Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 2, 220 – 240

Случайные эволюции с локально независимыми приращениями на возрастающих интервалах времени

Владимир С. Королюк

Аннотация. Обсуждаются три основные схемы предельных теорем для случайных эволюций: усреднение, диффузионная аппроксимация и асимптотика больших уклонений.

Рассматриваются марковские случайные эволюции с локально независимыми приращениями на возрастающих интервалах времени $T_\varepsilon = t/\varepsilon \to \infty, \ \varepsilon \to 0$.

Асимптотическое поведение случайных эволюций исследуется с применением решений проблем сингулярного возмущения для приводимо обратимых операторов.

2010 MSC. 60H25, 60H30.

Ключевые слова и фразы. Марковские случайные эволюции, усреднение, диффузионная аппроксимация, асимптотика больших уклонений.

Введение

Исследование асимптотического поведения случайных эволюций на возрастающих интервалах времени основано на использовании решений проблемы сингулярного возмущения для приводимо обратимого оператора [1, гл. 5]. При этом обоснование предельного перехода реализуется с использованием мартингальной характеризации марковских процессов и условий относительной компактности вероятностных мер [2].

Основным объектом асимптотического анализа случайной эволюции служит производящий оператор соответствующего двухкомпонентного марковского процесса [1, гл. 2].

Асимптотический анализ осуществляется для случайных эволюций в схеме серий с малым параметром серии $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ [1, гл. 3].

Статья поступила в редакцию 1.03.2011

ISSN 1810 – 3200.

Результаты асимптотического анализа существенно зависят от условий нормирования случайной эволюции малым параметром серии.

В теории случайных процессов существуют три основные схемы предельных теорем:

1. Закон больших чисел или усреднение.

2. Центральная предельная теорема или диффузионная аппроксимация.

3. Асимптотика больших уклонений или оценка экспоненциально малых вероятностей.

Каждой из основных схем соответствуют свои условия нормировки параметром серии $\varepsilon \to 0$.

Существующая литература по предельным теоремам для случайных процессов и, в частности, для случайных эволюций, практически необозрима.

Проще всего обратиться к основным монографиям, посвященным теории предельных теорем.

Асимптотический анализ случайных эволюций на возрастающих интервалах времени достаточно изучить в монографиях, приведенных в списке литературы, а также воспользоваться списками литературы, приведенными в указанных монографиях.

1. Случайные эволюции с локально независимыми приращениями

Стохастический аддитивный функционал [1, § 2.6] задается соотношениями

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)), \quad t \geq 0,\ \xi_0 \in R^d. \tag{1.1}$$

Марковский переключающий процесс $x(t)$, $t \geq 0$, в стандартном фазовом пространстве $(E, \mathcal{E})$ задается генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \quad x \in E, \tag{1.2}$$

на тест-функциях $\varphi(x) \in B_E$ — банахово пространство ограниченных функций с sup-нормой: $\|\varphi(x)\| := \sup_{x\in E} |\varphi(x)|$.

Случайная эволюция в евклидовом пространстве R^d задается совокупностью процессов с локально независимыми приращениями $\eta(t;x),\ t \geq 0,\ x \in E$, определяемых генераторами

$$\mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u) = \int\limits_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma(u, dv, x), \quad u \in R^d,\ x \in E. \tag{1.3}$$

Марковская случайная эволюция (1.1) характеризуется генератором [1, § 2.6]

$$\mathbb{L}\varphi(u, x) = Q\varphi(\cdot, x) + \mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u, \cdot) \tag{1.4}$$

двухкомпонентного марковского процесса $\xi(t), x(t),\ t \geq 0$.

2. Процессы с локально независимыми приращениями в схеме серий

Рассматриваются три основные схемы серий: усреднение, диффузионная аппроксимация и большие уклонения в схеме асимптотически малой диффузии.

2.1. Усреднение

Процессы с локально независимыми приращениями (*ПЛНП*) в схеме усреднения задаются генератором

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int\limits_{R^d} [\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma(u, dv), \quad u \in R^d, \tag{2.1}$$

что соответствует нормировке

$$\eta^\varepsilon(t) = \varepsilon\eta(t/\varepsilon), \quad t \geq 0.$$

Так что ПЛНП $\eta^\varepsilon(t),\ t \geq 0$, рассматриваются на возрастающих интервалах времени $T^\varepsilon = t/\varepsilon \to \infty,\ \varepsilon \to 0$.

На достаточно гладких тест-функциях $\varphi(u) \in C^2(R^d)$ генератор (2.1) допускает асимптотическое представление

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon\varphi(u) = b(u)\varphi'(u) + \delta^\varepsilon\varphi(u), \tag{2.2}$$

где

$$b(u)\varphi'(u) := \sum_{k=1}^d b_k(u)\varphi'_k(u),$$

$$\varphi'_k(u) := \partial\varphi(u)/\partial u_k, \quad b_k(u) := \int\limits_{R^d} v_k\Gamma(u, dv), \quad 1 \leq k \leq d,$$

с пренебрежимым членом

$$\|\delta^\varepsilon\varphi(u)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0,\ \varphi(u) \in C^2(R^d), \tag{2.3}$$

Здесь $b(u) := \int_{R^d} v\Gamma(u, dv)$ — вектор первых моментов процесса.

