Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 2, 241 – 254

О конечных 2-группах вида $\mathbb{Z}_2 \wr G$

Юрий Г. Леонов

(*Представлена И. В. Протасовым*)

Аннотация. В работе рассматривается сплетение вида $\mathbb{Z}_2 \wr G$ для произвольной конечной 2-группы G. Изучается мономорфизм такой группы в известную группу Калужнина $P_{2,m}$ для подходящего натурального m

2010 MSC. 20E22, 20C11.

Ключевые слова и фразы. Кратное сплетение, 2-группа Калужнина, представление группы Калужнина, вложение конечной 2-группы в группу Калужнина.

Введение

Операция сплетения является одной из важнейших конструкций в теории групп, позволяющей получать новые группы при помощи уже известных. Напомним, что стандартное (регулярное) сплетение $A \wr B$ групп A и B есть группа, элементы которой составляют множество пар вида

$$\{(b, w) | b \in B, w \in Fun(B, A)\},$$

где $Fun(B, A)$ — множество всех функций из B в A с определенной групповой операцией произведения пар $(b_1, w_1) \cdot (b_2, w_2) = (b_1 b_2, w_1^{b_2} w_2)$, причем $w_1^{b_2}(x) = w_1(b_2 x)$, $x \in B$ (см. [1]). Назовем *группой Калужнина* $P_{p,n}$ n-кратное сплетение групп порядка p, построенное в [2]. Множество этих групп можно определить рекуррентно следующим образом. Положим $P_{p,0} = \mathbb{Z}_p, P_{p,n} = P_{p,n-1} \wr \mathbb{Z}_p$, при $n > 0$. Таким образом,

$$P_{p,n} = (\dots(\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p) \wr \mathbb{Z}_p) \dots) \wr \mathbb{Z}_p$$

(расстановка скобок важна, так как операция сплетения абстрактных групп не является ассоциативной). Эти группы достаточно хорошо

Статья поступила в редакцию 3.08.2010

изучены, занимают одно из центральных мест в теории групп, так как являются силовскими p-подгруппами симметрических групп степени p^{n+1} ([1, 3], см. также [4]).

Операция сплетения групп не является коммутативной. Поэтому, вполне естественные конструкции групп вида $\mathbb{Z}_2 \wr P_{2,n}$ существенно отличаются от групп Калужнина. В работе [5] рассматривалось семейство групп $I_n = \mathbb{Z}_2 \wr\ P_{2,n}$ для каждого $n \geq 0$. В частности, был построен мономорфизм $\Omega_n : I_n \to P_{2,m}, \quad m = 2^{n+1} - 1$ и установлено, что данное m является наименьшим при котором такой мономорфизм возможен. Целью данной работы является исследование минимального мономорфизма. Мы получаем иное, более естественное вложение группы I_n в группу $P_{2,m}$, рассматриваем образы порождающих группы I_n в группе Калужнина. Полученные результаты можно применить при рассмотрении мономорфизма произвольной группы $\mathbb{Z}_2 \wr G$, $G \leq P_{2,n}$ в группу $P_{2,m}$. В результате такого погружения в хорошо изученную группу Калужнина $P_{2,m}$, мы получаем много информации и о самой группе $\mathbb{Z}_2 \wr G$, если знаем структуру подгруппы G в группе Калужнина $P_{2,n}$.

Согласно [3], каждый элемент группы Калужнина $y \in P_{2,n}$ можно представить в виде таблицы

$$y = [y_1, y_2 + y_3 t_1, \dots, y_{2^n} + y_{2^n+1} t_1 + \dots + y_{2^{n+1}-1} t_1 \cdots t_n].$$

Здесь на k-том месте $(0 \leq k \leq n)$ в таблице стоят многочлены $\bar{y}_k(t_1, \dots, t_k)$, которые являются представителями минимальной степени классов смежности кольца многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_k]$ по модулю идеала, порожденного многочленами вида $t_1^2 - t_1, \dots, t_k^2 - t_k$. Полученное кольцо многочленов называется редуцированным. Обозначим его $\mathbb{Z}_2^R[t_1, \dots, t_k]$. Операция умножения таблиц, согласованная с операцией сплетения, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&[\bar{y}_0, \bar{y}_1(t_1), \bar{y}_2(t_1, t_2), \dots] \cdot [\bar{z}_0, \bar{z}_1(t_1), \bar{z}_2(t_1, t_2), \dots] \\
&\qquad = [\bar{y}_0 + \bar{z}_0, \bar{y}_1(t_1 + \bar{z}_0) + \bar{z}_1(t_1), \bar{y}_2(t_1 + \bar{z}_0, t_2 + \bar{z}_1(t_1)) \\
&\qquad\qquad + \bar{z}_2(t_1, t_2), \dots].
\end{aligned}$$

Для упрощения записи иногда будем писать $\overline{t}_i$ вместо последовательности переменных $t_1, \dots, t_i$.

Для задания и изучения нашего мономорфизма полезным будет рассмотреть представление групп $P_{2,n}$ унитреугольными матрицами над полем из двух элементов.

1. Представление 2-групп Калужнина унитреугольными матрицами

Пусть $UT_N(2)$ — группа нижних унитреугольных матриц размерности N над полем из двух элементов. Рассмотрим точное представление f_n группы $P_{2,n}$ унитреугольными матрицами группы $UT_{2^n+1}(2)$, данное в работах [6] и [7].

