \infty)$. *Тоді для цілої трансцендентної функції* f *узагальненого* α*-порядку зростання* $\rho_\alpha(f)$ *має місце рівність*

$$\rho_\alpha(f) = \max\big(\rho'_\alpha(f), 1\big).$$

2.3 Розглянемо найкращі поліноміальні наближення цілих трансцендентних функцій в колі одиничного радіуса. Нехай H_q $(1 \leqslant q < \infty)$ — простір Харді аналітичних в колі $U \overset{\mathrm{df}}{=} \big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\big\}$ функцій f, для яких

$$\|f\|_{H_q} = \lim_{r\to 1-0} M_q(f,r) < \infty,$$

де

$$M_q(f,r) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|f\big(r\cdot\exp(it)\big)\Big|^q \,\mathrm{d}t\right\}^{1/q},$$

а H_q' ($1 \leqslant q < \infty$) — простір Бергмана аналітичних в U функцій f, які задовольняють умову

$$\|f\|_{H_q'} = \left\{ \frac{1}{\pi} \iint\limits_{U} \bigl|f(z)\bigr|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\}^{1/q} < \infty,$$

де $z = x + iy$. У випадку $q = \infty$ простори Харді і Бергмана співпадають і складаються з аналітичних в U функцій f, для яких

$$\|f\|_{H_\infty'} = \|f\|_{H_\infty} = \sup\Bigl\{\bigl|f(z)\bigr| : \ z \in U\Bigr\} < \infty.$$

Кажуть, що аналітична в U функція f належить простору $\mathfrak{B}(p,q,\lambda)$ ($0 < p < q \leq \infty;\ 0 < \lambda \leq \infty$), якщо

$$\|f\|_{p,q,\lambda} = \left\{ \int\limits_0^1 \bigl(1-r\bigr)^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^\lambda(f,r)\,\mathrm{d}r \right\}^{1/\lambda} < \infty \quad (0 < \lambda < \infty);$$

$$\|f\|_{p,q,\infty} = \sup\Bigl\{\bigl(1-r\bigr)^{1/p-1/q} \cdot M_q(f,r) : \ 0 < r < 1\Bigr\} < \infty.$$

При будь-яких $p > 0$ і $q, \lambda \geqslant 1$ $\mathfrak{B}(p,q,\lambda)$ є банаховим простором, а в інших випадках він є простором Фреше. Простори $\mathfrak{B}(p,q,\lambda)$, зокрема, вивчались М. І. Гварадзе у роботі [34].

Під символом X будемо розуміти будь-який з перерахованих у цьому пункті банахових просторів. Нехай $\mathcal{P}_n$ — підпростір алгебраїчних поліномів комплексної змінної степеня $\leqslant n$; $E(f,\mathcal{P}_n,X) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf\bigl\{\|f-p_n\|_X : \ p_n \in \mathcal{P}_n\bigr\}$ — найкраще наближення функції $f \in X$ елементами підпростору $\mathcal{P}_n$.

Сформулюємо у зручному для нас вигляді об'єднаний результат теорем 1 та 2 з роботи [18].

Теорема G ([18]). *Нехай X — будь-який з банахових просторів — H_q, H_q' або $\mathfrak{B}(p,q,\lambda)$ і виконано умову* (2.2) *теореми D. Тоді для функції $f \in X$ гранична рівність*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\bigl(-n^{-1}\ln E_n(f,\mathcal{P}_n,X)\bigr)} = \delta,$$

де δ — скінченне додатне число, є необхідною і достатньою умовою для того, щоб f була цілою трансцендентною функцією узагальненого (α,β)-порядку зростання $\rho(f;\alpha,\beta) = \delta$.

При певній конкретизації функцій $\alpha \in \Lambda$ та $\beta \in L$ дана теорема містить у собі деякі з відповідних результатів, отриманих у роботах, наведених у наступній таблиці 4. Зазначимо, що результат теореми G був розповсюджений на випадок скінченної однозв'язної області в роботі авторів [21].

$\alpha(x)$	$\beta(x)$	Простір	Роботи
$\ln x$	x	H_2'	Reddy A. R. [7]
$\ln x$	x	H_q' $(g \geqslant 1)$	Ібрагімов І. І., Шихалієв Н. І. [9]
$\ln^{[g]} x$ $(g > 2)$	x	H_q' $(q \geqslant 1)$	Вакарчук С. Б. [15]
$\ln^{[g]} x$ $(g \geqslant 2)$	x	H_q $(q \geqslant 1)$	Вакарчук С. Б. [15]
$\ln x$	x	$\mathfrak{B}(p, q, \lambda)$	Вакарчук С. Б. [14]

Таблиця 4.

Теорема H ([17]). *Нехай виконано умову* (2.4) *теореми* F *і* X — *будь-який з банахових просторів, зазначених у теоремі* G, *функція* $f \in X$. *Тоді гранична рівність*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\alpha\big(-n^{-1}\ln E_n(f, \mathcal{P}_n, X)\big)} = \mu,$$

де μ — *деяке скінченне невід'ємне число, є необхідною і достатньою умовою для того, щоб* f *була цілою трансцендентною функцією узагальненого* α*-порядку зростання* $\rho_\alpha(f) = \max(\mu, 1)$.

Слід зазначити, що теорема H не має жодних аналогів при будь-якій конкретизації функції $\alpha \in \Lambda$.

Основною метою даної статті є розповсюдження теореми H на випадок банахових просторів В. І. Смірнова $\mathcal{E}_p(G)$ $(p \geqslant 1)$ та банахових просторів $\mathcal{E}_p'(G)$ $(p \geqslant 1)$, де G — скінченна однозв'язна область комплексної площини з границею, що належить класу С. Я. Альпера [35].

3. Співвідношення типу Адамара для цілих трансцендентних функцій узагальненого α-порядку зростання

3.1 Нехай G — скінченна однозв'язна область комплексної площини $\mathbb{C}$, яка обмежена гладкою спрямлюваною жордановою кривою γ. Доповненям до $\overline{G} = G \cup \gamma$ є однозв'язна область Ω, яка містить точку $z = \infty$. При цьому $\gamma = \big\{z \in \mathbb{C} : z(s) = x(s) + iy(s),\ 0 \leqslant s \leqslant l, z(0) = z(l)\big\}$, де s — довжина дуги, яка відраховується від деякої фіксованої точки на кривій γ; l — довжина кривої γ. Через $\theta(s)$ позначимо кут між дотичною до кривої γ в точці $z(s)$ та додатним напрямом вісі OX, а через $\omega(\theta, t)$ $(t \geqslant 0)$ позначимо модуль неперервності функції θ. Покладають [35], що крива γ належить до класу $\mathcal{L}$, якщо для неї виконано умову

$$\int\limits_0^c \frac{\omega(\theta,t)}{t}\,|\ln t|\,\mathrm{d}t < \infty$$

де c — довільне додатнє число.

Нехай функція $\mathrm{w} = \Phi(z)$ відображає зовнішність замкненої кривої γ в площині Z на зовнішність одиничного кола $|\mathrm{w}| = 1$ в площині W так, що $\Phi(\infty) = \infty$ та $\Phi^{(1)}(\infty) = \delta > 0$. При цьому умова $\Phi(\infty) = \infty$ означає, що функція $\mathrm{w} = \Phi(z)$ точку $z = \infty$ переводить у точку $\mathrm{w} = \infty$, а умова $\Phi^{(1)}(\infty) = \delta > 0$ іноді записується у вигляді $\lim\big\{\Phi(z)/z : z \to \infty\big\} = \delta > 0$. В околі точки $z = \infty$ лоранівське розвинення функції Φ має вигляд

$$\Phi(z) = \delta z + \delta_0 + \frac{\delta_1}{z} + \cdots + \frac{\delta_k}{z^k} + \cdots . \tag{3.1}$$

Через γ_r $(r > 1)$ позначимо в площині Z лінію рівня функції Гріна області G, яка при відображенні $\mathrm{w} = \Phi(z)$ переходить в коло $|\mathrm{w}| = r$ в площині W. Оскільки відображення $\mathrm{w} = \Phi(z)$ конформне й однолисте, то при $r > 1$ лінія рівня γ_r є замкненою правильною аналітичною кривою. Довільна лінія рівня γ_r $(r > 1)$ визначає дві канонічні області: внутрішність G_r та зовнішність Ω_r. При цьому $\overline{G}_r = G_r \cup \gamma_r$.

Для цілої трансцендентної функції f позначимо

$$\widetilde{M}(f,r) \overset{\mathrm{df}}{=} \max\big\{|f(z)| :\, z \in \gamma_r\big\} \quad (r > 1).$$

Нехай $z = \Psi(\mathrm{w})$ — функція, обернена до функції $\mathrm{w} = \Phi(z)$. Ця функція відображає конформно й однолисто область $|\mathrm{w}| > 1$ на область Ω. Її розвинення в ряд Лорана в околі точки $\mathrm{w} = 0$ має вигляд

$$z = \Psi(\mathrm{w}) = \nu\mathrm{w} + \nu_0 + \frac{\nu_1}{\mathrm{w}} + \cdots + \frac{\nu_k}{\mathrm{w}^k} + \cdots \quad (|\mathrm{w}| > 1), \tag{3.2}$$

де $\nu = 1/\delta$. Використовуючи формули (3.1)–(3.2), наведене у п. 2.2 означення величини $\rho_\alpha(f)$ та покладаючи $z = \mathrm{w}\cdot\nu$; $R = |\mathrm{w}|\cdot\nu$, маємо

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\big(\ln\ln \widetilde{M}(f,r)\big)}{\alpha(\ln\ln r)} &= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\big(\ln\ln \max_{|\mathrm{w}|=r} \big|f\big(\Psi(\mathrm{w})\big)\big|\big)}{\alpha(\ln\ln r)} \\
&= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\big(\ln\ln \max_{|\mathrm{w}|=r} \big|f\big(\mathrm{w}\big(\nu + \frac{\nu_0}{\mathrm{w}} + \cdots + \frac{\nu_k}{\mathrm{w}^{k+1}} + \ldots\big)\big)\big|\big)}{\alpha(\ln\ln r)} \\
&= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\big(\ln\ln \max_{|z|=R} \big|f(z)\big|\big)}{\alpha(\ln\ln r)} \\
&= \varlimsup_{R\to\infty} \frac{\alpha\big(\ln\ln M(f,R)\big)}{\alpha(\ln\ln R)} = \rho_\alpha(f).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Нагадаємо, що n-й поліном Фабера F_n для області G є правильною частиною n-го ступіня розвинення функції Φ у ряд Лорана (3.1) в околі точки $z = \infty$.