Асимптотическое представление (2.2) генератора ПЛП служит основанием для доказательства сходимости

$$\eta^\varepsilon(t) = \varepsilon\eta(t/\varepsilon) \Rightarrow \eta^0(t), \quad \varepsilon \to 0,$$

в котором предельный процесс задается решением эволюционного уравнения [1, § 3.3.1]

$$d\eta^0(t)/dt = b(\eta^0(t)), \quad \eta^0(0) = \eta_0.$$

2.2. Диффузионная аппроксимация

ПЛНП в схеме диффузионной аппроксимации задаются нормировкой

$$\eta^\varepsilon(t) = \varepsilon\eta(t/\varepsilon^2), \quad t \geq 0, \tag{2.4}$$

при дополнительном *условии баланса* (УБ):

$$b(u) = \int\limits_{R^d} v\Gamma(u, dv) \equiv 0. \tag{2.5}$$

Генератор нормированного процесса (2.4) имеет вид

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-2}\int\limits_{R^d}[\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma(u, dv), \quad u \in R^d. \tag{2.6}$$

На достаточно гладких тест-функциях $\varphi(u) \in C^3(R^d)$ генератор (2.6) допускает асимптотическое представление

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon\varphi(u) = \frac{1}{2}B(u)\varphi''(u) + \delta^\varepsilon\varphi(u), \tag{2.7}$$

где

$$B(u)\varphi''(u) := \sum_{k,r=1}^{d} B_{kr}(u)\partial^2\varphi(u)/\partial u_k\partial u_r,$$

с пренебрежимым членом

$$\|\delta^\varepsilon\varphi(u)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0,\ \varphi(u) \in C^3(R^d).$$

Главный член в (2.7) задает диффузионный процесс с матрицей ковариаций

$$B(u) = [B_{kr}(u); \quad 1 \le k, r \le d],$$

$$B_{kr}(u) = \int\limits_{R^d} v_k v_r \Gamma(u, dv), \quad 1 \le k, r \le d.$$

Асимптотическое представление (2.7) служит основанием для доказательства сходимости процессов [1, гл. 6]

$$\eta^\varepsilon(t) = \varepsilon\eta(t/\varepsilon^2) \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Здесь предельный диффузионный процесс $\zeta(t), t \ge 0$, задается стохастическим уравнением

$$d\zeta(t) = \sigma(\zeta(t))dw(t), \quad \sigma^*(u)\sigma(u) = B(u).$$

2.3. Асимптотически малая диффузия

ПЛНП в схеме асимптотически малой диффузии задаются нормировкой [4]

$$\eta^\varepsilon(t) = \varepsilon^2\eta(t/\varepsilon^3), \quad t \ge 0. \tag{2.8}$$

При дополнительном УБ:

$$b(u) = \int\limits_{R^d} v\Gamma(u, dv) \equiv 0,$$

соответствующий генератор процесса (2.8) имеет вид

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-3}\int\limits_{R^d}[\varphi(u+\varepsilon^2 v) - \varphi(u)]\Gamma(u, dv), \quad u \in R^d. \tag{2.9}$$

На достаточно гладких тест-функциях $\varphi(u) \in C^3(R^d)$, генератор (2.9) допускает асимптотическое представление

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon\frac{1}{2}B(u)\varphi''(u) + \varepsilon\delta^\varepsilon\varphi(u), \tag{2.10}$$

с пренебрежимым членом

$$\|\delta^\varepsilon\varphi(u)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \ \varphi(u) \in C^3(R^d).$$

Асимптотическое представление (2.10) генератора (2.9) процесса (2.8) означает, что имеет место асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} &\eta^\varepsilon(t) = \varepsilon^2\eta(t/\varepsilon^3) \simeq \varepsilon\zeta(t), \quad \varepsilon \to 0, \\ &d\zeta(t) = \sigma(\zeta(t))\,dw(t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Нормированный ПЛНП (2.8) асимптотически представим малой диффузией $\varepsilon\zeta(t), \ t \ge 0$, с матрицей ковариаций $B(u) = \sigma^*(u)\sigma(u)$.

3. Случайные эволюции в схеме серий

Рассматриваются, как и в предыдущем пункте, три основные схемы асимптотического анализа: усреднение, диффузионная аппроксимация и асимптотически малая диффузия.

3.1. Усреднение

Случайная эволюция в схеме усреднения задается генератором

$$\mathbb{L}^\varepsilon \varphi(u,x) = [\varepsilon^{-1} Q + \mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)]\varphi(u,x). \tag{3.1}$$

Здесь по определению (ср. п. 2.1)

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int\limits_{R^d} [\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma(u, dv; x). \tag{3.2}$$

Представление генератора случайной эволюции (3.1)–(3.2) означает, что двухкомпонентный марковский процесс, задающий случайную эволюцию в схеме усреднения, имеет следующую нормировку:

$$\varepsilon\xi(t/\varepsilon), \quad x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon), \quad t \geq 0, \ \varepsilon \to 0. \tag{3.3}$$

Так что случайная эволюция рассматривается на возрастающих интервалах времени $T^\varepsilon = t/\varepsilon \to \infty, \ \varepsilon \to 0$.

Асимптотический анализ поведения случайной эволюции (3.3), задаваемой генератором (3.1)–(3.2), осуществляется применением *решения проблемы сингулярного возмущения для приводимо обратимого оператора* Q, задающего переключающий марковский процесс $x(t), \ t \geq 0$ (см. [1, гл. 3, 5, 6]).

Основное предположение следующее:

П1: Марковский процесс $x(t), \ t \geq 0$, в стандартном фазовом пространстве $(E, \mathcal{E})$, задаваемый генератором (1.2), *равномерно эргодический со стационарным распределением* $\pi(A), \ A \in \mathcal{E}$.