Пусть $t_{i_1}\cdots t_{i_m}$ — некоторый одночлен, $1\le i_1<\cdots<i_m\le n$. *Высотой* такого *одночлена* называем число

$$h(t_{i_1}\cdots t_{i_m})=1+\sum_{b=1}^{m}2^{i_b-1}.$$

Отдельно полагаем, что высота нулевого многочлена равна нулю. Очевидно, любой многочлен может быть однозначно представлен в виде суммы одночленов попарно разных высот.

Элемент $y\in P_{2,n}$ в развернутом виде будем записывать как $y=[\bar y_0,\bar y_1(t_1),\ldots,\bar y_n(\bar t_n)]$. В наших обозначениях

$$\bar y_k(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{j=1}^{2^k}y_{2^k+j-1}t(j), \tag{1.1}$$

где $t(j)$ — одночлен высоты j, $t(1)=1$. Наибольшая из высот одночленов с ненулевым коэффициентом в правой части равенства (1.1) называется *высотой многочлена* $\bar y_k(\bar t_k)$.

Определим теперь *действие таблицы* $y\in P_{2,n}$ *на многочлен* g высоты $i\in\{1,\ldots,2^n+\ 1\}$. Для данных n и g составим таблицу элемента $\overline{g}\in P_{2,n+1}$ следующим образом. Первые n координат таблицы выберем нулевыми, а последнюю координату возьмем равной g. Легко видеть, что определение корректно и $\overline{g}\in P_{2,n+1}$. Определим по заданному y элемент $\widetilde{y}=[\bar y_0,\ldots,\bar y_n(\bar t_n),0]\in P_{2,n+1}$. Рассмотрим элемент $\overline{g}^{\widetilde{y}}=\widetilde{y}^{-1}\cdot\overline{g}\cdot\widetilde{y}$. Все координаты его таблицы нулевые, кроме, быть может, последней. Многочлен, являющийся последней координатой, обозначим просто g^y. Заметим (это следует еще из работ Л. Калужнина), что высота многочлена $h(g)$ совпадает с высотой $h(g^y)$. Будем говорить, что многочлен g^y получен действием элемента y на многочлен g.

Высота последней координаты таблицы $y\in P_{2,n}$ ограничена числом 2^n. Рассмотрим одночлены $t(i)$ высот $i\in\{1,2,\ldots,2^n+1\}$ и многочлены $t(i)^y=\sum_{j=1}^{i}u_{i,j}\cdot t(j)$. Согласно [7], отображение $f_n:P_{2,n}\to UT_{2^n+1}(2)$ определяется равенствами:

$$f_n(y)_{i,j}=\begin{cases}0, & i<j\\ u_{i,j}, & i\ge j,\end{cases} \tag{1.2}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, 2^n + 1$. Из определения видно, что $f_n(y)_{i,i} = u_{i,i} = 1$ и отображение f_n задано корректно.

Теорема 1.1 ([7]). *Отображение $f_n : P_{2,n} \to UT_{2^n+1}(2)$ является мономорфизмом.*

При анализе зависимости матрицы $f_n(y)$, $y \in P_{2,n}$ от коэффициентов y_i, $i = 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$, определяемых в (1.1), в работе [5] было получено следующее утверждение.

Лемма 1.1 ([5]). *Для $k = 0, 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, 2^k$ выполняется:*

1. $f_n(y)_{2^k+1,j} = y_{2^k+j-1}$;
2. *При $i < 2^k + 1$ в элементе $f_n(y)_{i,j}$ нет переменных y_s с индексами $s \geq 2^k$.*

2. О мономорфизме группы I_n в $P_{2,m}$

Зафиксируем n и обозначим $m = 2^{n+1} - 1$. Пусть элемент $y \in P_{2,n}$, задается своей таблицей с коэффициентами у многочленов $y_1, y_2, y_3, \ldots$, как определено в (1.1). Посмотрим на y, как на переменную, которая пробегает всю группу $P_{2,n}$. Матрица $Y_n = f_n(y)$ однозначно определяется переменными $y_1, y_2, y_3, \ldots$, пробегающими кольцо $\mathbb{Z}_2$. Отсюда, можно считать, что Y_n — элемент группы $UT_m(\mathbb{Z}_2^R[y_1, \ldots, y_m])$ над кольцом редуцированных многочленов $\mathbb{Z}_2^R[y_1, \ldots, y_m]$ от переменных $y_1, \ldots, y_m$. Фиксируем изоморфизм

$$T_y : \mathbb{Z}_2^R[y_1, \ldots, y_m] \to \mathbb{Z}_2^R[t_1, \ldots, t_m],$$

полученный при сопоставлении переменных $y_s \to t_s$, $y_s, t_s \in \mathbb{Z}_2$, $1 \leq s \leq m$. Таким образом, $T_n = T_y(Y_n)$ является элементом кольца $UT_m(\mathbb{Z}_2^R[t_1, \ldots, t_m])$ с элементами из кольца редуцированных многочленов $\mathbb{Z}_2^R[t_1, \ldots, t_m]$ от переменных $t_1, \ldots, t_m$, пробегающих $\mathbb{Z}_2$. Отметим, что для $x \in P_{2,n}$ можно считать матрицу $f_n(x)$ принадлежащей группе $UT_m(\mathbb{Z}_2^R[t_1, \ldots, t_m])$. При этом, элементы этой матрицы — константы. Как следствие получаем корректность произведения $f_n(x) \cdot T_n$, как элемента группы $UT_m(\mathbb{Z}_2^R[t_1, \ldots, t_m])$.