Нам знадобиться наступна теорема.

Теорема I ([36, с. 135–136]). *Нехай F_n $(n \in \mathbb{Z}_+)$ — послідовність поліномів Фабера для однозв'язної області G. Якщо функція f регулярна в області G_r $(1 < r < \infty)$ і на лінії рівня γ_r має особливу точку, то:*

1) *функція f має розвинення у ряд по поліномах Фабера:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \cdot F_n(z), \tag{3.4}$$

де

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{f\big(\Psi(w)\big)}{w^{n+1}} \,\mathrm{d}w \quad (1 < R < r);$$

2) *при цьому*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \big|a_n(f)\big|^{1/n} = \frac{1}{r} \tag{3.5}$$

і ряд (3.4) є рівномірно збіжним всередині G_r і розбіжним зовні $\overline{G}_r$;

3) *і навпаки: якщо виконується умова (3.5), то ряд (3.4) є рівномірно збіжним всередині G_r і розбіжним зовні $\overline{G}_r$, а функція f, означена рівністю (3.4), є регулярною в G_r і на лінії рівня γ_r має особливу точку.*

Оскільки

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{\Phi^n(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\xi, \quad (z \in G_r,\ n \in \mathbb{Z}_+),$$

то

$$\big|F_n(z)\big| \leqslant c_1(r) \cdot r^n; \quad c_1(r) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{l(\gamma_r)}{2\pi d(\gamma, \gamma_r)} \quad (z \in \gamma_r), \tag{3.6}$$

де $l(\gamma_r)$ — довжина лінії рівня γ_r, $d(\gamma, \gamma_r)$ — відстань між межею γ області G і кривою γ_r $(r > 1)$.

3.2 Нехай

$$\widetilde{\rho'_\alpha}(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \overline{\lim_{n\to\infty}} \ \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\big(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|a_n(f)|}\big)\Big)}, \tag{3.7}$$

де $a_n(f)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ — коефіцієнти Фабера функції f.

Має місце наступна теорема, яка, в певному розумінні, є узагальненням теореми F на випадок розвинення цілої функції f у ряд Фабера у однозв'язній області G.

Теорема 3.1. *Нехай виконано умови теореми F і ціла трансцендентна функція f узагальненого α-порядку зростання $\rho_\alpha(f)$ розвинена у ряд Фабера у скінченній однозв'язній області G з гладкою границею γ з класу $\mathcal{L}$. Тоді має місце наступна рівність*

$$\rho_\alpha(f) = \max\big(\widetilde{\rho'_\alpha}(f), 1\big). \tag{3.8}$$

Доведення теореми 3.1 проведемо у два етапи.

Етап 1) Спочатку розглянемо випадок, коли $\widetilde{\rho'_\alpha}(f) > 1$. Згідно співвідношенню (3.3) для довільного $\varepsilon > 0$ існує дійсне число $r_0(\varepsilon) > 1$ таке, що для всіх дійсних $r > r_0(\varepsilon)$ має місце нерівність

$$\frac{\alpha\big(\ln\ln \widetilde{M}(f,r)\big)}{\alpha\big(\ln\ln r\big)} \leqslant \widehat{\rho} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \rho_\alpha(f) + \varepsilon.$$

Звідси одержимо

$$\widetilde{M}(f,r) \leqslant \exp\big(\exp\big(\alpha^{-1}\big(\widehat{\rho}\cdot\alpha\big(\ln\ln r\big)\big)\big)\big). \tag{3.9}$$

Згідно [37] для коефіцієнтів Фабера $a_n(f)$ $(n \in \mathbb{N})$ функції f одержимо

$$\big|a_n(f)\big| \leqslant \Big(\frac{\tau}{r}\Big)^n \cdot \widetilde{M}(f,r), \tag{3.10}$$

де τ — місткість множини G. З (3.9)–(3.10) маємо нерівність

$$\big|a_n(f)\big| \leqslant \big(\frac{\tau}{r}\big)^n \exp\big(\exp\big(\alpha^{-1}\big(\widehat{\rho}\cdot\alpha\big(\ln\ln r\big)\big)\big)\big), \tag{3.11}$$

яка виконується для довільних $r > r_0(\varepsilon)$.

Нехай

$$r(n) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \exp\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n, \frac{1}{\widehat{\rho}}\Big)\Big)\Big), \tag{3.12}$$

де $\mathcal{F}(x,c) = \alpha^{-1}(c\cdot\alpha(x))$. Оскільки α є строго монотонно зростаючою функцією з класу Λ, то з формули (3.12) витікає, що r монотонно зростає при збільшенні n. Тому існує $n_1 \in \mathbb{N}$, для якого $r(n_1) > r_0(\varepsilon)$ і для всіх $n > n_1$ $(n \in \mathbb{N})$ будемо мати $r(n) > r_0(\varepsilon)$.

При $n > n_1$ $(n \in \mathbb{N})$ підставивши (3.12) у (3.11) та врахувавши вид функції $\mathcal{F}$, одержимо

$$\big|a_n(f)\big| \leqslant \tau^n \cdot \exp\Big(-n\cdot\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n, \frac{1}{\widehat{\rho}}\Big)\Big)\Big)$$
$$\times\exp\Big(\exp\Big(\alpha^{-1}\Big(\widehat{\rho}\cdot\alpha\Big(\ln\Big(\ln\Big(\exp\Big(\exp\Big(\alpha^{-1}\Big(\frac{1}{\widehat{\rho}}\cdot\alpha\big(\ln n\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)$$
$$= \tau^n\cdot\exp\Big(n\Big(1-\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n, \frac{1}{\widehat{\rho}}\Big)\Big)\Big)\Big). \quad (3.13)$$

З (3.13) витікає наступна нерівність

$$\mathcal{F}\Big(\ln n, \frac{1}{\widehat{\rho}}\Big) \leqslant \ln\Big(\ln\Big(\frac{e\tau}{\sqrt[n]{|a_n(f)|}}\Big)\Big). \quad (3.14)$$

Враховуючи вид функції $\mathcal{F}$, з (3.14) маємо

$$\frac{\alpha\big(\ln n\big)}{\alpha\Big(\ln\Big(\ln\Big(e\tau\Big/\sqrt[n]{\big|a_n(f)\big|}\Big)\Big)\Big)} \leqslant \widehat{\rho}. \quad (3.15)$$

Здійснюючи в (3.15) граничний перехід при $n\to\infty$ і зважаючи на те, що $\alpha\in\Lambda$; $\varepsilon>0$ — довільне число, а $\widetilde{\rho}'_\alpha(f)$ визначається формулою (3.7), одержимо

$$\widetilde{\rho'_\alpha}(f) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\big(\ln\big(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|a_n(f)|}\big)\big)} \leqslant \rho_\alpha(f). \quad (3.16)$$

Отримаємо нерівність, протилежну (3.16). Згідно з формулою (3.7) для довільного $\varepsilon>0$ існує таке натуральне число $n_2(\varepsilon)$, що для будь-яких $n>n_2(\varepsilon)$ $(n\in\mathbb{N})$ має місце нерівність

$$\frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\big(\ln\big(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|a_n(f)|}\big)\big)} \leqslant \overline{\rho} \stackrel{\text{df}}{=} \widetilde{\rho'_\alpha}(f)+\varepsilon.$$

Звідси для всіх $n>n_2(\varepsilon)$ отримаємо

$$\big|a_n(f)\big| \leqslant \Big(\exp\Big(\exp\Big(\alpha^{-1}\Big(\frac{1}{\overline{\rho}}\cdot\alpha\big(\ln n\big)\Big)\Big)\Big)\Big)^{-n}. \quad (3.17)$$

Помножимо обидві частини нерівності (3.17) на r^n та піднесемо їх у степінь $1/n$. В результаті цього маємо

$$\sqrt[n]{r^n\cdot\big|a_n(f)\big|} \leqslant r\cdot\exp\Big(\exp\Big(\alpha^{-1}\Big(\frac{1}{\overline{\rho}}\cdot\alpha(\ln n)\Big)\Big)\Big)^{-1}. \quad (3.18)$$

Позначимо

$$n(r) \stackrel{\text{df}}{=} \Big[\!\Big[\exp\big(\alpha^{-1}\big(\overline{\rho}\cdot\alpha(\ln\ln 2r)\big)\big)\Big]\!\Big]+1$$

$$= \Big[\!\!\Big[\exp \mathcal{F}\big(\ln\ln 2r, \overline{\rho}\big) \Big]\!\!\Big] + 1, \quad (3.19)$$

де $[\![a]\!]$ — ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$. Значення r обираємо таким, щоб $n(r) \geqslant n_2(\varepsilon)$. Використовуючи (3.19), неважко бачити, що для будь-якого натурального числа $n > n(r)$ виконується нерівність

$$r \cdot \exp\Big(\exp\Big(\alpha^{-1}\Big(\frac{1}{\rho} \cdot \alpha(\ln n)\Big)\Big)\Big)^{-1} \leqslant \frac{1}{2}. \quad (3.20)$$

З урахуванням формул (3.18)–(3.20) маємо

$$\sum_{n=n(r)+1}^{\infty} r^n \cdot \big|a_n(f)\big| \leqslant \sum_{n=n(r)+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant 1. \quad (3.21)$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{r^x}{\big(\exp\big(\exp\big(\mathcal{F}\big(\ln x, \frac{1}{\rho}\big)\big)\big)\big)^x}. \quad (3.22)$$

Прологарифмувавши обидві частини співвідношення (3.22), обчислимо логарифмічну похідну. В результаті зазначеного отримаємо

$$\frac{\varphi^{(1)}(x)}{\varphi(x)} = \ln r - \Big(1 + \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}\big(\ln x, \frac{1}{\rho}\big)}{\mathrm{d}\ln x}\Big) \cdot \exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln x, \frac{1}{\rho}\Big)\Big), \quad (3.23)$$

де $x \geqslant \exp(x_1)$.