При этом условии генератор Q является приводимо обратимым с нуль-пространством, задаваемом проектором [1, гл. 5]

$$\Pi\varphi(x) = \int\limits_E \pi(dx)\varphi(x) =: \widehat{\varphi}\mathbf{1}(x), \quad \mathbf{1}(x) := 1, \ x \in E. \tag{3.4}$$

При этом существует ограниченный *потенциал* R_0, задаваемый решением уравнения

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I. \tag{3.5}$$

Следовательно, уравнение Пуассона

$$Q\varphi(x) = \psi(x), \quad \Pi\psi(x) = 0, \tag{3.6}$$

имеет единственное решение в подпространстве значений генератора Q, которое задается равенством

$$\varphi(x) = -R_0\psi(x). \tag{3.7}$$

Асимптотическое представление генератора (3.1)–(3.2) случайной эволюции (3.3) осуществляется на возмущенной тест-функции [1, гл. 5]

$$\varphi^\varepsilon(u, x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u, x).$$

Лемма 3.1. *Имеет место асимптотическое представление*

$$\mathbb{L}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u, x) = \widehat{\mathbf{L}}\varphi(u) + \delta_L^\varepsilon(x)\varphi(u) \tag{3.8}$$

с пренебрежимым членом

$$\|\delta_L^\varepsilon(x)\varphi(u)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \ \varphi(u) \in C^2(R^d).$$

Предельный оператор задается соотношениями

$$\begin{gathered}
\widehat{\mathbf{L}}\varphi(u) = \widehat{b}(u)\varphi'(u), \\
\widehat{b}(u) = \Pi b(u; x) = \int\limits_E \pi(dx) b(u; x), \\
b(u; x) := \int\limits_{R^d} v\Gamma(u, dv; x).
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Так что предельный оператор (3.9) задает детерминированную эволюцию $\widehat{u}(t), \ t \geq 0$, которая описывается решением эволюционного уравнения

$$d\widehat{u}(t)/dt = \widehat{b}(\widehat{u}(t)), \quad \widehat{u}(0) = u_0 \in R^d. \tag{3.10}$$

Асимптотическое представление (3.8)–(3.9) служит основанием для доказательства сходимости случайных эволюций в схеме усреднения [1, гл. 6]:

$$\xi^\varepsilon(t) := \varepsilon\xi(t/\varepsilon) \Rightarrow \widehat{u}(t), \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.11}$$

при условии сходимости начальных значений

$$\varepsilon\xi^\varepsilon(0) \Rightarrow u_0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.12}$$

3.2. Диффузионная аппроксимация

Случайная эволюция в схеме диффузионной аппроксимации рассматривается при дополнительном *условии баланса.* В отличие от ситуации с анализом ПЛНП в п. 2, следует различать два условия баланса: *локальное* и *тотальное.*

3.2.1. Диффузионная аппроксимация при условии локального баланса:

$$\text{ЛБ:} \qquad b(u;x) := \int\limits_{R^d} v\Gamma(u,dv;x) \equiv 0. \tag{3.13}$$

Случайная эволюция рассматривается при следующей нормировке:

$$\xi^\varepsilon(t) = \varepsilon\xi(t/\varepsilon^2), \quad x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon^2). \tag{3.14}$$

Генератор случайной эволюции (3.14) имеет вид

$$\mathbb{L}^\varepsilon\varphi(u,x) = [\varepsilon^{-2}Q + \mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)]\varphi(u,x), \tag{3.15}$$

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2}\int\limits_{R^d}[\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma(u,dv;x). \tag{3.16}$$

На достаточно гладких функциях $\varphi(u) \in C^3(R^d)$ генератор (3.16) допускает асимптотическое представление

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \frac{1}{2}B(u;x)\varphi''(u) + \delta_\Gamma^\varepsilon(u;x)\varphi(u), \tag{3.17}$$

с пренебрежимым членом

$$\|\delta_\Gamma^\varepsilon(u;x)\varphi(u)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \ \varphi(u) \in C^3(R^d).$$

Главный член в (3.17) имеет вид

$$\begin{gathered} B(u;x)\varphi''(u) := \sum_{k,r}^{d} B_{kr}(u;x)\varphi''_{kr}(u), \\ B_{kr}(u;x) := \int\limits_{R^d} v_k v_r \Gamma(u,dv;x), \quad \varphi''_{kr}(u) := \partial^2\varphi(u)/\partial u_k \partial u_r. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Асимптотическое представление генератора (3.15)–(3.16) случайной эволюции (3.14) осуществляется на возмущенной тест-функции

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon^2\varphi_1(u,x).$$

Лемма 3.2. *В условиях ЛБ имеет место асимптотическое представление генератора* (3.15)–(3.16) *случайной эволюции* (3.14)

$$\mathbb{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = \widehat{\mathbf{L}}\varphi(u) + \delta_L^\varepsilon(u;x)\varphi(u), \tag{3.19}$$

с пренебрежимым членом

$$\|\delta_L^\varepsilon(u;x)\varphi(u)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \ \varphi(u) \in C^3(R^d).$$

Предельный генератор

$$\begin{gathered}\widehat{\mathbf{L}}\varphi(u) = \frac{1}{2}\widehat{B}(u)\varphi''(u),\\ \widehat{B}(u) = [\widehat{B}_{kr}(u);\ 1 \le k,r \le d],\\ \widehat{B}_{kr}(u) = \int\limits_E \pi(dx)B_{kr}(u;x), \quad B_{kr}(u;x) = \int\limits_{R^d} v_k v_r \Gamma(u,dv;x).\end{gathered} \tag{3.20}$$

Так что предельный генератор (3.20) *задает процесс диффузии*

$$\begin{aligned}&d\zeta(t) = \sigma(\zeta(t))dw(t), \quad t \ge 0,\ \zeta(0) = \zeta_0,\\ &\sigma^*(u)\sigma(u) = \widehat{B}(u).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Асимптотическое представление (3.19)–(3.20) генератора случайной эволюции (3.14) служит основанием для доказательства сходимости случайной эволюции в схеме диффузионной аппроксимации

$$\xi^\varepsilon(t) = \varepsilon\xi(t/\varepsilon^2) \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.22}$$