Для $i \in \{1, \ldots, m\}$ фиксируем $k \geq 0$ и l, удовлетворяющие условиям: $i = 2^k + l - 1$, $1 \leq l \leq 2^k$. Обозначим, $r_1(i) = k$, $r_2(i) = l$, $\kappa(i) = 2^k + 1$. Пусть $x \in P_{2,n}$. Положим, $M_n(x) = f_n(x) \cdot T_n$. Определим многочлены

$$\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_i) = t_i + (M_n(x))_{\kappa(i), r_2(i)}. \tag{2.1}$$

В работе [5] рассматривалось вложение определенного вида группы $P_{2,n}$ в группу $P_{2,m-1}$. В частности отмечалось, что каждый многочлен $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_i)$ зависит только от переменных $t_1, \ldots, t_{i-1}$. В данной работе мы рассматриваем вложение $P_{2,n}$ в $P_{2,m-1}$ несколько иного вида. Однако, основные утверждения работы [5] остаются верными. Рассмотрим эти утверждения и докажем их в условиях нового вложения.

В начале покажем вспомогательный результат.

Лемма 2.1. *Пусть в матрице T_n элемент $(T_n)_{u,v}$ представляется в виде слова $\omega_{u,v}(T_n)$ от других элементов матрицы T_n:*

$$(T_n)_{u,v} = (T_n)_{u_1,v_1} \cdot (T_n)_{u_b,v_b} + \cdots + (T_n)_{u_1',v_1'} \cdot (T_n)_{u_c',v_c'} = \omega_{u,v}(T_n). \quad (2.2)$$

Тогда, для любого $y \in P_{2,n}$ матрица $M_n(y) = f_n(y) \cdot T_n$ удовлетворяет аналогичному соотношению $M_n(y)_{u,v} = \omega_{u,v}(M_n(y))$, $u, v \in \{1, \ldots, 2^n + 1\}$.

Доказательство. Зафиксируем значения переменных $t_1, \ldots, t_m$: $t_1 = z_1, \ldots, t_m = z_m$, $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{Z}_2$. Рассмотрим элемент $z \in P_{2,n}$ с последовательностью коэффициентов в таблице многочленов $z_1, \ldots, z_m$. По определению матрицы T_n, в силу (2.2), матрица $f_n(z)$ удовлетворяет равенству: $f_n(z)_{u,v} = \omega_{u,v}(f_n(z))$, для данных $u, v \in \{1, \ldots, 2^n + 1\}$. Так как $f_n(y)f_n(z) = f_n(yz)$, то аналогичное равенство выполнится и для элемента yz по аналогичной причине. В силу правильности наших рассуждений для любого элемента $z \in P_{2,n}$, получаем верность равенства $(f_n(y)T_n)_{u,v} = \omega_{u,v}(f_n(y)T_n)$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть*

$$x = [x_1, x_2 + x_3 t_1, \ldots, x_{2^n} + \cdots + x_{2^{n+1}-1} t_1 \cdots t_n] \in P_{2,n}.$$

Отображение $\rho_n : P_{2,n} \to P_{2,m-1}$ заданное равенством вида

$$\rho_n(x) = [\Phi_1^{\{x\}}, \Phi_2^{\{x\}}(t_1), \ldots, \Phi_m^{\{x\}}(\bar{t}_{m-1})] \quad (2.3)$$

является мономорфизмом.

Доказательство. Пусть x переменная, пробегающая группу $P_{2,n}$ с таблицей из условия леммы.

Для $0 \leq i \leq m$ рассмотрим $k = r_1(i)$, $l = r_2(i)$. В силу леммы1.1, учитывая вид $2^k + 1$-ой строки матрицы $f_n(x)$, получаем

$$\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_i) = \sum_{s=1}^{2^k} x_{2^k+s-1}(T_n)_{s,l}. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что свободный член многочлена $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_i)$ равен x_{2^k+l-1}. Из леммы 1.1 (п. 2) следует, что в многочлене $(T_n)_{s,l}$, при $s \le 2^k$ нет одночленов t_j с индексами $j \ge 2^k$. Так как $i = 2^k+l-1 \ge 2^k$, то многочлен $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_i)$ не зависит от переменной t_i, а значит таблица в равенстве (2.3) задана корректно. Учитывая сказанное, далее будем писать $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_{i-1})$.

Так как соответствие $i \mapsto (r_1(i), r_2(i))$ является взаимно-однозначным при условии

$$0 \le i \le m \quad \text{и} \quad 0 \le r_1(i) \le n, \quad 1 \le r_2(i) \le 2^{r_1(i)},$$

то для каждого s $(1 \le s \le m)$ найдется многочлен $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_{i-1})$ в котором x_s свободный член и такое i — единственное.

Таким образом, для $x' \ne x$, $x' \in P_{2,n}$ можно найти такое s, что $x'_s \ne x_s$ и тогда

$$\Phi_i^{\{x'\}}(\bar{t}_{i-1}) \ne \Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_{i-1})$$

для подходящего i. Следовательно, ρ_n является инъекцией.