Покладаємо

$$\begin{aligned} n_0 &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\big(n_2(\varepsilon), [\![\exp(x_1)]\!] + 1\big) \\ r(x) &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \exp\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln x, \frac{1}{\rho}\Big)\Big) \\ &\qquad + (A+1)\exp\Big((B+1)\cdot\mathcal{F}\Big(\ln x, \frac{1}{\rho}\Big)\Big)\Big). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Вважаючи $x = \ln v$ $(v > 0)$, обчислимо похідну першого порядку складної функції $F(x, c)$ $(0 < c < \infty)$ по v

$$\frac{\mathrm{d}F(x,c)}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}F(x,c)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}F(x,c)}{\mathrm{d}x}.$$

Звідси маємо

$$\frac{\mathrm{d}F(x,c)}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}F(x,c)}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}F(\ln v,c)}{\mathrm{d}\ln v}.$$

З урахуванням (2.4) і останньої рівності одержимо наступне співвідношення

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{d}F(\ln v, c)}{\mathrm{d}\ln v} \leqslant A\exp(B\mathcal{F}(\ln v, c)),$$

яке виконується для всіх v, починаючи з $v_1 = \exp(x_1)$.

Для кожного $r > r(n_0)$ з урахуванням цієї нерівності та співвідношень (3.23)–(3.24) маємо

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{(1)}(n_0)}{\varphi(n_0)} &\geqslant \ln r - \exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n_0, \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big) \\ &\qquad - (A+1)\exp\Big(B\cdot\mathcal{F}\Big(\ln n_0, \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big)\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n_0, \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big) \\ &= \ln r - \exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n_0, \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big) - (A+1)\exp\Big((B+1)\cdot\mathcal{F}\Big(\ln n_0, \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big) \\ &= \ln r - \ln r(n_0) = \ln\frac{r}{r(n_0)} > 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Враховуючи вид функції $\mathcal{F}$ та належність функції α до класу Λ, з (2.4), (3.23), (3.19) при $r > r(n_0)$ одержимо

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{(1)}\big(n(r)\big)}{\varphi\big(n(r)\big)} &\leqslant \ln r - \exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n(r), \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big) \\ &\leqslant \ln r - \exp\Big(\alpha^{-1}\Big(\frac{1}{\overline{\rho}}\cdot\alpha\big(\ln\big(\exp\big(\alpha^{-1}\big(\overline{\rho}\alpha\big(\ln(\ln 2r)\big)\big)\big)\big)\big)\Big)\Big) \\ &= \ln r - \ln 2r = -\ln 2 < 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Оскільки, як витікає з формул (3.24) та (3.19), справедлива нерівність $n\big(r(n_0)\big) > n_0$, то очевидно, що $n(r) > n_0$, коли $r > r(n_0)$.

Оскільки, як витікає з (3.25)–(3.26), похідна першого порядку $\varphi^{(1)}$ на кінцях відрізку $\big[n_0, n(r)\big]$ $(r > r(n_0))$ приймає значення різних знаків, змінюючи додатні значення на від'ємні, то існує деяка точка $x^*(r) \in \big[n_0, n(r)\big]$, для якої

$$\varphi\big(x^*(r)\big) = \max_{n_0 \leqslant x \leqslant n(r)} \varphi(x). \tag{3.27}$$

Згідно з (3.23) для $x^*(r)$ має місце наступне співвідношення

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi^{(1)}\big(x^*(r)\big)}{\varphi\big(x^*(r)\big)} \\ &= \ln r - \left(1 + \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}\big(\ln x, \frac{1}{\overline{\rho}}\big)}{\mathrm{d}\ln x}\bigg|_{x=x^*(r)}\right)\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln x^*(r), \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big) = 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

де $\varphi\big(x^*(r)\big) > 0$. З наведених вище розмірковувань витікає, що

$$0 \leqslant \Delta^*(r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}\big(\ln x, \frac{1}{\rho}\big)}{\mathrm{d}\ln x}\right|_{x=x^*(r)} \leqslant A \cdot \exp\left(B \cdot \mathcal{F}\Big(\ln x^*(r), \frac{1}{\rho}\Big)\right), \quad (3.29)$$

оскільки $x^*(r) \geqslant n_0$. Нехай

$$\widetilde{A(r)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\Delta^*(r)}{\exp\big(B \cdot \mathcal{F}\big(\ln x^*(r), \frac{1}{\rho}\big)\big)}. \quad (3.30)$$

З огляду на (3.29) очевидно, що величина (3.30) задовольняє нерівність

$$0 \leqslant \widetilde{A(r)} \leqslant A. \quad (3.31)$$

З урахуванням (3.30) співвідношення (3.28) перепишемо у наступному вигляді

$$\ln r - \left(1 + \widetilde{A(r)} \cdot \exp\left(B \cdot \mathcal{F}\Big(\ln x^*(r), \frac{1}{\rho}\Big)\right)\right) \times \exp\left(\mathcal{F}\Big(\ln x^*(r), \frac{1}{\rho}\Big)\right) = 0. \quad (3.32)$$

Нехай $C([a,b])$ — простір неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій φ з нормою $\|\varphi\|_{C[a,b]} = \max\big\{|\varphi(x)| \,:\, a \leqslant x \leqslant b\big\}$. Якщо $\psi \in C([a,b])$ і величини η та μ мають однакові знаки, то

$$\eta \cdot \psi(a) + \mu \cdot \psi(b) = (\eta + \mu) \cdot \psi(\xi), \quad (3.33)$$

де $a \leqslant \xi \leqslant b$. Дійсно, якщо $\psi(a) = \psi(b)$, то зазначене очевидне. Якщо ж $\psi(a) \neq \psi(b)$, то функція

$$\gamma^*(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \eta \cdot \psi(a) + \mu \cdot \psi(b) - (\eta + \mu)\psi(x)$$

приймає на кінцях відрізка $[a,b]$ значення різних знаків. Отже, існує деяка точка $\xi \in [a,b]$, в якій $\gamma^*(\xi) = 0$. З врахуванням співвідношення (3.33) маємо

$$1 \cdot \exp(0) + \widetilde{A(r)} \cdot \exp\left(B \cdot \mathcal{F}\Big(\ln x^*(r), \frac{1}{\rho}\Big)\right) = \big(1 + \widetilde{A(r)}\big) \cdot \exp\big(\xi(r)\big), \quad (3.34)$$

де $0 \leqslant \xi(r) \leqslant B \cdot \mathcal{F}\big(\ln x^*(r), \frac{1}{\overline{\rho}}\big)$. Позначимо

$$\widetilde{B(r)} \overset{\text{df}}{=} \frac{\xi(r)}{\mathcal{F}\big(\ln x^*(r), \frac{1}{\overline{\rho}}\big)}. \tag{3.35}$$

Очевидно, що

$$0 \leqslant \widetilde{B(r)} \leqslant B. \tag{3.36}$$

Нехай

$$A^*(r) \overset{\text{df}}{=} 1 + \widetilde{A(r)}; \quad B^*(r) \overset{\text{df}}{=} 1 + \widetilde{B(r)}. \tag{3.37}$$

З врахуванням формул (3.31) і (3.36) для (3.37) маємо

$$1 \leqslant A^*(r) \leqslant 1 + A; \quad 1 \leqslant B^*(r) \leqslant 1 + B. \tag{3.38}$$

В силу співвідношень (3.34)–(3.35) та (3.37) рівність (3.32) перепишемо у наступному вигляді:

$$\ln r - A^*(r) \exp\Big(B^*(r) \cdot \mathcal{F}\Big(\ln x^*(r), \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big) = 0. \tag{3.39}$$

Залежні від r величини $A^*(r)$ та $B^*(r)$ змінюються в межах, зазначених формулою (3.38). З (3.39), враховуючи вид функції $\mathcal{F}$, одержимо

$$\begin{aligned} x^*(r) &= \exp\Big(\alpha^{-1}\Big(\overline{\rho}\Big(\alpha\Big(\frac{1}{B^*(r)} \ln\Big(\frac{\ln r}{A^*(r)}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(\mathcal{F}\Big(\frac{1}{B^*(r)} \ln\Big(\frac{\ln r}{A^*(r)}\Big), \overline{\rho}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Співставивши формули (3.19) та (3.40) можна переконатися в тому, що

$$x^*(r) < n(r). \tag{3.41}$$

З іншого боку, враховуючи, що $r > r(n_0)$, з (3.40) маємо

$$x^*(r) \geqslant x^*\big(r(n_0)\big) = \exp\Big(\mathcal{F}\Big(\frac{1}{B^*\big(r(n_0)\big)} \ln\Big(\frac{\ln r(n_0)}{A^*\big(r(n_0)\big)}\Big), \overline{\rho}\Big)\Big). \tag{3.42}$$

Оскільки, як витікає з формули (3.24),

$$r(n_0) > \exp\Big((A+1) \cdot \exp\Big((B+1) \cdot \mathcal{F}\Big(\ln n_0, \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big)\Big),$$

то на підставі (3.42), (3.40) і останньої нерівності отримаємо

$$x^*(r(n_0)) > \exp\Big(\mathcal{F}\Big(\frac{1}{B^*(r(n_0))} \cdot \ln\Big(\frac{A+1}{A^*\big(r(n_0)\big)}$$

$$\times \exp\Big(\big((B+1)\cdot \mathcal{F}\Big(\ln n_0, \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big)\Big), \overline{\rho}\Big) \quad (3.43)$$

З огляду на співвідношення (3.38), з (3.43) одержимо

$$x^*\big(r(n_0)\big) > \exp\Big(\mathcal{F}\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n_0, \frac{1}{\overline{\rho}}\Big), \overline{\rho}\Big)\Big)$$
$$= \exp\Big(\alpha^{-1}\Big(\overline{\rho}\Big(\alpha\Big(\alpha^{-1}\Big(\frac{1}{\overline{\rho}}\big(\alpha(\ln n_0)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) = n_0. \quad (3.44)$$

Таким чином, єдиний корінь $x^*(r)$ рівняння (3.28), як витікає з формул (3.41)–(3.44), дійсно задовольняє нерівність $n_0 < x^*(r) < n(r)$ і похідна $\varphi^{(1)}$ на відрізку $\big[n_0, n(r)\big]$ в точці $x^*(r)$ змінює свій знак з додатнього на від'ємний.