при дополнительном условии сходимости начальных значений

$$\varepsilon\xi^\varepsilon(0) \Rightarrow \zeta_0, \quad \varepsilon \to 0.$$

3.2.2. Диффузионная аппроксимация при условии тотального баланса

$$\text{ТБ:} \qquad \begin{aligned} b(u;x) &= \int\limits_{R^d} v\Gamma(u,dv;x) \not\equiv 0,\\ \widehat{b}(u) &= \int\limits_E \pi(dx)b(u;x) \equiv 0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Случайная эволюция рассматривается при такой же нормировке:

$$\xi^\varepsilon(t) = \varepsilon\xi(t/\varepsilon^2), \quad x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2),\ t \ge 0. \tag{3.24}$$

Генератор случайной эволюции (3.15)–(3.16) на достаточно гладких тест-функциях $\varphi(u) \in C^3(R^d)$ допускает асимптотическое разложение

$$\mathbb{L}^\varepsilon \varphi(u,x) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}(x) + \mathbf{B}(x)]\varphi(u,x), \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u) &= b(u;x)\varphi'(u), \\ \mathbf{B}(x)\varphi(u) &= \frac{1}{2}B(u;x)\varphi''(u). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Теперь асимптотическое представление генератора (3.25)–(3.26) осуществляется на возмущенных тест-функциях

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,x).$$

Лемма 3.3. *В условиях ТБ имеет место асимптотическое представление генератора* (3.25)–(3.26) *случайной эволюции* (3.24)

$$\mathbb{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = \widehat{\mathbb{L}}\varphi(u) + \delta_L^\varepsilon(u;x)\varphi(u), \tag{3.27}$$

с пренебрежимым членом

$$\|\delta_L^\varepsilon(u,x)\varphi(u)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0,\ \varphi(u) \in C^3(R^d).$$

Предельный генератор

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{L}}\varphi(u) &= \frac{1}{2}\widehat{B}(u)\varphi''(u) + \widehat{b}_0(u)\varphi'(u), \\ \widehat{B}(u) &= [\widehat{B}_{kr}(u);\ 1 \le k,r \le d], \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{gathered} \widehat{B}_{kr}(u) = \widehat{B}_{kr}^{(1)}(u) + \widehat{B}_{kr}^{(2)}(u), \\ \widehat{B}_{kr}^{(i)}(u) = \int_E \pi(dx) B_{kr}^{(i)}(u;x), \quad i = 1,2, \\ \widehat{B}_{kr}^{(1)}(u;x) = 2b^*(u;x)R_0 b(u;x), \\ \widehat{B}_{kr}^{(2)}(u;x) = \int_{R^d} v_k v_r \Gamma(u,dv;x), \\ \widehat{b}_0(u) = \int_E \pi(dx) b_0(u;x), \quad b_0(u;x) = 2b^*(u;x)R_0 b_u'(u;x). \end{gathered} \tag{3.29}$$

Следовательно, предельный генератор (3.28)–(3.29) задает диффузионный процесс со сносом

$$d\zeta(t) = \sigma(\zeta(t))dw(t) + \widehat{b}_0(\zeta(t))dt, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \tag{3.30}$$

для которого матрица ковариаций $\widehat{B}(u) = \sigma^*(u)\sigma(u)$ содержит два слагаемых:

$\widehat{B}^{(1)}(u) = [\widehat{B}^{(1)}_{kr}(u);\ 1 \le k, r \le d]$ определяется флуктуациями первых моментов случайной эволюции;

$\widehat{B}^{(2)}(u) = [\widehat{B}^{(2)}_{kr}(u);\ 1 \le k, r \le d]$ задается вторыми моментами случайной эволюции.

Асимптотическое представление (3.27)–(3.29) служит основанием для доказательства сходимости случайных эволюций

$$\varepsilon\xi(t/\varepsilon^2) \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.31}$$

при дополнительном условии сходимости начальных значений

$$\varepsilon\xi(0) \Rightarrow \zeta_0, \quad \varepsilon \to 0.$$

3.3. Асимптотически малая диффузия

Случайная эволюция в схеме асимптотически малой диффузии рассматривается при таком нормировании (ср. [4]):

$$\xi^\varepsilon(t) = \varepsilon^2\xi(t/\varepsilon^3), \quad x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2), \tag{3.32}$$

при *локальном условии баланса* (ΛБ). При *тотальном условии* ТБ изменяется нормирование переключающего марковского процесса:

$$\xi^\varepsilon(t) = \varepsilon^2\xi(t/\varepsilon^3), \quad x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^3). \tag{3.33}$$

Случайные эволюции (3.32) и (3.33) задаются генераторами

$$\mathbb{L}^\varepsilon_\Lambda\varphi(u,x) = [\varepsilon^{-2}Q + \mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)]\varphi(u,x), \tag{3.34}$$

и

$$\mathbb{L}^\varepsilon_T\varphi(u,x) = [\varepsilon^{-3}Q + \mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)]\varphi(u,x), \tag{3.35}$$

соответственно. Генератор эволюционной компоненты

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-3}\int\limits_{R^d}[\varphi(u+\varepsilon^2 v) - \varphi(u)]\Gamma(u,dv;x) \tag{3.36}$$

допускает асимптотические разложения

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \varepsilon\frac{1}{2}B(u;x)\varphi''(u) + \varepsilon\delta^\varepsilon_T(x)\varphi(u) \tag{3.37}$$

и

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1}b(u;x)\varphi'(u) + \varepsilon\frac{1}{2}B(u;x)\varphi''(u) + \varepsilon\delta^\varepsilon_\Lambda(x)\varphi(u), \tag{3.38}$$

соответственно.