Осталось доказать, что ρ_n — гомоморфизм. Пусть $y = [y_0, y_1(t_1), \ldots, y_n(\bar{t}_n)]$. Покажем, что $\rho_n(xy) = \rho_n(x)\rho_n(y)$. Другими словами, необходимо показать, что для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\Phi_i^{\{x\}}(t_1 + \Phi_1^{\{y\}}, t_2 + \Phi_2^{\{y\}}(t_1), \ldots) + \Phi_i^{\{y\}}(\bar{t}_{i-1}) = \Phi_i^{\{xy\}}(\bar{t}_{i-1}). \qquad (2.5)$$

Для фиксированного $k \le n$ и $l \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$ рассмотрим (единственное) i с условием $r_1(i) = k$, $r_2(i) = l$. Так как $f_n(x)_{2^k+1,s} = x_{2^k+s-1}$, при $1 \le s \le 2^k$, то в многочлене $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_{i-1})$ слагаемое с коэффициентом x_{2^k+s-1} имеет вид $x_{2^k+s-1} \cdot (T_n)_{s,l}$. Допустим,

$$(T_n)_{s,l} = t_{i'_1} \cdots t_{i'_b} + \cdots + t_{i''_1} \cdots t_{i''_c}.$$

Тогда, слева в (2.5) при коэффициенте x_{2^k+s-1} вместо каждого одночлена вида $t_{i_1} \cdots t_{i_a}$ имеем следующий многочлен

$$(t_{i_1} + \Phi_{i_1}^{\{y\}}(\bar{t}_{i_1})) \cdots (t_{i_a} + \Phi_{i_a}^{\{y\}}(\bar{t}_{i_a})) = M_n(y)_{\kappa(i_1), r_2(i_1)} \cdots M_n(y)_{\kappa(i_a), r_2(i_a)}.$$

С другой стороны, в многочлене $\Phi_i^{\{xy\}}(\bar{t}_{i-1}) = t_i + (f_n(xy) \cdot T_n)_{2^k+1,l}$, в силу $f_n(xy) = f_n(x) \cdot f_n(y)$, слагаемое с коэффициентом x_{2^k+s-1} равно $(f_n(y) \cdot T_n)_{s,l} = M_n(y)_{s,l}$. Заметим теперь, что каждый одночлен вида $t_{i_1} \cdots t_{i_a}$ можно интерпретировать в терминах элементов матрицы T_n. А именно,

$$t_{i_1} \cdots t_{i_a} = (T_n)_{\kappa(i_1), r_2(i_1)} \ldots (T_n)_{\kappa(i_a), r_2(i_a)}.$$

По лемме 2.1, в элемент $M_n(y)_{s,l}$ входит выражение

$$M_n(y)_{\kappa(i_1),r_2(i_1)} \cdots M_n(y)_{\kappa(i_a),r_2(i_a)}.$$

Рассуждая таким образом для каждого одночлена — слагаемого многочлена $(T_n)_{s,l}$, мы получаем равенство многочленов слева и справа в (2.5) при любом коэффициенте x_{2^k+s-1}, а значит равенство (2.5) выполняется и лемма доказана. □

Согласно работе [5], зададим отображение $\Omega_n : I_n \to P_{2,m}$ следующим образом. Пусть $g = (y, w) \in I_n$, $y = [\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n(\bar{t}_n)] \in P_{2,n}$, $w \in Fun(P_{2,n}, \mathbb{Z}_2)$. Определим элемент $\Omega_n(g)$ своей таблицей

$$\Omega_n(g) = [\Phi_1^{\{y\}}, \Phi_2^{\{y\}}(t_1), \ldots, \Phi_m^{\{y\}}(\bar{t}_{m-1}), F_w(\bar{t}_m)], \tag{2.6}$$

в группе $P_{2,m}$, где многочлен последней координаты таблицы зависит только от функции w и равен

$$F_w(\bar{t}_m) = \sum_{x \in P_{2,n}} \big(w(x) \cdot \prod_{i=1}^{m} \big(t_i + \Phi_i^{\{x^{-1}\}}(\bar{t}_{i-1})\big)\big). \tag{2.7}$$

Результаты работы [5] полностью выполняются и для вложения, данного нами в этой работе.

Теорема 2.1. *Отображение* $\Omega_n : I_n \to P_{2,m}$ *для* $n \geq 0, m = 2^{n+1} - 1$ *является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $g = (y, w)$, $h = (z, u) \in I_n$. Тогда, по определению сплетения, в группе I_n имеем $g \cdot h = (y \cdot z, w^z \cdot u)$. Равенство $\Omega_n(g \cdot h) = \Omega_n(g) \cdot \Omega_n(h)$ следует из леммы 3 для всех координат таблицы элемента кроме последней. Последняя координата таблицы $\Omega_n((yz, w^z u))$, учитывая соотношение $(w^z u)(x) = w(zx) + u(x)$, равна $F_{w^z u}(\bar{t}_m) = F_{w^z}(\bar{t}_m) + F_u(\bar{t}_m)$. С другой стороны, последняя координата таблицы произведения $\Omega_n((y, w)) \cdot \Omega_n((z, u))$ равна $F_w(t_1 + \Phi_1^{\{z\}}, \ldots, t_m + \Phi_m^{\{z\}}(\bar{t}_{m-1})) + F_u(\bar{t}_m)$. Осталось проверить выполнение равенства

$$F_{w^z}(\bar{t}_m) = F_w(t_1 + \Phi_1^{\{z\}}, \ldots, t_m + \Phi_m^{\{z\}}(\bar{t}_{m-1})). \tag{2.8}$$