З формул (3.22), (3.38) та (3.40) отримаємо

$$\varphi(x^*(r)) = r^{x^*(r)}\Big(\exp\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln x^*(r), \frac{1}{\overline{\rho}}\Big)\Big)\Big)\Big)^{-x^*(r)}$$
$$= \exp\Big(x^*(r)\cdot \ln r\Big)\cdot\Big(\exp\Big(\frac{\ln r}{A^*(r)}\Big)^{1/B^*(r)}\Big)^{-x^*(r)}$$
$$= \exp\Big(x^*(r)\cdot \ln r - x^*(r)\Big(\frac{\ln r}{A^*(r)}\Big)^{1/B^*(r)}\Big)$$
$$= \exp\Big(x^*(r)\cdot \ln r\Big(1 - \frac{1}{\big(A^*(r)\big)^{1/B^*(r)}\big(\ln r\big)^{1-1/B^*(r)}}\Big)\Big)$$
$$\leqslant \exp\big(x^*(r)\cdot \ln r\big), \quad (3.45)$$

де, в силу (3.24), $r > r(n_0) > e$. Використовуючи співвідношення (3.17), (3.22), (3.27) та (3.45), маємо

$$\max_{n_0\leqslant n\leqslant n(r)} \big|a_n(f)\big|\cdot r^n \leqslant \varphi\big(x^*(r)\big) \leqslant \exp\big(x^*(r)\ln r\big)\ . \quad (3.46)$$

Для оцінки зверху величини $\widetilde{M}(f,r)$ застосуємо метод Віммана–Валірона. В області G_r функцію f представимо у вигляді

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) F_n(z),$$

де F_n $(n \in \mathbb{Z}_+)$ — поліном Фабера n-го порядку. При цьому, згідно (3.6), $\big|F_n(z)\big| \leqslant c_1(r)\cdot r^n$ $(z \in \gamma_r)$. Таким чином, для $r > r(n_0)$

$$\widetilde{M}(f,r) = \max_{z\in\gamma_r}|f(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\big|a_n(f)\big|\cdot\max_{z\in\gamma_r}\big|F_n(z)\big| \leqslant c_1(r)\sum_{n=0}^{\infty}\big|a_n(f)\big|\cdot r^n$$

$$\leqslant c_1(r)\Big(\sum_{n=0}^{n_0}\big|a_n(f)\big|r^n+\sum_{n=n_0+1}^{n(r)}\big|a_n(f)\big|r^n+\sum_{n=n(r)+1}^{\infty}\big|a_n(f)\big|r^n\Big). \tag{3.47}$$

В силу співвідношень (3.21), (3.46)–(3.47) маємо

$$\widetilde{M}(f,r)\leqslant c_1(r)\Big(O\big(r^{n_0}\big)+n(r)\cdot\exp\big(x^*(r)\ln r\big)+1\Big). \tag{3.48}$$

Покажемо, що величина $c_1(r)$ обмежена зверху деякою константою, яка не залежить від r. Для цього нам знадобиться теорема, одержана В. К. Дзядиком.

Теорема J ([38]). *Якщо границя γ замкненої обмеженої області $\overline{G}$ з однозв'язним доповненням складається з скінченного числа кривих Ляпунова (або навіть кривих з класу $\mathcal{L}$) або ж з скінченної кількості кривих з неперервною кривизною, що утворюють в точках стику z_j кути $\alpha_j\pi$ $(0\leqslant\alpha_j<2)$, то при всіх $z\in\gamma$ і $r>1$ справедливе співвідношення*

$$d_r(z)\asymp(r-1)\Big(|z-z_j|+(r-1)^{2-\alpha_j}\Big)^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}, \tag{3.49}$$

де "$\asymp$" — відношення слабкої еквівалентності, $d_r(z)$ — відстань від точки $z\in\gamma$ до лінії рівня γ_r; z_j — найближча до $z\in\gamma$ точка стику на кривій γ.

В нашому випадку межа γ є гладкою кривою. Оскільки на кривій γ точки стику z_j відсутні $(\alpha_j=1)$, то з формули (3.49) маємо

$$d_r(z)\asymp(r-1). \tag{3.50}$$

Згідно співвідношенню (3.50) відстань $d(\gamma,\gamma_r)$ між кривими γ і γ_r має наступний вигляд

$$d(\gamma,\gamma_r)\asymp(r-1). \tag{3.51}$$

Довжину лінії рівня γ_r можна обчислити за формулою

$$l(\gamma_r)=\int\limits_{\gamma_r}|\,\mathrm{d}z|=\int\limits_{|\mathrm{w}|=r}\big|\Psi^{(1)}(\mathrm{w})\big|\,|\,\mathrm{dw}|. \tag{3.52}$$

Відомо (дивись, наприклад, [37]), що коли крива γ належить до класу $\mathcal{L}$, то похідна $\Psi^{(1)}$ неперервна й відмінна від нуля в замкненій області $|\mathrm{w}|\geqslant 1$. Також існують дві такі додатні сталі c_* і c^*, що має місце нерівність

$$0<c_*\leqslant\big|\Psi^{(1)}(\mathrm{w})\big|\leqslant c^*<\infty,\quad(|\mathrm{w}|\geqslant 1). \tag{3.53}$$

Використовуючи формулу (3.53), з (3.52) маємо

$$l(\gamma_r) \leqslant \sup_{|\mathrm{w}|\geqslant 1} \left|\Psi^{(1)}(\mathrm{w})\right| \cdot \int\limits_{|\mathrm{w}|=r} |\,\mathrm{dw}| \leqslant \widetilde{c} \cdot r, \tag{3.54}$$

де $\widetilde{c}$ — абсолютна стала.

На підставі (3.51), (3.54) і (3.6) при всіх $r > r(n_0)$ одержимо

$$c_1(r) < k^*, \tag{3.55}$$

де k^* — абсолютна стала ($k^* > 1$).

З урахуванням співвідношень (3.19), (3.40) та (3.55) з нерівності (3.48) отримаємо

$$\widetilde{M}(f,r) \leqslant k^* \cdot \Big(O\big(r^{n_0}\big) + \Big(\exp\Big(\mathcal{F}\big(\ln\ln 2r, \overline{\rho}\big)\Big) + 1\Big) \\ \times \exp\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\frac{1}{B^*(r)}\ln\Big(\frac{\ln r}{A^*(r)}\Big), \overline{\rho}\Big) + \ln\ln r\Big)\Big)\Big). \tag{3.56}$$

З (3.38) та (3.56) маємо

$$\widetilde{M}(f,r) \cdot \big(1 + o(1)\big) \\ \leqslant \exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln\ln 2r, \overline{\rho}\Big)\Big) \times \exp\Big(\exp\Big(\ln k^* + \mathcal{F}\big(\ln\ln r, \overline{\rho}\big) + \ln\ln r\Big)\Big) \\ \leqslant \exp\Big(\exp\Big(\big(k^* + o(1)\big)\Big(\mathcal{F}\big(\ln\ln r, \overline{\rho}\big) + \ln\ln r\Big)\Big)\Big). \tag{3.57}$$

Прологарифмувавши двічі ліву та праву частини нерівності (3.57), запишемо

$$\frac{\ln\ln\Big(\widetilde{M}(f,r)\cdot\big(1+o(1)\big)\Big)}{\big(k^*+o(1)\big)\cdot\Big(1+\dfrac{\ln\ln r}{\mathcal{F}\big(\ln\ln r,\overline{\rho}\big)}\Big)} \leqslant \mathcal{F}\big(\ln\ln r, \overline{\rho}\big). \tag{3.58}$$

Враховуючи вид функції $\mathcal{F}$, перепишемо нерівність (3.58) у наступному вигляді:

$$\alpha\left(\frac{\ln\ln\Big(\widetilde{M}(f,r)\cdot\big(1+o(1)\big)\Big)}{\big(k^*+o(1)\big)\cdot\Big(1+\dfrac{\ln\ln r}{\mathcal{F}(\ln\ln r,\overline{\rho})}\Big)}\right)\Big/\alpha(\ln\ln r) \leqslant \overline{\rho} = \widetilde{\rho'_\alpha}(f) + \varepsilon, \tag{3.59}$$

де $r > r(n_0)$. Далі нам знадобиться один факт з роботи [28], повне і дещо модифіковане доведення якого наведене нижче.

Твердження 3.1. *Нехай функція* α *належить до класу* Λ. *Якщо* $1 < c < \infty$, *то при* $x \to \infty$ *буде* $x = o\big(\mathcal{F}(x,c)\big)$. *Коли ж* $0 < c < 1$, *то при* $x \to \infty$ *маємо* $\mathcal{F}(x,c) = o(x)$.

Доведення. Оскільки $\alpha \in \Lambda$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується гранична рівність

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\varepsilon x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З означення границі функції витікає, що існує таке число $x_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, що для всіх $x > x_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\Big|\frac{\alpha(\varepsilon x)}{\alpha(x)} - 1\Big| < \varepsilon$$

або

$$1 - \varepsilon < \frac{\alpha(\varepsilon x)}{\alpha(x)} < 1 + \varepsilon. \tag{3.60}$$

Нехай маємо $0 < c < 1$. Очевидно, що можна підібрати таке $\widetilde{\varepsilon} > 0$, для якого $c < 1 - \widetilde{\varepsilon}$. З огляду на (3.60) запишемо

$$c < \frac{\alpha(\widetilde{\varepsilon} x)}{\alpha(x)}, \tag{3.61}$$

де $x > x_0(\widetilde{\varepsilon})$. З (3.61) маємо

$$\alpha^{-1}\big(c\alpha(x)\big) < \widetilde{\varepsilon} x. \tag{3.62}$$

Нерівність (3.62) буде виконуватись і для довільного $0 < \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}$ при всіх $x > x_0(\varepsilon)$. Враховуючи вид функції $\mathcal{F}$, з (3.62) одержимо

$$0 < \frac{\mathcal{F}(x,c)}{x} < \varepsilon.$$

Використовуючи означення границі функції, запишемо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathcal{F}(x,c)}{x} = 0,$$

або $\mathcal{F}(x,c) = o(x)$ при $x \to \infty$.