Возникают следующие *проблемы сингулярного возмущения*:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{L}_\Lambda^\varepsilon \varphi(u,x) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon \mathbf{B}(x)]\varphi(u,x) + \varepsilon \delta_\Lambda^\varepsilon(x)\varphi(u,x), \\
&\mathbb{L}_T^\varepsilon \varphi(u,x) = [\varepsilon^{-3} Q + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}(x) + \varepsilon \mathbf{B}(x)]\varphi(u,x) + \varepsilon \delta_T^\varepsilon(x)\varphi(u,x).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Здесь $\mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u) := b(u;x)\varphi'(u)$.

Лемма 3.4. *Генераторы* (3.39) *допускают следующие асимптотические представления:*

$$\mathbb{L}_\Lambda^\varepsilon \varphi_\Lambda^\varepsilon(u,x) = \varepsilon \frac{1}{2}\widehat{B}(u)\varphi''(u) + \varepsilon \delta_\Lambda^\varepsilon(x)\varphi(u) \tag{3.40}$$

на возмущенных тест-функциях

$$\varphi_\Lambda^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon^2 \varphi_1(u,x),$$

и

$$\mathbb{L}_T^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = \varepsilon \left[\frac{1}{2}\widehat{B}_T(u)\varphi''(u) + \widehat{b}_0(u)\varphi'(u)\right] + \varepsilon \delta_T^\varepsilon(x)\varphi(u) \tag{3.41}$$

на возмущенных тест-функциях

$$\varphi_\Lambda^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon^2 \varphi_1(u,x) + \varepsilon^3 \varphi_2(u,x).$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\widehat{B}(u) = \int\limits_E \pi(dx) B(u;x), \quad B(u;x) = \int\limits_{R^d} v^* v \Gamma(u,dv;x), \\
\widehat{B}_T(u) = \int\limits_E \pi(dx) B_T(u;x), \quad B_T(u;x) = B(u;x) + B_0(u;x), \\
B_0(u;x) = 2b^*(u;x) R_0 b(u;x), \\
\widehat{b}_0(u) = \int\limits_E \pi(dx) b_0(u;x), \quad b_0(u;x) = b(u;x) R_0 b'_u(u;x).
\end{gathered} \tag{3.42}$$

Доказательство. Доказательство леммы 3.4 основано на использовании решений проблем сингулярного возмущения для приводимо обратимого оператора Q [1, гл. 5].

Приведем соответствующие необходимые выкладки.

Для оператора $\mathbb{L}_\Lambda^\varepsilon$ в (3.39) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_\Lambda^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) &= [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon \mathbf{B}(x)][\varphi(u) + \varepsilon^2 \varphi_1(u,x)] + \varepsilon \delta_\Lambda^\varepsilon(x)\varphi(u) \\
&= \varepsilon^{-2} Q\varphi(u) + [Q\varphi_1 + \varepsilon \mathbf{B}(x)\varphi(u)] + \varepsilon \delta_\Lambda^\varepsilon(x)\varphi(u)
\end{aligned}$$

$$= [Q\varphi_1 + \varepsilon\mathbf{B}(x)\varphi(u)] + \varepsilon\delta^\varepsilon_\Lambda(x)\varphi(u)$$
$$= \varepsilon\frac{1}{2}\widehat{B}(u)\varphi''(u) + \varepsilon\delta^\varepsilon_\Lambda(x)\varphi(u),$$

что совпадает с (3.40).

Далее для оператора $\mathbb{L}^\varepsilon_T$ в (3.39) имеем

$$\mathbb{L}^\varepsilon_T\varphi^\varepsilon(u,x) = [\varepsilon^{-3}Q + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}(x) + \varepsilon\mathbf{B}(x)][\varphi(u) + \varepsilon^2\varphi_1(u,x) + \varepsilon^3\varphi_2(u,x)]$$
$$= \varepsilon^{-3}Q\varphi(u) + \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + \mathbf{B}(x)\varphi(u)] + +[Q\varphi_2 + \varepsilon[\mathbf{\Gamma}(x)\varphi_1 + \mathbf{B}(x)\varphi(u)]$$
$$= [Q\varphi_2 + \varepsilon\left[\frac{1}{2}B_T(u;x)\varphi''(u) + b_0(u;x)\varphi'(u)\right] + \varepsilon\delta^\varepsilon_T(x)\varphi(u)$$
$$= \varepsilon\left[\frac{1}{2}\widehat{B}_T(u)\varphi''(u) + \widehat{b}_0(u)\varphi'(u)\right] + \varepsilon\delta^\varepsilon_T(x)\varphi(u),$$

что совпадает с (3.41). □

Асимптотические представления (3.40) и (3.41) служат основанием для доказательства асимптотических соотношений

$$\xi^\varepsilon_T(t) \simeq \varepsilon\zeta_T(t), \quad \xi^\varepsilon_\Lambda(t) \simeq \varepsilon\zeta_\Lambda(t), \quad t \geq 0,\ \varepsilon \to 0.$$

$$d\zeta_\Lambda(t) = \sigma_\Lambda(\zeta_\Lambda(t))\,dw(t), \quad d\zeta_T(t) = \sigma_T(\zeta_T(t))\,dw(t) + \widehat{b}_0(\zeta_T(t))\,dt,$$
$$\sigma^*_T(u)\sigma_T(u) = B_T(u), \quad \sigma^*_\Lambda(u)\sigma_\Lambda(u) = B_\Lambda(u).$$

4. Большие уклонения для случайных эволюций в схеме асимптотически малой диффузии

Случайные эволюции с локально независимыми приращениями рассматриваются в схеме серий с малым параметром серии $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$), на возрастающих интервалах времени в нормировке, допускающей аппроксимацию асимптотически малой диффузией (см. п. 3.3). Большие уклонения для случайных эволюций с ЛНП изучаются методом асимптотического анализа *экспоненциального генератора* (ЭГ) больших уклонений, развитого в монографии [3]. Экспоненциальный генератор $\mathbf{H}$ больших уклонений марковского процесса, задаваемого генератором $\mathbf{L}^\varepsilon$, определяется соотношением [3, часть I]:

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi(u) := e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon\mathbf{L}^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}. \tag{4.1}$$

Как показано в п. 3.3, аппроксимация случайной эволюции асимптотически малой диффузии зависит от дополнительного *условия баланса* (*тотального* или *локального*).