Посмотрим на многочлен справа, как на сумму по формуле (2.7). Слагаемое с коэффициентом $w(x)$ состоит из произведения, i-ый сомножитель которого имеет вид

$$t_i + \Phi_i^{\{z\}}(\bar{t}_{i-1}) + \Phi_i^{\{x^{-1}\}}(t_1 + \Phi_1^{\{z\}}, \ldots, t_{i-1} + \Phi_{i-1}^{\{z\}}(\bar{t}_{i-2})).$$

Рассмотрим левую часть выражения (2.8):

$$F_{w^z}(\overline{t}_m) = \sum_{x\in P_{2,n}} \Big(w^z(x) \cdot \prod_{i=1}^{m} \big(t_i + \Phi_i^{\{x^{-1}\}}(\overline{t}_{i-1})\big)\Big)$$
$$= \sum_{x\in P_{2,n}} \Big(w(x) \cdot \prod_{i=1}^{m} \big(t_i + \Phi_i^{\{x^{-1}z\}}(\overline{t}_{i-1})\big)\Big).$$

В силу леммы 2.2, для i-ого многочлена $(\rho_n(x^{-1}z))_i$ таблицы $\rho_n(x^{-1}z)$ выполняется

$$\Phi_i^{\{x^{-1}z\}}(\overline{t}_{i-1}) = (\rho_n(x^{-1}z))_i = (\rho_n(x^{-1}) \cdot \rho_n(z))_i$$
$$= \Phi_i^{\{x^{-1}\}}(t_1 + \Phi_1^{\{z\}}, \ldots, t_{i-1} + \Phi_{i-1}^{\{z\}}(\overline{t}_{i-2})) + \Phi_i^{\{z\}}(\overline{t}_{i-1}).$$

Отсюда видно попарное совпадение сомножителей левой и правой части выражения (2.8) в каждом слагаемом и гомоморфность отображения Ω_n доказана.

Докажем теперь, что Ω_n — инъекция. Точнее, докажем, что из $(y, w) \neq (z, u)$ следует $\Omega_n((y, w)) \neq \Omega_n((z, u))$. Неравенство верно при $y \neq z$ в силу леммы 2.2, поэтому далее считаем $y = z$. Рассмотрим выражение (2.7) для многочлена $F_w(\overline{t}_m)$.

Обозначим $v = x^{-1}$ и рассмотрим таблицу элемента

$$v = [v_0, v_1(t_1), \ldots, v_n(\overline{t}_n)] \in P_{2,n}.$$

Как уже отмечалось выше при доказательстве леммы 2.2, свободный член многочлена $t_i + \Phi_i^{\{v\}}(\overline{t}_{i-1}) = (f_n(v) \cdot T_n)_{\kappa(i),r_2(i)}$ равен $f_n(v)_{\kappa(i),r_2(i)} = v_{2^{r_1(i)}+r_2(i)-1}$. Зафиксируем значения $t_1, \ldots, t_m$ и рассмотрим систему уравнений

$$\Phi_i^{\{v\}}(\overline{t}_{i-1}) + t_i = 1, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

относительно неизвестных $v_1, \ldots, v_m$ (см. (2.4)). Как следует из леммы 1.1, переменная $v_{2^{r_1(i)}+r_2(i)-1}$ не встречается в многочленах $(f_n(v)\cdot T_n)_{\kappa(j),r_2(j)}$ для любых $j < i$. Следовательно, матрица коэффициентов нашей системы m уравнений и m неизвестных может быть представлена в унитреугольном виде, а значит система имеет единственное решение $v'_1, \ldots, v'_m \in \mathbb{Z}_2$. Это решение системы позволяет получить элемент $\lambda(t_1, \ldots, t_m) \in P_{2,n}$, таблица которого формируется из последовательности многочленов с коэффициентами, соответственно, $v'_1, \ldots, v'_m$.

Слагаемое с коэффициентом $w(x)$ будет ненулевым только при условии равенства 1 значений всех сомножителей в формуле (2.7). Отсюда, при фиксированном наборе $t_1, \dots, t_m$ мы имеем: $F_w(t_1, \dots, t_m) = w(\lambda(t_1, \dots, t_m))$, для любого $w \in Fun(P_{2,n}, \mathbb{Z}_2)$. Причем для иного набора значений $t_1, \dots, t_m$, как видно из рассуждений выше, мы будем иметь другое $\lambda(t_1, \dots, t_m) \in P_{2,n}$. Следовательно, при $w \neq u$ и для некоторого $x \in P_{2,n}$ с условием $w(x) \neq u(x)$ мы имеем (единственный) набор элементов $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{Z}_2$ с условием $x = \lambda(t_1, \dots, t_m)$. Отсюда получаем $F_w(t_1, \dots, t_m) = w(\lambda(t_1, \dots, t_m)) = w(x) \neq u(x) = F_u(t_1, \dots, t_m)$. Значит, Ω_n – инъекция, а следовательно и мономорфизм. $\square$

