Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 2, 203 – 219

Фундаментальное решение операторно-дифференциального уравнения с сингулярным краевым условием

Александр М. Холькин

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В работе для дифференциального уравнения произвольного порядка, как четного, так и нечетного, с операторными коэффициентами строится фундаментальное решение с краевым условием на сингулярном конце. Это решение является аналитическим по λ в некоторой окрестности в комплексной плоскости множества на действительной оси, являющегося дополнением предельного спектра самосопряженного расширения минимального оператора.

2010 MSC. 34K10, 34G10.

Ключевые слова и фразы. Фундаментальное решение, оператор, сингулярное краевое условие.

Исследование осцилляционных задач для бесконечных систем дифференциальных уравнений приводит к необходимости построения фундаментального решения (ф.р.), удовлетворяющего самосопряженному краевому условию на сингулярном конце. Это операторное решение является аналогом полной системы линейно независимых решений в конечномерном случае. Оно оказывается удобным и при описании самосопряженных расширений дифференциальных операторов, в частности, при постановке краевых условий на бесконечности. (Для скалярного дифференциального уравнения второго порядка решение, подчиненное краевому условию на сингулярном конце, получено в [1].) Явное построение решения конечного при $x = 0$ и целого по λ дано в [2, 3] для скалярного уравнения Шредингера с

Статья поступила в редакцию 5.01.2011

ISSN 1810 – 3200.

высокосингулярным при $x = 0$ потенциале, и аналогично для операторного потенциала в [4]. Существование ф.р. для дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка, как четного, так и нечетного, установлено в [5, 6] (см. также монографии [7, 8]) . Там же доказана самосогласованность этого решения. В абсолютно неопределенном случае (см. определение в [9]) для системы дифференциальных уравнений произвольного порядка решение задачи Коши с начальными данными в $(-\infty)$, а тем самым и ф.р., получено в [10,11]. В работе [12] ф.р. построено для собственного расширения (не обязательно самосопряженного) симметрического дифференциального оператора четного порядка с произвольными индексами дефекта.

В настоящей работе для дифференциальных уравнений произвольного порядка с операторными коэффициентами другим способом строится фундаментальное решение краевой задачи и изучаются его свойства. Результаты работы анонсированы в [13].

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$, $\dim H \leq \infty$. Обозначим

$$H(a,b) = L_2\{H; (a,b); W(x)\,dx\}$$

гильбертово пространство вектор-функций $y(x)$ со значениями в H, скалярным произведением

$$\langle y, z\rangle_{(a,b)} = \int_a^b (W(x)y(x), z(x))\,dx, \quad -\infty \leq a < b \leq \infty$$

и соответствующей нормой $\|\cdot\|_{(a,b)}$, где $W(x) = W^*(x) \gg 0$ — ограниченный оператор в H с положительной нижней гранью при каждом $x \in (a,b)$, зависимость от x непрерывна в равномерном смысле. Там, где это не вызывает недоразумений, интервал (a,b) в определении скалярного произведения и нормы в $H(a,b)$ будем опускать.

Рассмотрим самосопряженное дифференциальное уравнение порядка $r \geq 1$ с операторными коэффициентами из $B(H)$

$$l[y] = \sum_{k=0}^{r} i^k\, l_k[y] = \lambda W(x) y, \tag{1}$$

где

$$l_{2j} = D^j p_j(x) D^j, \quad p_j^*(x) = p_j(x),$$

$$l_{2j-1} = \frac{1}{2} D^{j-1}\{D q_j(x) + q_j^*(x) D\} D^{j-1}, \quad D = d/dx$$

операторные коэффициенты $p_j(x),\ q_j(x)$ непрерывно в равномерном смысле зависят от x вместе со своими производными до порядка j

включительно, коэффициент при старшей производной ($p_n(x)$ при $r = 2n$ и $\operatorname{Re} q_n(x) := \frac{1}{2}(q_n(x) + q_n^*(x))$ при $r = 2n - 1$) в уравнении (1) имеет ограниченный обратный во всем H при $x \in (a, b)$ и a является сингулярной точкой, т.е. либо $a = -\infty$ либо в точке a нарушены условия гладкости коэффициентов.

Предположим, что для минимального оператора L, порожденного выражением $l_W[y] = W^{-1}(x)l[y]$ в гильбертовом пространстве $H(\alpha, \beta)$ существуют распадающиеся граничные условия на любом интервале $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$, а поэтому $r \cdot \dim H = \infty$ или четно (см. [14, 15]).