4.1. Большие уклонения при условии ЛБ

Случайные эволюции в схеме серий рассматриваются при нормировке (3.32). Генератор случайной эволюции задается соотношениями (3.34), (3.36).

Теорема 4.1. *При условии ЛБ, а также условии* **П1** (*см. п.* 3.1) *экспоненциальный генератор больших уклонений для случайных эволюций* (3.32) *задается соотношениями*

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2}B(u)[\varphi'(u)]^2, \tag{4.2}$$

$$B(u) = \int\limits_E \pi(dx)B(u;x),\ \ B(u;x) = \int\limits_{R^d} v^* v\Gamma(u, dv; x). \tag{4.3}$$

Доказательство. Экспоненциальный генератор (4.1) рассматривается на возмущенной тест-функции

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon \log[1 + \varepsilon\varphi_1(u,x)]. \tag{4.4}$$

Лемма 4.1. *Экспоненциальный генератор* (4.1) *на возмущенной тест-функции* (4.4) *допускает асимптотическое представление*

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = Q\varphi_1 + \widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) + \delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u), \tag{4.5}$$

с пренебрежимым членом

$$\|\delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0,\ \varphi(u) \in C^3(R^d).$$

Оператор

$$\widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) = \frac{1}{2}B(u;x)[\varphi'(u)]^2. \tag{4.6}$$

Доказательство. Доказательство леммы 4.1 основано на асимптотическом анализе слагаемых

$$\begin{aligned} H_Q^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) &= e^{-\varphi(u)/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1]^{-1}\varepsilon^{-1}Q[1+\varepsilon\varphi_1]e^{\varphi(u)/\varepsilon} \\ &= e^{-\varphi(u)/\varepsilon}[1-\varepsilon\varphi_1]\varepsilon^{-1}Q[1+\varepsilon\varphi_1]e^{\varphi(u)/\varepsilon} + \delta_Q^\varepsilon(x)\varphi(u) \\ &= Q\varphi_1 + \delta_Q^\varepsilon(x)\varphi(u) \end{aligned} \tag{4.7}$$

и

$$\begin{aligned} H_\Gamma^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) &= e^{-\varphi(u)/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1]^{-1}\varepsilon\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)[1+\varepsilon\varphi_1]e^{\varphi(u)/\varepsilon} \\ &= e^{-\varphi(u)/\varepsilon}[1-\varepsilon\varphi_1]^{-1}\varepsilon\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)[1+\varepsilon\varphi_1]e^{\varphi(u)/\varepsilon} + \delta_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) \end{aligned}$$

$$= \varepsilon^{-2} \int\limits_{R^d} [e^{\Delta_v^\varepsilon \varphi(u)} - 1]\Gamma(u, dv; x) + \delta_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u).$$

Здесь

$$\Delta_v^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1}[\varphi(u + \varepsilon^2 v) - \varphi(u)] = \varepsilon v \varphi'(u) + \varepsilon^3 \widetilde{\varphi}_v''(u).$$

Следовательно,

$$H_\Gamma^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) = \widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) + \delta_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) \tag{4.8}$$

с главным членом (4.6). □

Завершение доказательства теоремы 4.1 осуществляется применением решения проблемы сингулярного возмущения

$$Q\varphi_1(u, x) + \widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) = \widetilde{\mathbf{B}}\varphi(u), \tag{4.9}$$

в котором условие разрешимости уравнения (4.9) означает

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \int\limits_E \pi(dx)\widetilde{\mathbf{B}}(x). \tag{4.10}$$

В итоге соотношение

$$H^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) = H\varphi(u) + \delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u) \tag{4.11}$$

завершает доказательство теоремы 4.1. □

4.2. Большие уклонения при условии ТБ

Случайные эволюции рассматриваются в схеме серий при нормировке (3.33). Генератор случайной эволюции задается соотношениями (3.35)–(3.36).

Теорема 4.2. *При условии ТБ, а также условии* **П1** *экспоненциальный генератор больших уклонений для случайной эволюции* (3.33) *задается соотношениями*

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2}B_T(u)[\varphi'(u)]^2, \quad B_T(u) = B(u) + B_0(u), \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} B(u) &:= \int\limits_E \pi(dx)B(u;x), \quad B_0(u) := \int\limits_E \pi(dx)B_0(u;x), \\ B(u;x) &= \int\limits_{R^d} v^* v\Gamma(u, dv; x), \quad B_0(u;x) = 2b^*(u;x)R_0 b(u;x). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Доказательство. Экспоненциальный генератор (4.1) рассматривается на возмущенной тест-функции

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\log[1+\varepsilon\varphi_1(u,x)+\varepsilon^2\varphi_2(u,x)]. \tag{4.14}$$

Лемма 4.2. *Экспоненциальный генератор* (4.1) *на возмущенной тест-функции* (4.14) *допускает асимптотическое представление*

$$\begin{aligned} H^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) &= \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u)] \\ &\qquad + [Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \widetilde{\mathbf{B}}_1(x)\varphi(u)] + \delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u), \end{aligned} \tag{4.15}$$