Пример 2.1. Ввиду немалой роли, которую в работе играют многочлены $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_{i-1})$, $1 \leq i \leq m$, приведем пример общего вида отображения $\rho_n(x)$ для $n = 2$, следуя работе [5]. Построим матрицу T_2, пользуясь ее определением:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & t_3 & 1 & 0 & 0 \\ t_1 \cdot t_2 & t_2 + t_3 + t_1 \cdot t_2 & t_1 & 1 & 0 \\ t_4 & t_5 & t_6 & t_7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$x = [x_1, x_2 + x_3 t_1, x_4 + x_5 t_1 + x_6 t_2 + x_7 t_1 \cdot t_2].$$

Рассмотрим матрицу

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 \cdot x_2 & x_2 + x_3 + x_1 \cdot x_2 & x_1 & 1 & 0 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & 1 \end{pmatrix}$$

и матрицу $M_2(x) = f_2(x) \cdot T_2$. По определению (2.1) (можно воспользоваться также (2.4)), имеем

$$\Phi_1^{\{x\}} = x_1, \quad \Phi_2^{\{x\}}(t_1) = x_2 + x_3 t_1, \quad \Phi_3^{\{x\}}(t_1, t_2) = x_3,$$

$$\Phi_4^{\{x\}}(\bar{t}_3) = x_4 + x_5 t_1 + x_6 t_2 + x_7 t_1 \cdot t_2,$$

$$\Phi_5^{\{x\}}(\bar{t}_4) = x_5 + x_6 t_3 + x_7(t_2 + t_1 \cdot t_2 + t_3),$$

$$\Phi_6^{\{x\}}(\bar{t}_5) = x_6 + x_7 t_1, \quad \Phi_7^{\{y\}}(\bar{t}_6) = x_7.$$

Отсюда и из леммы 2.2 следует значение $\rho_2(x)$.

3. Образы порождающих группы I_n в группе $P_{2,m}$

Представление f_n групп $P_{2,n}$, заданное равенством (1.2), исследовалось также в работе [8]. А именно, были найдены образы порождающих этой группы. Систему порождающих $\{\Xi_{k,n}\}_{k=0}^n$ группы $P_{2,n}$ можно задать следующим образом. Элемент $\Xi_{k,n}$ определим таблицей вида

$$\Xi_{k,n} = [0, \dots, 0, t_1 \cdots t_k, 0, \dots, 0],$$

где ненулевой многочлен в таблице находится на k-м месте (считая нумерацию от нуля). Описание образов порождающих $\Xi_{k,n}$ при мономорфизме f_n дается следующим утверждением.

Лемма 3.1 ([8]). *Пусть $\{\Xi_{k,n}\}_{k=0}^n$ — система порождающих группы $P_{2,n}$, f_n — точное представление, заданное равенством* (1.2). *Тогда матрица $C_{k,n} = f_n(\Xi_{k,n}) \in UT_{2^n+1}(2)$ имеет следующий вид. Элемент матрицы $(C_{k,n})_{i,j} = 1$, если и только если, либо $i = j$, либо $j = s \cdot 2^{k+1} + 2^k$ для некоторого $s \geq 0$ и $i \in \{j+1, \dots, j+2^k\}$.*

Воспользуемся этой леммой для получения образа ρ_n порождающих некоторой системы порождающих группы I_n. Так как группа Калужнина $P_{2,n}$ является $(n+1)$-порожденной, то группа I_n — $(n+2)$-порожденной. Наиболее естественную систему порождающих можно построить следующим образом.

Лемма 3.2. *Рассмотрим множество элементов группы I_n:*

$$S(I_n) = \{\overline{\Xi}_{k,n}; \quad 0 \leq k \leq n\} \cup \{\overline{\varepsilon}\}, \tag{3.1}$$

где $\overline{\Xi}_{k,n} = (\Xi_{k,n}, \dot{0})$, $\overline{\varepsilon} = (e, \varepsilon)$, $\dot{0} : P_{2,n} \to \mathbb{Z}_2$ — нулевая функция, принимающая значение 0 для всех аргументов, $e \in P_{2,n}$ — нейтральный элемент группы $P_{2,n}$ и $\varepsilon \in Fun(P_{2,n}, \mathbb{Z}_2)$, функция, заданная по правилу

$$\varepsilon(y) = \begin{cases} 0, & y \neq e \\ 1, & y = e. \end{cases}$$

Тогда данное множество порождает всю группу I_n.

Доказательство. Пусть $y \in P_{2,n}$, $w \in Fun(P_{2,n}, \mathbb{Z}_2)$. Покажем, что элемент $(y, w) \in I_n$ может быть представлен в рассматриваемой системе элементов. Ясно, что если y представлено в виде слова $y = Z(\Xi_{0,n}, \dots, \Xi_{n,n})$ в системе порождающих группы $P_{2,n}$, то элемент $(y, \dot{0})$ группы I_n удовлетворяет равенству

$$(y, \dot{0}) = Z(\overline{\Xi}_{0,n}, \dots, \overline{\Xi}_{n,n}).$$

Для функции $w \in Fun(P_{2,n}, \mathbb{Z}_2)$ рассмотрим его носитель (множество, на котором функция принимает ненулевые значения)

$$D(w) = \{y_1, \ldots, y_k\}.$$

Из определения операции умножения в сплетении следует, что

$$\overline{\varepsilon}^{\overline{\Xi}_{i,n}} = \overline{\Xi}_{i,n}^{-1} \cdot \overline{\varepsilon} \cdot \overline{\Xi}_{i,n} = (e, \varepsilon^{\Xi_{i,n}}), 1 \leq i \leq n.$$