Нехай $1 < c < \infty$. Оскільки $\alpha \in \Lambda$, то для довільного скінченного числа $\varepsilon > 0$ маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x/\varepsilon)}{\alpha(x)} = 1.$$

Виходячи з означення границі неперервної функції, для $\varepsilon > 0$ існує деяке число $x_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ таке, що для всіх $x > x_1(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\Big|\frac{\alpha(x/\varepsilon)}{\alpha(x)} - 1\Big| < \varepsilon,$$

або

$$1-\varepsilon < \frac{\alpha(x/\varepsilon)}{\alpha(x)} < 1+\varepsilon. \tag{3.63}$$

Можна підібрати таке число $\widetilde{\varepsilon} > 0$, що $1+\widetilde{\varepsilon} < c$. З урахуванням зазначеного факту і нерівності (3.63) запишемо

$$\frac{\alpha(x/\widetilde{\varepsilon})}{\alpha(x)} < c;$$

для довільного $x > x_1(\widetilde{\varepsilon}),\ x_1(\widetilde{\varepsilon}) \in \mathbb{R}$, або

$$0 < \frac{x}{\alpha^{-1}\big(c\alpha(x)\big)} < \widetilde{\varepsilon}. \tag{3.64}$$

Враховуючи вид функції $\mathcal{F}$ та (3.64), зазначимо, що нерівність

$$0 < \frac{x}{\mathcal{F}(x,c)} < \varepsilon$$

буде виконуватись і для будь-якого $0 < \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}$ при всіх $x > x_1(\varepsilon)$. Використовуючи означення границі функції, маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\mathcal{F}(x,c)} = 0,$$

тобто $x = o\big(\mathcal{F}(x,c)\big)$ при $x \to \infty$. Твердження 3.1 доведено. □

Продовжимо доведення теореми 3.1. Оскільки $\overline{\rho} > 1$, то з твердження 3.1 витікає співвідношення

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln r}{\mathcal{F}(\ln\ln r, \overline{\rho})} = 0. \tag{3.65}$$

Враховуючи, що α є функцією повільно змінюючоюся, а також використовуючи формулу (3.65) і довільність вибору числа $\varepsilon > 0$, з (3.59) та (3.3) отримаємо

$$\rho_\alpha(f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\big(\ln\ln \widetilde{M}(f,r)\big)}{\alpha(\ln\ln r)} \leqslant \widetilde{\rho'_\alpha}(f). \tag{3.66}$$

Співставивши нерівність (3.16) з нерівністю (3.66), маємо

$$\rho_\alpha(f) = \widetilde{\rho'_\alpha}(f). \tag{3.67}$$

Перейдемо до етапу 2) доведення теореми.

Нехай тепер $\widetilde{\rho'_\alpha}(f) < 1$. З формули (3.57) отримаємо для $r > r(n_0)$ наступну нерівність

$$\frac{\ln\ln\big(\widetilde{M}(f,r)\cdot\big(1+o(1)\big)\big)}{\big(k^*+o(1)\big)} \leqslant \Big(1+\frac{\mathcal{F}(\ln\ln r,\overline{\rho})}{\ln\ln r}\Big)\cdot\ln\ln r, \tag{3.68}$$

де $\overline{\rho} = \widetilde{\rho'_\alpha}(f)+\varepsilon < 1$; $\varepsilon \in \big(0,\, 1-\widetilde{\rho'_\alpha}(f)\big)$ — довільне число. З нерівності (3.68) маємо

$$\alpha\left(\frac{\ln\ln\Big(\widetilde{M}(f,r)\cdot\big(1+o(1)\big)\Big)}{\big(k^*+o(1)\big)\cdot\Big(1+\dfrac{\mathcal{F}(\ln\ln r,\overline{\rho})}{\ln\ln r}\Big)}\right)\Bigg/\alpha(\ln\ln r) \leqslant 1. \tag{3.69}$$

Оскільки $0 < \overline{\rho} < 1$, то згідно твердженню 1 одержимо

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mathcal{F}(\ln\ln r,\overline{\rho})}{\ln\ln r} = 0. \tag{3.70}$$

На підставі того, що $\alpha \in \Lambda$ та за допомогою формул (3.69)–(3.70) та (3.3) отримаємо $\rho_\alpha(f) \leqslant 1$. Оскільки, як було зазначено у пункті 2.2, $\rho_\alpha(f) \geqslant 1$, то у досліджуваному нами випадку

$$\rho_\alpha(f) = 1. \tag{3.71}$$

З урахуванням отриманих співвідношень (3.67) та (3.71) запишемо

$$\rho_\alpha(f) = \max\big(1, \widetilde{\rho'_\alpha}(f)\big),$$

чим і завершимо доведення теореми 3.1. □

4. Допоміжна лема, пов'язана з поліноміальною апроксимацією цілих трансцендентних функцій

Нехай G — скінченна однозв'язна область комплексної площини $\mathbb{C}$, обмежена жордановою спрямлюваною кривою γ. Через $z = \Psi_0(\mathrm{w})$ позначимо конформне і однолисте відображення кола $|\mathrm{w}| < 1$ з площини $\mathbb{W}$ на область G за умови $\Psi_0(0) = z_0$, $\Psi_0^{(1)}(0) > 0$, де z_0 — деяка фіксована точка в G. Символом $\widetilde{\gamma}_r$ $(0 < r < 1)$ позначимо лінію рівня в області G, в яку переходить коло $|\mathrm{w}| = r$ при відображенні $z = \Psi_0(\mathrm{w})$. Якщо для функції f, аналітичної в області G, при будь-яких $r \in (0,1)$ виконано нерівність

$$\bigg(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_r}\big|f(z)\big|^p|\,\mathrm{d}z|\bigg)^{1/p} < K \quad (0 < p < \infty),$$

де $K > 0$ — деяка стала, яка не залежить від r, то кажуть, що f належить до простору В. І. Смірнова $\mathcal{E}_p(G)$ [37]. При $p \geqslant 1$ простір $\mathcal{E}_p(G)$ є банаховим з нормою

$$\|f\|_{\mathcal{E}_p(G)} = \left(\int\limits_{\gamma} \left|f(z)\right|^p |\,\mathrm{d}z| \right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

де $f(z)$ $(z \in \gamma)$ є кутовими граничними значеннями функції f, які існують майже всюди на кривій γ.

Аналітична в області G функція f належить простору $\mathcal{E}'_p(G)$ $(0 < p < \infty)$, якщо

$$\|f\|_{\mathcal{E}'_p(G)} = \left\{ \iint\limits_{G} |f(z)|^p \,\mathrm{d}\sigma_z \right\}^{1/p} < \infty,$$

де $z = x + iy$; $\mathrm{d}\sigma_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. При $p \geqslant 1$ простір $\mathcal{E}_p(G)$ є банаховим. У випадку $p = \infty$ простори $\mathcal{E}'_p(G)$ та $\mathcal{E}_p(G)$ співпадають і складаються з аналітичних в G функцій f, для яких

$$\|f\|_{\mathcal{E}'_\infty(G)} = \|f\|_{\mathcal{E}_\infty(G)} = \sup\{|f(z)| : z \in G\} < \infty.$$

Нехай X — один з банахових просторів, розглянутих у цьому розділі, а $E(f, \mathcal{P}_n, X)$ — величина найкращого поліноміального наближення функції $f \in X$ в метриці простору X елементами підпростору $\mathcal{P}_n$, який складається з алгебраїчних поліномів комплексної змінної степеня, не перевищуючого n. В подальшому нам знадобиться наступне твердження.

Лема 4.1. *Нехай f — ціла трансцендентна функція. Тоді існує деяке скінченне додатне число $C_{f,X}$, яке залежить від f та X, таке, що для будь-якого натурального числа n має місце співвідношення*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E(f, \mathcal{P}_\nu, X)}{E(f, \mathcal{P}_n, X)} \leqslant C_{f,X}. \tag{4.1}$$

Доведення проведемо у два етапи. Розглянемо перший з них.

Як розповсюдження одного результату С. Н. Бернштейна (1.1) на скінченну однозв'язну область, в роботах [15, 16] було показано, що умова

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E(f, \mathcal{P}_n, X)} = 0 \tag{4.2}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб функція $f \in X$ була цілою. Використовуючи означення границі числової послідовності, маємо наступне: для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $n(\varepsilon)$, що для будь-якого $n > n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$ виконується нерівність

$$E(f, \mathcal{P}_n, X) < \varepsilon^n.$$

З властивостей найкращого поліноміального наближення функції відомо, що

$$E(f, \mathcal{P}_1, X) \geqslant E(f, \mathcal{P}_2, X) \geqslant \cdots \geqslant E(f, \mathcal{P}_j, X) \geqslant \cdots . \tag{4.3}$$

При цьому

$$\lim_{n\to\infty} E(f, \mathcal{P}_n, X) = 0. \tag{4.4}$$

Зафіксуємо довільну нескінченну числову послідовність $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для якої виконуються наступні умови:

$$1)\ \ 1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_k > \cdots > \varepsilon_{k+j} > \cdots > 0 \quad (j \in \mathbb{N}), \tag{4.5}$$

$$2)\ \ \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0. \tag{4.6}$$

З вище наведеного витікає, що для довільного числа ε_k з зазначеної послідовності існує деяке натуральне число n_{ε_k} таке, що для будь-якого $n > n_{\varepsilon_k}$ $(n \in \mathbb{N})$ виконується нерівність

$$E^{1/n}(f, \mathcal{P}_n, X) \leqslant \varepsilon_k. \tag{4.7}$$

Зафіксуємо послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для яких

$$\max_{n>n_{\varepsilon_k}} E^{1/n}(f, \mathcal{P}_n, X) = E^{1/(n_k+1)}(f, \mathcal{P}_{n_k+1}, X). \tag{4.8}$$

З співвідношень (4.3)–(4.7) витікає, що $\lim_{k\to\infty} n_{\varepsilon_k} = \infty$, а значить і

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty. \tag{4.9}$$

Очевидно, що кожній послідовності $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, яка задовольняє умови (4.5)–(4.6), відповідає певна послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, яка означена формулою (4.8). Множину всіх таких послідовностей $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ позначимо символом $\mathcal{E}$, а множину всіх відповідних послідовностей $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ позначимо символом $\mathcal{N}$. З співвідношення (4.9) витікає, що множина $\mathcal{N}$ є необмеженою.