Пусть в точке $a \geq -\infty$ задано самосопряженное краевое условие

$$U_a[y] = 0 \tag{2}$$

Самосопряженность условия (2) означает, что минимальный относительно точки ξ оператор L_ξ, порожденный в $H(a, \xi)$, $a < \xi \leq b$ выражением $l_W[y]$ и условием (2), является симметрическим и функции $y \in D(L_\xi^*)$ также удовлетворяют этому условию.

Описание расширений симметрических операторов в терминах абстрактных граничных условий содержится в [1, 16–19].

Для задачи на бесконечном интервале (полуоси или оси) в абсолютно неопределенном случае описание распадающихся граничных условий приводится в [10, 11], а в работе [20] получен критерий существования и дано описание всех распадающихся самосопряженных граничных условий для выражения четного порядка на полуоси.

Определение 1. *Фундаментальным решением задачи* (1), (2) *называем такое решение уравнения* (1) $Y(x, \lambda) \in B(\boldsymbol{H}, H)$, *где* $\boldsymbol{H}$ — *какое-либо гильбертово пространство, что:*

1) $\forall\, h \in \boldsymbol{H}$, $\xi \in (a, b)$ $y = Y(x, \lambda)h \in H(a, \xi)$ *и удовлетворяет краевому условию* (2)*;*

2) *любое решение* $y \in H(a, \xi)$ *задачи* (1), (2) *представимо в виде*

$$y(x, \lambda) = Y(x, \lambda)h. \tag{3}$$

При этих условиях самосопряженный оператор

$$M_Y(x, \lambda) := \sum_{k=0}^{r-1} Y^{(k)^*}(x, \lambda) \cdot Y^{(k)}(x, \lambda) \gg 0 \tag{4}$$

позитивен и имеет ограниченный обратный во всем $\boldsymbol{H}$ при любом x (ср. с определением 4.2. [12])

Условия (3), (4) означают полноту и линейную независимость определяемой по фундаментальному решению $Y(x,\lambda)$ системы решений задачи (1), (2).

Для задачи (1), (2) с краевым условием в регулярной точке a ф.р. $Y(x,\lambda)$ аналитическое по λ можно построить, как решение уравнения (1) с операторными данными Коши.

Если $a=-\infty$ или является конечной сингулярной точкой, то построение фундаментального решения задачи (1), (2) не сводится к задаче Коши. Однако в ряде случаев фундаментальное решение можно построить явно (см. [2–4]).

Определение 2. *Решение* $Y(x,\,\lambda)\in B(\boldsymbol{H},H)$ *уравнения* (1) *при* $\lambda\in\mathbb{R}$ *называем самосогласованным, если при* $\xi\in(a,b)$ *существует самосопряженное краевое условие*

$$U_{\xi,\lambda}[y]:=\cos A_{\xi,\lambda}\,y^{\vee}(\xi)-\sin A_{\xi,\lambda}\,y^{\wedge}(\xi)=0, \tag{5}$$

которому при $x=\xi$ *удовлетворяют все функции вида* $y(x,\lambda)=Y(x,\lambda)h,\ A_{\xi,\lambda}$ *— самосопряженный оператор в* $\tilde{\boldsymbol{H}}$*, где при* $r=2n$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}=H^n=H\oplus H\oplus\cdots\oplus H$$

$$y^{\wedge}(x)=col\{y(x),y'(x),\ldots,y^{(n-1)}(x)\}\in\tilde{\boldsymbol{H}}$$
$$y^{\vee}(x)=col\{y^{[2n-1]},y^{[2n-2]},\ldots,y^{[n]}\}\in\tilde{\boldsymbol{H}},$$

$y^{[k]}(x)$ *— квазипроизводные, отвечающие операции* $l[y]$ *и определенные в соответствии с* [14,15]*, при* $r=2n-1$ $y^{\wedge}(x),\ y^{\vee}(x),\ \tilde{\boldsymbol{H}}$ *определяются сложнее* (*см.* [14,15]).

В совместных работах Ф. С. Рофе-Бекетова и автора [5,6] (см. также монографии [7,8]) доказано существование фундаментального решения задачи (1), (2).