с пренебрежимым членом

$$\|\delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u)\| \to 0, \quad \varepsilon\to 0,\ \varphi(u)\in C^3(R^d),$$

$$\mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u) := b(u;x)\varphi'(u).$$

Доказательство. Доказательство леммы 4.2 основано на асимптотическом анализе слагаемых

$$\begin{aligned} H_Q^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) &= e^{-\varphi/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2]^{-1}\varepsilon^{-2}Q[1+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2]e^{\varphi/\varepsilon} \\ &= e^{-\varphi/\varepsilon}[1-\varepsilon\varphi_1-\varepsilon^2\varphi_2]\varepsilon^{-2}Q[1+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2]e^{\varphi/\varepsilon} + \delta_Q^\varepsilon(x)\varphi(u) \\ &= \varepsilon^{-1}Q\varphi_1 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \delta_Q^\varepsilon(x)\varphi(u). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\Gamma^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) &= e^{-\varphi/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2]^{-1}\varepsilon\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)[1+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2]e^{-\varphi/\varepsilon} \\ &= e^{-\varphi/\varepsilon}[1-\varepsilon\varphi_1]\varepsilon\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)[1+\varepsilon\varphi_1]e^{-\varphi/\varepsilon} + \delta_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) \\ &= \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u) + \widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) + \delta_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = H_Q^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) + H_\Gamma^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x),$$

так что

$$\begin{aligned} H^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) &= \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u)] \\ &\qquad + [Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u)] + \delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u), \end{aligned}$$

что совпадает с (4.15). □

Завершение доказательства теоремы 4.2 осуществляется применением решений проблем сингулярного возмущения [1, гл. 5]:

$$Q\varphi_1 + b(u;x)\varphi'(u) = 0, \quad \Pi b(u;x) \equiv 0, \tag{4.16}$$

$$\varphi_1(u,x) = R_0 b(u;x)\varphi'(u). \tag{4.17}$$

И далее

$$Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) = \mathbf{B}\varphi(u). \tag{4.18}$$

Условие разрешимости уравнения (4.18) с учетом решения (4.17) приводит к утверждению (4.12)–(4.13) теоремы 4.2. □

4.3. Большие уклонения со сдвигом

Большие уклонения при условии баланса (локального или тотального) характеризуются эволюционным оператором, который порождается квадратичной формой (4.2)–(4.3) в п. 4.1 и (4.12)–(4.13) в п. 4.2.

Вместе с тем в схеме асимптотически малой диффузии могут присутствовать "малые скачки", порождающие линейный член в экспоненциальном генераторе (см. [5]). Для этого линейный генератор случайной эволюции должен содержать компоненту медленного сдвига, порожденного малыми скачками (ср. (3.38)):

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = [\varepsilon^{-1}b(u;x) + b_1(u;x)]\varphi'(u) + \varepsilon\frac{1}{2}B(u;x)\varphi''(u) + \varepsilon\delta_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u). \tag{4.19}$$

При этом достаточно предположить, что мера Леви $\Gamma^\varepsilon(u,dv;x)$ зависит от параметра серии ε таким образом, чтобы имело место асимптотическое представление первых моментов эволюции:

$$b^\varepsilon(u;x) := \int_{R^d} v\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = b(u;x) + \varepsilon b_1(u;x) + \varepsilon\delta_b^\varepsilon(u;x). \tag{4.20}$$

При дополнительном *условии малого сдвига* (4.20) генератор эволюционной компоненты допускает асимптотическое разложение (ср. (3.39))

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) &= \varepsilon^{-3}\int_{R^d}[\varphi(u+\varepsilon^2 v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(u,dv;x)\\ &= [\varepsilon^{-1}b(u;x) + b_1(u;x)]\varphi'(u) + \varepsilon\frac{1}{2}B(u;x)\varphi''(u)\\ &\qquad + \varepsilon\delta_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u). \end{aligned}\tag{4.21}$$

Возникает *проблема сингулярного возмущения* для урезанного линейного генератора случайной эволюции

$$\mathbb{L}^\varepsilon\varphi(u,x) = [\varepsilon^{-3}Q + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}(x) + \mathbf{\Gamma}_1(x) + \varepsilon\mathbf{B}(x)]\varphi(u,x). \tag{4.22}$$

Лемма 4.3. *Генератор* (4.22) *допускает асимптотическое представление*

$$\mathbb{L}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = [\widehat{b}_1(u) + \varepsilon\widehat{b}_0(u)]\varphi'(u) + \varepsilon\frac{1}{2}\widehat{B}(u)\varphi''(u) + \varepsilon\delta_L^\varepsilon(x)\varphi(u) \tag{4.23}$$

на возмущенных тест-функциях

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon^2\varphi_1(u,x) + \varepsilon^3\varphi_2(u,x).$$

Здесь функция вариаций $\widehat{B}(u)$ *задается формулами* (3.42)*, а коэффициент сдвига задается формулами:*

$$\begin{aligned} \widehat{b}_1(u) &= \int_E \pi(dx)b_1(u;x), \\ \widehat{b}_0(u) &= \int_E \pi(dx)b^*(u;x)R_0b'_u(u;x). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Медленный сдвиг в асимптотическом представлении (4.23)*, задаваемый оператором*

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}}_1\varphi(u) := \widehat{b}_1(u)\varphi'(u), \tag{4.25}$$

возникает также и в экспоненциальном генераторе больших уклонений для случайных эволюций со сдвигом.