З формул (4.7)–(4.8) для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$E^{1/(n_k+1)}(f, \mathcal{P}_{n_k+1}, X) < \varepsilon_k. \tag{4.10}$$

З рівності (4.8) для довільного $j \in \mathbb{N}$ одержимо

$$E^{1/(n_k+j)}(f, \mathcal{P}_{n_k+j}, X) \leqslant E^{1/(n_k+1)}(f, \mathcal{P}_{n_k+1}, X)$$

або в еквівалентній формі

$$\begin{aligned} E(f, \mathcal{P}_{n_k+j}, X) &\leqslant E^{(n_k+j)/(n_k+1)}(f, \mathcal{P}_{n_k+1}, X) \\ &= E(f, \mathcal{P}_{n_k+1}, X) \cdot E^{(j-1)/(n_k+1)}(f, \mathcal{P}_{n_k+1}, X). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Враховуючи нерівність (4.10), для довільного $j \in \mathbb{N}$ з (3.11) маємо

$$\frac{E(f, \mathcal{P}_{n_k+j}, X)}{E(f, \mathcal{P}_{n_k+1}, X)} \leqslant \varepsilon_k^{j-1}. \tag{4.12}$$

Перейдемо до другого етапу доведення леми. Використовуючи основний результат першого етапу — доведене співвідношення (4.12), вірність нерівності (4.1) покажемо методом розмірковувань від супротивного. Для цього покладаємо, що існують деяка ціла трансцендентна функція f_0 і банахів простір X_0 такі, що для будь-якого дійсного скінченного числа $c > 0$ існує натуральне число $n(c)$, яке залежить від c і для якого має місце наступна нерівність

$$\sum_{\nu=n(c)+1}^{\infty} \frac{E(f_0, \mathcal{P}_\nu, X_0)}{E(f_0, \mathcal{P}_{n(c)}, X_0)} > c. \tag{4.13}$$

Розглянемо довільну послідовність додатних чисел $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ таку, що $\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$. При цьому відповідна множина натуральних чисел $M \overset{\text{df}}{=} \{n(c_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, елементи якої визначаються згідно формули (4.13), повинна складатися з зліченої кількості різних натуральних чисел (зазначимо, що деякі елементи множини M можуть повторюватись злічену або скінченну кількість разів). Якщо це було б не так, то множина M складалася б з скінченної кількості різних натуральних чисел, деякі з яких повторювалися б скінченну кількість разів, а деякі — злічену. В цьому випадку для довільного елемента $n(c_k) \in M$ підрахуємо величину

$$\Delta(n(c_k)) \overset{\text{df}}{=} \sum_{\nu=n(c_k)+1}^{\infty} \frac{E(f_0, \mathcal{P}_\nu, X_0)}{E(f_0, \mathcal{P}_{n(c_k)}, X_0)}. \tag{4.14}$$

В силу (4.2) для кожного $n(c_k)$ число $\Delta(n(c_k))$ є скінченним і за формулою (4.14) при $k = 1, 2, \ldots$, одержимо лише скінченну кількість різних значень $\Delta(n(c_k))$. Тому для величини

$$\Delta^* \overset{\text{df}}{=} \max\{\Delta(n(c_k)) : \ n(c_k) \in M\} \tag{4.15}$$

маємо $\Delta^* < \infty$. Виберемо число $\widehat{c}_k$ так, щоб

$$\Delta^* < \widehat{c}_k. \tag{4.16}$$

Для $\widehat{c}_k$ в множині M існує певний елемент $n(\widehat{c}_k)$, для якого згідно (4.13) маємо

$$\Delta(n(c_k)) > \widehat{c}_k. \tag{4.17}$$

Співставивши співвідношення (4.16) та (4.17), одержимо нерівність $\widehat{c}_k > \widehat{c}_k$, яка означає хибність припущення стосовно того, що множина M утворена лише скінченною кількістю різних натуральних чисел.

Зазначимо, що для довільного скінченного $c > 0$ завжди існують числа $n_k \in \mathcal{N}$ такі, що $n_k > n(c)$, де значення $n(c)$ визначається згідно (4.13). Якщо це було б не так, то, виходячи з означення множини $\mathcal{N}$, отримали б протиріччя по відношенню до граничної рівності (4.9).

Для довільного $c \in (0, \infty)$ через $n^*(c)$ позначимо таке число $n_k \in \mathcal{N}$, для якого

$$n^*(c) \overset{\text{df}}{=} \min\{n_k \in \mathcal{N} : \, n_k > n(c)\}. \tag{4.18}$$

Для послідовності чисел $\{n(c_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ маємо

$$\varlimsup_{k\to\infty} n(c_k) = \infty.$$

Розглянемо деяку послідовність $\{n(c_{k_t})\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \{n(c_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ таку, що

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} c_{k_t} &= \infty, \\ \lim_{t\to\infty} n(c_{k_t}) &= \infty. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Для кожного числа $n(c_{k_t}) \in M$ існує скінченне число $n^*(c_{k_t}) \in \mathcal{N}$, яке визначається за допомогою формули (4.18). Те з чисел $\varepsilon_k \in \mathcal{E}$, яке відповідає числу $n^*(c_{k_t})$, позначимо через $\varepsilon^*(c_{k_t})$. Отже, якщо припущення (4.13) вірне, то повинна виконуватись нерівність

$$\begin{aligned} c_{k_t} &< \sum_{\nu=n(c_{k_t})+1}^{\infty} \frac{E(f_0, \mathcal{P}_\nu, X_0)}{E(f_0, \mathcal{P}_{n(c_{k_t})}, X_0)} = \Delta(n(c_{k_t})) \\ &\leqslant \sum_{\nu=n(c_{k_t})+1}^{n^*(c_k)} \frac{E(f_0, \mathcal{P}_\nu, X_0)}{E(f_0, \mathcal{P}_{n(c_{k_t})}, X_0)} + \sum_{\nu=n^*(c_{k_t})+1}^{\infty} \frac{E(f_0, \mathcal{P}_\nu, X_0)}{E(f_0, \mathcal{P}_{n^*(c_{k_t})}, X_0)}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Враховуючи співвідношення (4.3) та (4.12), з нерівності (4.20) маємо

$$c_{k_t} < n^*(c_{k_t}) - n(c_{k_t}) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\varepsilon^*(c_{k_t})\right)^{j-1}$$
$$= n^*(c_{k_t}) - n(c_{k_t}) + \frac{\varepsilon^*(c_{k_t})}{1-\varepsilon^*(c_{k_t})}. \quad (4.21)$$

З означення множини $\mathcal{N}$ та з формули (4.18) витікає, що при $t \to \infty$ різниця $n^*(c_{k_t}) - n(c_{k_t})$ завжди буде скінченним числом. Що ж стосується величини $\varepsilon^*(c_{k_t})\big/(1-\varepsilon^*(c_{k_t}))$, то при $t \to \infty$ $(t \in \mathbb{N})$ вона буде прямувати до нуля, оскільки, як випливає з формулювання множин $\mathcal{N}$ та $\mathcal{E}$, при зростанні чисел $n^*(c_{k_t})$ до ∞ маємо $\varepsilon^*(c_{k_t}) \to 0$. Переходячи в лівій і правій частинах нерівності (4.21) до границі при $t \to \infty$ і враховуючи (4.19), одержимо суперечливу нерівність, коли $+\infty$ менше скінченного числа. Отримане протиріччя означає, що припущення (4.13) є хибним і має місце нерівність (4.1). Лему 4.1 доведено. □

5. Найкращі поліноміальні наближення цілих трансцендентних функцій узагальненого α-порядку зростання

Встановлена у розділі 3 теорема 3.1 дає можливість дослідити зв'язок між узагальненою характеристикою зростання цілої трансцендентної функції — її α-порядком та послідовністю її найкращих поліноміальних наближень в деяких банахових просторах аналітичних в скінченній однозв'язній області функцій.

Теорема 5.1. *Нехай виконано умову* (2.4) *теореми* F *і аналітична в області* G *функція* f *належить банаховому простору* X, *де* X *є* $\mathcal{E}'_p(G)$ *або* $\mathcal{E}_p(G)$, *де* $p \geqslant 1$. *Тоді гранична рівність*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\ln\Big(1\Big/\sqrt[n]{E\big(f,\mathcal{P}_n,X\big)}\,\Big)\Big)} = \lambda, \quad (5.1)$$

де λ *— деяке скінченне невід'ємне число, є необхідною і достатньою умовою для того, щоб* f *була цілою трансцендентною функцією узагальненого* α*-порядку зростання*

$$\rho_\alpha(f) = \max(\lambda, 1). \quad (5.2)$$

Доведення. В першій частині розглянемо випадок, коли $X = \mathcal{E}'_p(G)$ $(p \geqslant 1)$. Дослідимо достатність умови (5.1), вважаючи, що для функції $f \in \mathcal{E}'_p(G)$ зазначене співвідношення має місце. Враховуючи належність функції α до класу Λ, з (5.1) маємо

$$\ln(-n^{-1}\ln E(f,\mathcal{P}_n,\mathcal{E}'_p(G)) \to \infty$$

при $n \to \infty$. Звідси витікає, що

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E\big(f,\mathcal{P}_n,\mathcal{E}'_p(G)\big)} = 0$$

Отримана нерівність, згідно з [10], є необхідною і достатньою умовою для того, щоб функція f була цілою. Нехай ціла функція f має узагальнений α-порядок зростання $\rho_\alpha(f)$, який визначається формулою (3.3). Покажемо, що величина $\rho_\alpha(f)$ співпадає з числом, записаним у правій частині формули (5.2). Іншими словами, покажемо, що виконується рівність $\widetilde{\rho'_\alpha}(f) = \lambda$. Зазначене, згідно теоремі 3.1, і буде означати доведення достатності умови (5.1).