При этом, носитель функции $\varepsilon^{\Xi_{i,n}}$ состоит из одного элемента $\Xi_{i,n}$, $1 \leq i \leq n$. Следовательно,

$$(e, w) = \overline{\varepsilon}^{\overline{y}_1} \cdot \cdots \cdot \overline{\varepsilon}^{\overline{y}_k},$$

где $\overline{y}_j = (y_j, \dot{0})$, $1 \leq j \leq k$ и

$$(y, w) = (y, \dot{0}) \cdot (e, w).$$

Лемма доказана. □

Для матрицы $T_n \in UT_m(\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_m])$, определенной в предыдущем разделе, рассмотрим множество многочленов $\omega_{s,k}(\overline{t}_{s-1})$, $1 \leq s \leq m$, заданных равенством

$$\omega_{s,k}(\overline{t}_{s-1}) = \begin{cases} (T_n)_{2^k, s-2^k+1}, & \text{если } 2^k \leq s \leq 2^{k+1} - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 3.1. *Пусть $S(I_n)$ — система порождающих группы I_n. Тогда, для отображения Ω_n, заданного в* (2.6)*, выполняются равенства*

$$\Omega_n(\Xi_{k,n}) = [\omega_{1,k}, \omega_{2,k}(t_1), \ldots, \omega_{m,k}(\overline{t}_{m-1}), 0]$$

и

$$\Omega_n(\overline{\varepsilon}) = [0, \ldots, 0, t_1 \ldots t_m].$$

Доказательство. Зафиксируем k и получим $\rho_n(\Xi_{k,n})$ с помощью лемм 2.2 и 3.1. Для этого, необходимо рассмотреть многочлены $\Phi_{s,k}(\overline{t}_{s-1}) = \Phi_s^{\{\Xi_{k,n}\}}(\overline{t}_{s-1})$. Имеем,

$$\Phi_{s,k}(\overline{t}_{s-1}) = t_s + (f_n(\Xi_{k,n}) T_n)_{\kappa(s), r_2(s)}.$$

Заметим, что $\kappa(s)$ имеет вид $2^r + 1$ для некоторого r. По лемме 4, матрица $C_{k,n} = f_n(\Xi_{k,n})$ имеет строку, отличную от соответствующей строки единичной матрицы, с номером $2^r + 1$ только в случае $j = 2^k$ и $i = j + 1 = 2^k + 1$. Следовательно, $\Phi_{s,k}(\overline{t}_{s-1}) \neq 0$ только при условии

$r_1(s) = k$. По лемме 3.1, в каждую строку матрицы $C_{k,n}$ входит не более двух единиц. Отсюда, $\Phi_{s,k}(\bar{t}_{s-1}) = (C_{k,n})_{2^k+1,2^k} \cdot (T_n)_{2^k,r_2(s)} = (T_n)_{2^k,r_2(s)}$. По определению функции $r_1(s)$, подходящие значения s пробегают множество значений $\{2^k, 2^k+1, \ldots, 2^{k+1}-1\}$. Кроме того, $r_2(s) = s - 2^k + 1$ и $\Phi_{s,k}(\bar{t}_{s-1}) = \omega_{s,k}(\bar{t}_{s-1})$. Заметим теперь, что $F_{\dot{0}}(\bar{t}_m) = 0$. Утверждение теоремы о порождающих $\overline{\Xi}_{k,n}$ следует далее из определения Ω_n (2.6).

Значение $\Omega_n(\bar{\varepsilon})$ получим из формул (2.6) и (2.7). Легко видеть, что $\Phi_s^{\{e\}} = 0$, где e — нейтральный элемент группы $P_{2,n}$. Воспользуемся теперь (2.7) для функции $w = \varepsilon$. В сумме (2.7), в силу определения функции ε, только одно слагаемое (соответствующее параметру $x = e$) отлично от нуля. Отсюда,

$$F_\varepsilon(\bar{t}_m) = \prod_{i=1}^{m}\bigl(t_i + \Phi_i^{\{e\}}(\bar{t}_{i-1})\bigr) = \prod_{i=1}^{m} t_i.$$

Теорема доказана. □

Пример 3.1. При помощи теоремы 3.1, покажем образы порождающих группы I_2 в группе $P_{2,7}$ при мономорфизме Ω_2. Из матрицы T_2 (пример 2.1) получаем многочлены $\omega_{s,k}$, $1 \le s \le 7$, $0 \le k \le 2$. Имеем,

$$\Omega_2(\overline{\Xi}_{0,2}) = [1,0,0,0,0,0,0,0],\ \Omega_2(\overline{\Xi}_{1,2}) = [0,t_1,1,0,0,0,0,0],$$

$$\Omega_2(\overline{\Xi}_{2,2}) = [0,0,0,t_1t_2,t_1t_2+t_2+t_3,t_1,1,0],$$

$$\Omega_2(\bar{\varepsilon}) = [0,0,0,0,0,0,0,t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7].$$

Отметим, что порядок группы $|I_n| = 2^{q_n}$, где

$$q_n = 2^{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} - 1.$$

С другой стороны, порядок группы $|P_{2,m}| = 2^{p_m}$, где

$$p_m = 2^{m+1} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

Поэтому, не существует мономорфизмов группы I_n в группы Калужнина меньших, чем $m = 2^{n+1} - 1$ индексов.