Теорема 1. *Для задачи* (1), (2) *существует фундаментальное решение* $Y(x,\lambda)\in B(\boldsymbol{H},H)$ *при* $\dim\boldsymbol{H}=\frac{r}{2}\dim H$ *и* $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma_e(L_\xi)$ ($\sigma_e(L_\xi)$ *не зависит от* ξ*, а при* $a>-\infty$ *— пусто*)*. Фундаментальное решение* $Y(x,\lambda)$ *может быть построено аналитическим по* λ *в некоторой окрестности* Λ_ρ *множества* $\Lambda:=\mathbb{R}\setminus\sigma_e(L_\xi)$ *в комплексной плоскости.*

Ф.р., построенное в работе [12] для собственного расширения $\widetilde{L}_\xi$ симметрического дифференциального оператора четного порядка, голоморфно на резольвентном множестве $\widehat{\rho_r}(\widetilde{L}_\xi)$. Это решение будет аналитическим по λ в некоторой окрестности этого множества в комплексной плоскости.

В настоящей работе для уравнений произвольного порядка (как четного, так и нечетного) другим способом строится ф.р. $Y(x,\lambda)$ задачи (1), (2), которое будет аналитическим по λ в некоторой, вообще говоря, другой окрестности $\Lambda'_\rho \subset \mathbb{C}$, чем в цитируемых выше работах.

Обозначим R^0_λ резольвенту самосопряженного оператора L^0_ξ, являющегося расширением в $H(a,\xi)$ симметрического оператора L_ξ условием $y^\wedge(\xi) = 0$. При $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(L^0_\xi)$ резольвента R^0_λ аналитически зависит от λ. Зададим оператор $T^0_\lambda : H(a,\xi) \to \tilde{\boldsymbol{H}}$ формулой

$$T^0_\lambda f = (R^0_\lambda f)^\vee(\xi), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(L^0_\xi).$$

Подобно тому, как в [6], доказывается ограниченность оператора T^0_λ и функционала

$$\varphi^0_\lambda(f) := ((R^0_\lambda f)^\vee(\xi), h), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(L^0_\xi),\ h \in \tilde{\boldsymbol{H}},$$

поэтому по теореме Рисса

$$((R^0_\lambda f)^\vee(\xi), h) = \left\langle f(\cdot), g_h(\cdot,\bar\lambda)\right\rangle_{(a,\xi)}, \tag{6}$$

где $g_h(\cdot,\bar\lambda) \in H(a,\xi)$ определяется однозначно. Это позволяет при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(L^0_\xi)$ задать оператор $G^0_\lambda = G^0(\cdot,\lambda) : \tilde{\boldsymbol{H}} \to H(a,\xi)$ формулой $G^0(x,\lambda)h = g_h(x,\lambda)$. Этот оператор аналитически зависит от λ в равномерной операторной топологии.

Аналогично тому, как в теореме 2.1 [6], показывается, что операторное решение $Y_\xi(x,\lambda) \in B(\tilde{\boldsymbol{H}}, H)$ уравнения (1) на интервале (a,b) с данными Коши:

$$Y^\wedge_\xi(\xi,\lambda) = (G^0)^\wedge(\xi,\lambda), \quad Y^\vee_\xi(\xi,\lambda) = (G^0)^\vee(\xi,\lambda)$$

удовлетворяет условиям 1)–2) определения 1, т.е. является фундаментальным решением задачи (1), (2). При этом в доказательстве используется, что

$$Y^\wedge_\xi(\xi,\lambda) = -I, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L^0_\xi)$$

Докажем эту формулу. Пусть $y(x,\,\lambda) = Y_\xi(\xi,\,\lambda)h$ для произвольного $h \in \tilde{\boldsymbol{H}}$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L^0_\xi)$. Тогда, в силу (6), для всех $f \in H(a,\,\xi)$

$$\langle f(\cdot), y(\,\cdot,\lambda)\rangle_\xi = \langle f(\cdot), Y_\xi(\cdot,\lambda)h\rangle_\xi = ((R^0_{\bar\lambda}\, f)^\vee(\xi), h). \tag{7}$$