Використовуючи формулу (3.7) маємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $\widehat{n_1}(\varepsilon, f)$, що для довільного $n > \widehat{n_1}(\varepsilon, f)$ $(n \in \mathbb{N})$ виконується нерівність

$$\frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\ln\Big(1\Big/\sqrt[n]{|a_n(f)|}\ \Big)\ \Big)} \leqslant \widehat{\rho} \overset{\mathrm{df}}{=} \widetilde{\rho'_\alpha}(f) + \varepsilon. \tag{5.3}$$

З співвідношення (5.3) одержимо

$$\begin{aligned} |a_n(f)| &\leqslant \Big(\exp\Big(\exp\Big(\alpha^{-1}\Big(\frac{1}{\widehat{\rho}}\cdot\alpha\big(\ln n\big)\Big)\Big)\Big)\Big)^{-n} \\ &= \Big(\exp\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n, \frac{1}{\widehat{\rho}}\Big)\Big)\Big)\Big)^{-n}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Згідно теоремі 3.1 функція f має розвинення у ряд (3.4) по поліномах Фабера. Частинну суму n-го порядку цього ряду позначимо так

$$\Pi^*_n(f,z) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(f)F_k(z).$$

Як було зазначено в роботі [35], для області G, яка обмежена кривою $\gamma \in \mathcal{L}$, многочлени Фабера F_n обмежені у сукупності, тобто існує абсолютна стала $\mathcal{K} > 0$ така, що для довільного $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\max_{z\in\overline{G}} |F_n(z)| \leqslant \mathcal{K}. \tag{5.5}$$

Тоді, в силу (5.5) одержимо

$$\begin{aligned} E\big(f,\mathcal{P}_n,\mathcal{E}'_p(G)\big) &\leqslant \big\|f - \pi^*_n(f)\big\|_{\mathcal{E}'_p(G)} \\ &= \Big\|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(f)F_k\Big\|_{\mathcal{E}'_p(G)} \leqslant k^*_{1,p}\sum_{k=n+1}^{\infty}\big|a_k(f)\big|, \end{aligned} \tag{5.6}$$

де $k^*_{1,p} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathcal{K}\sqrt[p]{\mathrm{mes}(G)}$. З урахуванням формули (5.4) нерівність (5.6) перепишемо у наступному вигляді

$$\begin{aligned} E\big(f,\mathcal{P}_n,\mathcal{E}'_p(G)\big) &\leqslant k^*_{1,p}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\exp\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln k,\frac{1}{\widehat{\rho}}\Big)\Big)\Big)\Big)^{-k} \\ &\leqslant k^*_{1,p}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\exp\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln(n+1),\frac{1}{\widehat{\rho}}\Big)\Big)\Big)\Big)^{-k} \\ &\leqslant \frac{k^*_{1,p}}{\big(\exp\big(\exp\big(\mathcal{F}\big(\ln(n+1),1/\widehat{\rho}\big)\big)\big)\big)^{n}} \\ &\qquad\times\Big(1-\frac{1}{\exp\big(\exp\big(\mathcal{F}\big(\ln(n+1),1/\widehat{\rho}\big)\big)\big)}\Big)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

З нерівностей (3.7) та (5.7) маємо

$$\begin{aligned} \lambda &= \varlimsup_{n\to\infty}\Big\{\alpha(\ln n)\Big/\alpha\Big(\ln\ln\Big(1\Big/\sqrt[n]{E\big(f,\mathcal{P}_n,\mathcal{E}'_p(G)\big)}\Big)\Big)\Big\} \\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\Big\{\alpha\big(\ln n\big)\Big/\alpha\Big(\ln\ln\Big(\exp\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\big(\ln(n+1),1/\widehat{\rho}\big)\Big)\Big) \\ &\qquad\times\big(k^*_{1,p}\big)^{-1/n}\Big(1-\frac{1}{\exp\big(\exp\big(\mathcal{F}\big(\ln(n+1),1/\widehat{\rho}\big)\big)\big)}\Big)^{1/n}\Big)\Big)\Big\} \\ &= \varlimsup_{n\to\infty}\alpha\big(\ln n\big)\Big/\alpha\Big(\ln\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\big(\ln(n+1),1/\widehat{\rho}\big)\Big)-\frac{1}{n}\cdot\ln k^*_{1,p} \\ &\qquad+\frac{1}{n}\cdot\ln\Big(1-\frac{1}{\exp\big(\exp\big(\mathcal{F}\big(\ln(n+1),1/\widehat{\rho}\big)\big)\big)}\Big)\Big)\Big) \\ &= \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\widehat{\rho}\cdot\alpha(\ln n)}{\alpha\big(\ln(n+1)\big)} = \widetilde{\rho'_\alpha}(f)+\varepsilon. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Враховуючи довільність вибору числа $\varepsilon > 0$, з (5.8) одержимо

$$\lambda \leqslant \widetilde{\rho'_\alpha}(f). \tag{5.9}$$

Покажемо справедливість нерівності, протилежної до нерівності (5.9). Очевидно, що ціла функція f належить до простору $\mathcal{E}'_\infty(G)$. Нехай

$$\widetilde{p}_n(f,z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k F_k(z)$$

є многочленом найкращого наближення функції f в метриці простору $\mathcal{E}'_\infty(G)$. Використовуючи теорему I, отримаємо для $n\in\mathbb{N}$

$$\big|a_n(f)\big| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|\mathrm{w}|=1} \frac{f\big(\Psi(\mathrm{w})\big) - \widetilde{p}_{n-1}\big(f, \Psi(\mathrm{w})\big)}{\mathrm{w}^{n+1}}\, d\mathrm{w}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f\big(\Psi(e^{it})\big) - \widetilde{p}_{n-1}\big(f, \Psi(e^{it})\big)\right| dt$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant t<2\pi}\big|f\big(\Psi(e^{it})\big) - \widetilde{p}_{n-1}\big(f, \Psi(e^{it})\big)\big| = E\big(f, \mathcal{P}_{n-1}, \mathcal{E}'_\infty(G)\big). \quad (5.10)$$

З співвідношень (3.7) та (5.10) маємо

$$\widetilde{\rho'_\alpha}(f) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\ln\Big(1\Big/\sqrt[n]{\big|a_n(f)\big|}\,\Big)\Big)}$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\ln\Big(1\Big/\sqrt[n]{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_\infty(G)\big)}\,\Big)\Big)}. \quad (5.11)$$

Для проведення наступних розмірковувань нам знадобиться своєрідний аналог одного результату А. А. Конюшкова [39] в комплексній площині.

Лема A ([15]). *Нехай G — скінченна однозв'язна область комплексної площини з межею $\gamma \in \mathcal{L}$, функція $f \in \mathcal{E}'_p(G)$ $(1 \leqslant p < p_1 \leqslant \infty)$ і*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}'_p(G)\big) \cdot \nu^{1/p-1/p_1-1} < \infty. \quad (5.12)$$

Тоді $f \in \mathcal{E}'_{p_1}(G)$ і для будь-якого натурального числа n виконується нерівність

$$E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_{p_1}(G)\big) \leqslant \mu_{p,p_1}\Big\{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G)\big) \cdot n^{1/p-1/p_1}$$

$$+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}'_p(G)\big) \cdot \nu^{1/p-1/p_1-1}\Big\}, \quad (5.13)$$

де μ_{p,p_1} — константа, яка не залежить від n.

З співвідношення (4.2) витікає, що для цілої функції f існує деяке скінченне додатнє число k_{f,p,p_1} таке, що

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}'_p(G)\big) \cdot \nu^{1/p-1/p_1-1} \leqslant k_{f,p,p_1},$$

де $1 \leqslant p < p_1 \leqslant \infty$. Тоді, відповідно до леми A, має місце нерівність (5.13). Покладаючи в ній $p_1 = \infty$ і підставляючи отриманий результат в праву частину співвідношення (5.11), одержимо

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho'_\alpha}(f) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \Bigg\{ \alpha(\ln n) \Big/ \alpha\Bigg(\ln\ln \Bigg(1 \Big/ \Bigg(\sqrt[n]{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G)\big)} \\ \times \big(\mu_{p,\infty} n^{1/p}\big)^{1/n} + \Bigg(\mu_{p,\infty} \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{1/p-1} \cdot E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}'_p(G)\big) \Bigg)^{1/n} \Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg\} \\ \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \Bigg\{ \alpha(\ln n) \Big/ \alpha\Bigg(\ln\ln \Bigg(1 \Big/ \Bigg(\sqrt[n]{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G)\big)} \\ \times \Bigg(1 + \Bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}'_p(G)\big)}{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G)\big)} \Bigg)^{1/n} \Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Застосовуючи до правої частини нерівності (5.14) лему 4.1 і враховуючи, що α є повільно змінюючоюся функцією, з (5.1) та (5.14) маємо

$$\widetilde{\rho'_\alpha}(f) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\ln \Big(1 \Big/ \sqrt[n]{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G)\big)} \Big) \Big)} = \lambda. \tag{5.15}$$

Порівнюючи між собою нерівності (5.9) та (5.15), отримаємо рівність

$$\lambda = \widetilde{\rho'_\alpha}(f). \tag{5.16}$$

З (3.8) та (5.16) витікає, що f є цілою трансцендентною функцією узагальненого α-порядку зростання (5.2).

При доведенні необхідності умови (5.1) покладаємо, що f є цілою трансцендентною функцією деякого узагальненого α-порядку зростання $\rho_\alpha(f)$, який підраховується за формулою (3.8). Виконання рівності $\widetilde{\rho'_\alpha}(f) = \lambda$ показуємо аналогічно тому, як це було зроблено у випадку дослідження достатності умови (5.1). Першу частину теореми 5.1 доведено.

У другій частині доведення розглянемо випадок, коли $X = \mathcal{E}_P(G)$ $(p \geqslant 1)$. Встановимо спочатку достатність умови (5.1), покладаючи, що для функції $f \in \mathcal{E}_p(G)$ це співвідношення виконане. З формули (5.1) витікає, що має місце гранична рівність

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}_p(G)\big)} = 0, \tag{5.17}$$

а це означає, що функція f — ціла [15]. Покладаємо, що f має узагальнений α-порядок зростання $\rho_\alpha(f)$, який визначається формулою (3.8). Покажемо справедливість рівності $\widetilde{\rho_\alpha}(f) = \lambda$. Для цього нам знадобиться один результат І. І. Ібрагімова та Н. І. Шихалієва, який наведемо у зручному для нас вигляді.

Лема B ([10]). *Нехай G — скінченна однозв'язна область комплексної площини з межею $\gamma \in \mathcal{L}$, функція $f \in \mathcal{E}_p(G)$, $1 \leqslant p < p_1 \leqslant \infty$ і*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}_p(G)\big) \cdot \nu^{1/p-1/p_1-1} < \infty. \tag{5.18}$$

Тоді f належить простору $\mathcal{E}_{p_1}(G)$ і нерівність

$$E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}_{p_1}(G)\big) \leqslant \theta_{p,p_1}\Big\{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}_p(G)\big)\cdot n^{1/p-1/p_1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}_p(G)\big)\cdot \nu^{1/p-1/p_1-1}\Big\}, \tag{5.19}$$

виконується для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Тут θ_{p,p_1} — стала, яка не залежить від n.