Пусть $G \le P_{2,n}$ — произвольная подгруппа группы Калужнина и

$$S(G) = \{Q_j(\Xi_{0,n}, \ldots, \Xi_{n,n});\ j = 1, \ldots, R\} \text{ —}$$

система ее порождающих, представленных в виде слов от порождающих группы Калужнина. Тогда, для порождающего $Q_j =$

$\Xi_{i_1,n}\cdots\Xi_{i_a,n}$ можно получить многочлен $\Phi_i^{\{Q_j\}}(\bar{t}_{i-1})$, взятием i-ой координаты в таблице $\rho_n(Q_j)=\rho_n(\Xi_{i_1,n})\cdots\rho_n(\Xi_{i_a,n})$. Таблица $\rho_n(Q_j)$ в свою очередь легко получается при помощи леммы 2.2 и теоремы 3.1.

По аналогии с случаем, описанным выше, в группе $\mathbb{Z}_2 \wr G$ можно выбрать систему порождающих в виде множества

$$S(\mathbb{Z}_2 \wr G)=\{\overline{Q}_j;\ 1\le j\le R\}\cup\{\overline{\varepsilon}\},$$

где $\overline{Q}_j=(Q_j,\dot{0})$ и $\overline{\varepsilon}=(e,\varepsilon)$ — элемент, с функцией ε, имеющей единственный носитель $e\in G$. Рассмотрим,

$$F_{w,G}(\bar{t}_m)=\sum_{x\in G}\left(w(x)\cdot\prod_{i=1}^{m}\left(t_i+\Phi_i^{\{x^{-1}\}}(\bar{t}_{i-1})\right)\right).$$

Как следствие наших рассуждений и теоремы 2.1, получаем следующий результат.

Теорема 3.2. *Отображение $\Omega_{n,G}:\mathbb{Z}_2 \wr G\to P_{2,m}$, заданное для каждого элемента $g=(y,w)\in\mathbb{Z}_2 \wr G$ равенством*

$$\Omega_{n,G}((y,w))=[\Phi_1^{\{y\}},\Phi_2^{\{y\}}(t_1),\ldots,\Phi_m^{\{y\}}(\bar{t}_{m-1}),F_{w,G}(\bar{t}_m)],$$

является мономорфизмом.

Доказательство. Гомоморфность отображения $\Omega_{n,G}$ следует из теоремы 2.1 в силу того, что G является подгруппой группы $P_{2,n}$. Покажем, что это отображение является инъекцией. По аналогии с доказательством теоремы 2.1, рассмотрим $(y,w)\ne(y,u)\in\mathbb{Z}_2 \wr G$. Пусть $x\in G$ такой элемент, что $w(x)\ne u(x)$. Как и в случае $G=P_{2,n}$, для данного x, найдется набор $t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{Z}_2$, который является решением системы

$$\Phi_i^{\{x^{-1}\}}(\bar{t}_{i-1})+t_i=1\ ,\ i\in\{1,2,\ldots,m\}$$

Отсюда, $F_w(t_1,\ldots,t_m)=w(x)\ne u(x)=F_u(t_1,\ldots,t_m)$. Теорема доказана. □

Мы указали мономорфизм группы $\mathbb{Z}_2 \wr G$ в группу $P_{2,m}$. Выбранное m является наименьшим, при условии, что $G\le P_{2,n}$ для наименьшего возможного n.

Литература

[1] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, СПб: Издательство Лань, 2009, 288 с.

[2] L. A. Kaloujnine, *La structure des p-groupes de Sylow des proupes symetriques finis* // Ann. Sci. Ecole Norm. Super, **65** (1948), 239–276.

[3] Л. А. Калужнин, *Избранные главы теории групп*, Киев. Изд-во КГУ, 1979, 52 стр.

[4] T. G. Ceccherini-Silberstein, Yu. Leonov, F. Scarabotti, F. Tolli, *Generalized Kaloujnine groups, uniseriality and height of automorphisms* // Intern. J. of Algebra and Computations, **15** (2005), No. 3, 503–527.

[5] Ю. Г. Леонов, *Вложения кратных сплетений групп $\mathbb{Z}_2$ в группы Калужнина* // Матем. студії, **28** (2007), No. 1, 18–24.

[6] Ю. Г. Леонов, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский, *Зображення вінцевих добутків унітрикутними матрицями* // Допов. АН Украіни, (2005), No. 4, 29–33.

[7] Ю. Г. Леонов, *Представление финитно-аппроксимируемых 2-групп бесконечномерными унитреугольными матрицами над полем из двух элементов* // Матем. студії, **22** (2004), No. 2, 134–140.

[8] Ю. Г. Леонов, В. В. Ясинський, *Про зображення кратних вінцевих добутків груп $\mathbb{Z}_2$* // Вісник Київського Ун-ту. сер. фіз.-мат. наук., (2007), No. 2, 36–41.

Сведения об авторах

Юрий Григорьевич Леонов

Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова
ул. Кузнечная 1,
65029 Одесса,
Украина
E-Mail: leonov_yu@yahoo.com