Теорема 4.3. *Экспоненциальный генератор больших уклонений для случайных эволюций с ЛНП, задаваемых линейным генератором*

$$\mathbb{L}^\varepsilon\varphi(u,x) = [\varepsilon^{-3}Q + \mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)]\varphi(u,x), \tag{4.26}$$

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-3}\int_{R^d}[\varphi(u+\varepsilon^2 v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(u,dv;x),$$

при дополнительном условии малого сдвига (4.20)*, задается соотношениями:*

$$\mathbb{H}\varphi(u) = \frac{1}{2}\widehat{B}(u)[\varphi'(u)]^2 + \widehat{b}_1(u)\varphi'(u). \tag{4.27}$$

Здесь функция вариаций $\widehat{B}(u)$ *задается формулами* (4.3) *при условии ЛБ, и формулами* (4.13) — *при условии ТБ.*

Доказательство теоремы 4.3 основано на асиптотическом представлении экспоненциального генератора случайной эволюции на возмущенных тест-функциях (4.14).

Лемма 4.4. *Экспоненциальный генератор* (4.1) *для случайной эволюции, задаваемой генератором* (4.19), *допускает асимптотическое представление* (*ср.* (4.15))

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u)] + [Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + [\mathbf{\Gamma}_1(x) + \widetilde{\mathbf{B}}(x)]]\varphi(u) \tag{4.28}$$

на возмущенных тест-функциях

$$\varphi^\varepsilon(u) + \varepsilon\log[1 + \varepsilon\varphi_1(u,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,x)].$$

Доказательство леммы 4.4 по существу совпадает с доказательством леммы 4.2.

Аналогично вычисляется экспоненциальный генератор случайной эволюции при условии ЛБ (3.13).

Следует отметить, что алгоритмы вычисления экспоненциальных генераторов при условиях ЛБ (3.13) и ТБ (3.23) существенно разнятся. Достаточно сравнить леммы 4.1 и 4.2.

5. Заключительные замечания

Замечание 5.1. Экспоненциальные генераторы больших уклонений (4.2)–(4.3) и (4.12)–(4.13) в евклидовом пространстве R^d, $d \geq 1$, представимы квадратичной формой

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d} B_{kr}(u)\varphi'_k(u)\varphi'_r(u), \tag{5.1}$$

$$\varphi'_k(u) := \partial\varphi(u)/\partial u_k, \quad 1 \leq k \leq d.$$

Кроме того, экспоненциальный генератор (5.1) расширяется на пространство абсолютно непрерывных функций [3]

$$C_b^1(R^d) = \Big\{\varphi : \ \exists \lim_{|u|\to\infty}\varphi(u) = \varphi(\infty), \ \lim_{|u|\to\infty}\varphi'(u) = 0\Big\}. \tag{5.2}$$

Вариационное представление компенсирующей функции отклонений реализуется в пространстве $C_b^1(R^d)$.

Замечание 5.2. Проблемы больших уклонений для случайных процессов реализуются в четыре этапа [3, часть I].

Этап 1. Предельное поведение экспоненциального оператора в схеме серий.

Этап 2. Экспоненциальная плотность марковских процессов.

Этап 3. Принцип сравнения для предельного экспоненциального генератора.

Этап 4. Вариационное представление функционала действия.

Экспоненциальный генератор больших уклонений для случайных эволюций в схеме асимптотически малой диффузии в теоремах 4.1–4.3 задается однозначной функцией

$$H(u;p) = \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d} B_{kr}(u)p_k p_r + \sum_{k=1}^{d} b_k\delta_k, \tag{5.3}$$

для которой этапы 2–4 реализованы в монографии [3] (см. также [5]). Следовательно, функция отклонений задается преобразованием Фреше–Лежандра

$$L(u;q) = \sup_{p\in R^d}\{p\cdot q - H(u;p)\}. \tag{5.4}$$

А функционал действия задается соотношением

$$J_T(u) = \int\limits_0^T L(u(t),\dot u(t))\,dt. \tag{5.5}$$

Замечание 5.3. Экспоненциальные генераторы для *случайных эволюций* с локально независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии, приведенные в теоремах 4.1–4.3, совпадают с экспоненциальными генераторами для *случайных процессов* с локально независимыми приращениями в такой же схеме асимптотически малой диффузии. Этот естественный факт можно сформулировать, исходя из эвристических соображений. Однако остается открытой проблема обоснования эвристических предположений. Проще всего выглядит прием усреднения меры Леви случайной эволюции по стационарному распределению переключающего марковского процесса (см. [1, гл. 3])

$$\widehat\Gamma(u,dv) := \int\limits_E \pi(dx)\Gamma(u,dv;x).$$

При этом остается открытой проблема связи случайной эволюции с мерой Леви $\Gamma(u,dv;x)$ со случайным процессом с усредненной мерой Леви $\widehat\Gamma(u,dv)$. С таким же успехом можно утверждать (на эвристическом уровне) принцип усреднения для случайной эволюции, задаваемой эволюционным уравнением. Однако для обоснования принципа усреднения понадобится применить решение проблемы сингулярного возмущения (см. [1, гл. 5]) или же, по крайней мере, эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина. Кажущаяся сложность усилий в обосновании принципа усреднения при эвристической очевидности принципа только подтверждает наличие в математике эвристически простых утверждений, требующих сложного математического аппарата при их обосновании.

Литература

[1] V. S. Koroliuk, N. Limnios, *Stochastic Systems in Marging Phase Space*, WSP, 2005.

[2] S. N. Ethier, T. G. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, J. Wiley& Sons, 1986.

[3] J. Feng, T. G. Kurtz, *Large Deviation for Stochastic Processes*, 131, AMS, RI, 2006.

[4] A. A. Mogulskii, *Large deviation for processes with independent increments* // Ann. Prob., **21** (1993), 202–215.

[5] M. J. Freidlin, A. D. Wentzel, *Random Perturbation of Dynamical Systems*, Springer–Verlag, 1998.

Сведения об авторах

Владимир Семенович Королюк

Институт математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3
01601 Киев-4
Украина
E-Mail: korol@imath.kiev.ua