Як вже зазначалося, ціла функція f належить просторам $\mathcal{E}'_p(G)$ при довільному $p \geqslant 1$. Тому

$$E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G)\big) \leqslant \sqrt[p]{\mathrm{mes}(G)} \cdot E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_\infty(G)\big). \tag{5.20}$$

В силу співвідношення (5.17) для цілої функції f виконано умову

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}_p(G)\big) \cdot \nu^{1/p-1/p_1-1} < \infty.$$

Тому, згідно лемі B, покладаючи в (5.19) $p_1 = \infty$, одержимо

$$E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}_\infty(G)\big) \leqslant \theta_{p,\infty}\Big\{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}_p(G)\big) \cdot n^{1/p} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}_p(G)\big) \cdot \nu^{1/p-1}\Big\}. \tag{5.21}$$

Оскільки $\mathcal{E}'_\infty(G) \equiv \mathcal{E}_\infty(G)$, то, враховуючи формулу (5.20), нерівність (5.21) перепишемо в наступному вигляді

$$E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G)\big) \leqslant c^*_{p,G} n^{1/p} E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}_p(G)\big)\Big\{1 + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E\big(f, \mathcal{P}_\nu, \mathcal{E}_p(G)\big)}{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}_p(G)\big)}\Big\}, \tag{5.22}$$

де $c^*_{p,G} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \theta_{p,\infty} \sqrt[p]{\mathrm{mes}(G)}$. З (5.22) та леми 4.1 маємо

$$E^{-1}(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}_p(G)) \leqslant c^*_{p,G}\, n^{1/p}\big(1 + c_{f,\mathcal{E}_p(G)}\big) E^{-1}(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G)). \quad (5.23)$$

Використовуючи формулу (5.1), де $X = \mathcal{E}_p(G)$, нерівність (5.23) та основний результат, отриманий при доведенні першої частини данної теореми, запишемо

$$\lambda = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\ln\Big(1\Big/\sqrt[n]{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}_p(G)\big)}\,\Big)\Big)}$$
$$\geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\ln\Big(\sqrt[n]{c^*_{p,G}\, n^{1/p}\Big(1 + c_{f,\mathcal{E}_p(G)}\Big)\Big/E(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G))}\,\Big)\Big)}$$
$$= \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\ln\Big(1\Big/\sqrt[n]{E\big(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{E}'_p(G)\big)}\,\Big)\Big)} = \widetilde{\rho'_\alpha}(f). \quad (5.24)$$

Протилежну нерівність $\widetilde{\rho'_\alpha}(f) \geqslant \lambda$ отримаємо таким же чином, як це було зроблено при доведенні зазначеного співвідношення у першій частині цієї теореми. З сказаного витікає, що $\widetilde{\rho'_\alpha}(f) = \lambda$.

Вкажемо хід розмірковувань при доведенні необхідності умови (5.1), вважаючи, що f є цілою функцією узагальненого α-порядку зростання $\rho_\alpha(f)$, який визначається формулою (3.8). Нерівність $\lambda \leqslant \widetilde{\rho'_\alpha}(f)$ встановлюємо на основі розмірковувань, аналогічних використаним при отриманні зазначеного факту у першій частині доведення. Протилежну нерівність $\lambda \geqslant \widetilde{\rho'_\alpha}(f)$ одержуємо таким же чином, як це було зроблено при отриманні формули (5.2). Теорему 5.1 повністю доведено. $\square$

Теорема 5.1 дає чітке уявлення про швидкість прямування до нуля послідовностей найкращих поліноміальних наближень цілих трансцендентних функцій f, які мають узагальнений α-порядок зростання $\rho_\alpha(f)$. Наприклад, з зазначеної теореми витікає, що для цілої функції f, яка визначається характеристикою зростання (3.8), і довільного $\varepsilon > 0$ існує деяке число $\widetilde{n_*}(\varepsilon, f, X) \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > \widetilde{n_*}(\varepsilon, f, X)$ ($n \in \mathbb{N}$) виконується нерівність

$$E\big(f, \mathcal{P}_n, X\big) \leqslant \Big(\exp\Big(\exp\Big(\mathcal{F}\Big(\ln n, \frac{1}{\rho_\alpha(f) + \varepsilon}\Big)\Big)\Big)\Big)^{-n},$$

де функція $\mathcal{F}$ визначається теоремою F.

Наприкінці зазначимо, що результати теореми 5.1 доповнюють дослідження, які проводилися раніше R. S. Varga [8], А. В. Батирєвим [4], S. M. Shan [32], A. R. Reddy [5–7], І. І. Ібрагімовим та Н. І. Шихалієвим [9, 10], авторами [17–26].

Література

[1] С. Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов*, М.–Л.: Глав. ред. общетехн. лит., 1937.

[2] С. Н. Бернштейн, *О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени*, (1912). Собр. соч. Т. 1. М.: АН СССР, 1952, 11–104.

[3] И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций*, Л.: ЛГУ, 1977.

[4] А. В. Батырев, *К вопросу о наилучшем приближении аналитических функций полиномами* // Докл. АН СССР., **76** (1951), No. 2, 173–175.

[5] A. R. Reddy, *Approximation of an entire function* // J. Approxim. Theory, **3** (1970), No. 1, 128–137.

[6] A. R. Reddy, *Best polynomial approximation to certain entire functions* // J. Approxim. Theory, **5** (1972), 97–112.

[7] A. R. Reddy, *A contribution to best approximation in the L_2 norm* // J. Approxim. Theory, **1** (1974, No. 1, 110–117.

[8] R. S. Varga, *On an extension of a result of S. N. Bernstein* // J. Approxim. Theory, **1** (1968), No. 2, 176–179.

[9] И. И. Ибрагимов, Н. И. Шихалиев, *О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций* // Докл. АН СССР, **227** (1976), No. 2, 280–283.

[10] И. И. Ибрагимов, Н. И. Шихалиев, *О конструктивной характеристике одного класса функций комплексного переменного* // Докл. АН СССР, **236** (1977), No. 4, 789–791.

[11] A. Giroux, *Approximation of entire functions over bounded domains* // J. Approxim. Theory, **28** (1980), No. 1, 45–53.

[12] С. Б. Вакарчук, *О наилучшем полиномиальном приближении в некоторых банаховых пространствах аналитических в единичном круге функций* // Мат. заметки, **55** (1994), No. 4, 6–14.

[13] С. Б. Вакарчук, *О наилучшем приближении обобщёнными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных* // Изв. вузов. Матем., (1991), No. 7, 14–25.

[14] С. Б. Вакарчук, *Про найкращі поліноміальні наближення в деяких банахових просторах аналітичних функцій* // Доповіді АН УРСР, Серія “A” (1991), No. 1, 8–10.

[15] С. Б. Вакарчук, *О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. I* // Укр. мат. журн., **47** (1994), No. 9, 1123–1133.

[16] С. Б. Вакарчук, *О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. II* // Укр. мат. журн., **47** (1994), No. 10, 1318–1322.

[17] С. Б. Вакарчук, С. И. Жир, *О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций* // Мат. физика, анализ, геометрия, **9** (2002), No. 4, 595–603.

[18] С. Б. Вакарчук, С. И. Жир,*Некоторые вопросы полиномиальной аппроксимации целых транцендентных функций* // Укр. мат. журн., **54** (2002), No. 9, 1155–1162.

[19] S. B. Vakarchuk, S. I. Zheer, *Polynomial approximation of entire functions of generalized order in the unit disk*, Book of abstracts. Intern. Akhiezer Centenary Conf. Inst. for Low Temp. Physics and Engin., Kharkov Nat. Univ., Kharkov, 2001, 98–99.

[20] С. Б. Вакарчук, С. И. Жир, *О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций в комплексной плоскости* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України, К.: Ін-т матем. НАН України, **2** (2005), 27–42.

[21] С. Б. Вакарчук, С. И. Жир, *О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций обобщенного порядка* // Укр. мат. журн., **60** (2008), No. 8, 1011–1026.

[22] С. И. Жир, С. Б. Вакарчук, *О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в пространствах В. И. Смирнова*, Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы конференции “Воронежская зимняя математическая школа”, 26 января–2 февраля, 2003, Воронеж, 98–99.

[23] С. И. Жир, С. Б. Вакарчук, *Некоторые вопросы наилучшего полиномиального приближения целых трансцендентных функций многих комплексных переменных*, Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”. Саратов, 2004, 83–84.

[24] С. И. Жир, С. Б. Вакарчук, *О полиномиальной аппроксимации целых функций в комплексной плоскости*, Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”. Саратов, 2006, 70–71.

[25] С. И. Жир, С. Б. Вакарчук,*Некоторые вопросы полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций*, Тези доповідей Міжнародної наукової конференції “Математичний аналіз і диферециальні рівняння та їх застосування”, 18–23 вересня, 2006, Ужгород, 34–35.

[26] С. И. Жир, *О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в конечной односвязной области комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування, Міжнародна наукова конференція з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленко, 16–21 червня, 2008, Мелітополь, К.: Ін-т матем. НАН України, с. 49.

[27] М. Н. Шеремета, *О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения* // Изв. вузов. Матем., (1967) No. 2, 100–108.

[28] М. Н. Шеремета,*О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений* // Изв. вузов. Матем., (1968) No. 6, 115–121.

[29] O. P. Juneja, *Approximation of an entire function* // J. Approxim. Theory, **11** (1974), No. 3, 343–349.

[30] Е. Титчмарш, *Теория функций*, М.: Наука, 1980.

[31] D. Sato, *On the rate of growth of entire functions of fast growth* // Bulletin of Amer. Math. Soc., **69** (1963), No. 3, 411–414.

[32] S. M. Shah, *Polinomial approximation of an entire function and generalized orders* // J. Approxim. Theory, **19** (1977), No. 4, 315–324.

[33] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, М.: Наука, 1985.

[34] М. И. Гварадзе, *Об одном классе пространств аналитических функций* // Мат. заметки, **21** (1977) No. 2, 141–150.

[35] С. Я. Альпер, *О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **19** (1955), No. 3, 423–444.

[36] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, М.; Л.: Наука, 1964.

[37] П. К. Суетин,*Ряды по многочленам Фабера*, М.: Наука, 1984.

[38] В. К. Дзядык,*О приближении аналитических функций в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей*, Третья летняя матем. школа (Конструктивная теория функций), Кацивели, 1965, К.: Наукова думка, 1966, 29–83.

[39] А. А. Конюшков, *Наилучшие приближения и коэффициенты Фурье* // Мат. сборник, **44** (1958), No. 1, 53–84.

Відомості про авторів

Сергій Борисович Вакарчук

Дніпропетровський університет
економіки та права
імені Альфреда Нобеля
вул. Набережна Леніна, 18
49000, м. Дніпропетровськ
Україна
E-Mail: sbvakarchuk@mail.ru

Сергій Іванович Жир

Академія митної служби України
вул. Дзержинського, 2/4,
49044, м. Дніпропетровськ
Україна