Для произвольной функции $f \in H(a,\xi)$ положим $R^0_{\bar\lambda} f = g(x,\bar\lambda)$. Замечая, что функции $g \in D(L^0_\xi)$, y удовлетворяют граничному условию (2) в точке a и что $l[g] - \bar\lambda W g = W f$, имеем

$$
\begin{aligned}
\langle f(\cdot), y(\cdot,\lambda)\rangle_\xi = \int\limits_a^\xi (l[g] - \bar\lambda W g, y)\,dx \\
= (g^\wedge(\xi,\bar\lambda), y^\vee(\xi,\lambda)) - (g^\vee(\xi,\bar\lambda), y^\wedge(\xi,\lambda)) \\
+ \int\limits_a^\xi (g, l[y] - \lambda W y)\,dx = (g^\wedge(\xi,\bar\lambda), y^\vee(\xi,\lambda)) - (g^\vee(\xi,\bar\lambda), y^\wedge(\xi,\lambda)) \\
= ((R^0_{\bar\lambda} f)^\wedge(\xi), y^\vee(\xi,\lambda)) - ((R^0_{\bar\lambda} f)^\vee(\xi), y^\wedge(\xi,\lambda)) \\
= -((R^0_{\bar\lambda} f)^\vee(\xi), y^\wedge(\xi,\lambda)). \quad (8)
\end{aligned}
$$

Сравнивая (7) и (8), получаем

$$((R^0_{\bar\lambda} f)^\vee(\xi), h) = -((R^0_{\bar\lambda} f)^\vee(\xi), y^\wedge(\xi,\lambda)).$$

Отсюда

$$y^\wedge(\xi,\lambda) = -h, \quad Y_\xi^\wedge(\xi,\lambda)h = -h, \quad Y_\xi^\wedge(\xi,\lambda) = -I, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma(L^0_\xi).$$

Решение $Y_\xi(x,\lambda)$ — самосогласованно, кроме того

$$nul\, Y_\xi^\wedge(x,\lambda) = nul\, Y_\xi^{\wedge *}(x,\lambda)$$

а при $\lambda\in\mathbb{R}\backslash(\sigma(L^0_\xi)\bigcup\sigma(L^0_x))$ оператор $Y_\xi^\wedge(x,\,\lambda)$ фредгольмов. В отличие от фундаментального решения, построенного в [6] и аналитического по λ в некоторой окрестности $\Lambda_\rho\subset\mathbb{C}$ множества $\Lambda:=\mathbb{R}\backslash\sigma_e(L_\xi)$, полученное решение регулярно по λ в верхней и нижней полуплоскостях, однако имеет полюсы в точках λ^0_k дискретного спектра оператора L^0_ξ.

Операторы

$$V^\xi_\pm(\xi,\lambda) = Y_\xi^\vee(\xi,\lambda) \pm iY_\xi^\wedge(\xi,\lambda) = Y_\xi^\vee(\xi,\lambda) \mp iI$$

имеют ограниченные обратные, определенные во всем $\tilde{\boldsymbol{H}}$, при всех $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\sigma(L^0_\xi)$. Точки $\lambda=\lambda^0_k$ являются полюсами аналитических оператор-функций $V^\xi_\pm(\xi,\lambda):\boldsymbol{H}\to\tilde{\boldsymbol{H}}$. Фундаментальное решение

$$Y^0(x,\lambda) = Y_\xi(x,\lambda)\cdot(V^\xi_+)^{-1}(\xi,\lambda)$$

совпадает при $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\sigma(L^0_\xi)$ с фундаментальным решением $Y(x,\lambda)$, построенным в [6], т. к. они удовлетворяют одному и тому же граничному условию в точке ξ. Это позволяет аналитически продолжить по λ на $\mathbb{C}\setminus(\sigma(L_\xi)\bigcup\sigma(V^\xi_+(\xi,\lambda)))$ оба этих фундаментальных решения (напомним, что $\sigma(L_\xi)$ от ξ не зависит).

Рассмотрим оператор в $\tilde{\boldsymbol{H}}$

$$\Gamma(\lambda) = \int_a^\xi Y_\xi^*(x,\bar{\lambda})\, W(x) Y_\xi(x,\lambda)\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L_\xi^0).$$

Оператор $\Gamma(\lambda)$ аналитически зависит от λ. Докажем, что оператор $\Gamma(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(L_\xi^0)$ имеет ограниченный обратный. Действительно, если при некотором $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(L_\xi^0)$ и $h \in \tilde{\boldsymbol{H}}$ $\Gamma(\lambda)h = 0$, то из формулы

$$(\Gamma(\lambda)h, h) = \int_a^\xi (W(x)\, G^0(x,\lambda)h, G^0(x,\lambda)h)\, dx \tag{9}$$

имеем, что $G^0(x,\lambda)h \equiv 0$ и, следовательно, $h = 0$. Если $\Gamma(\lambda)h_k \to 0$ при $k \to \infty$, где $|h_k| = 1$, то из (9) $\|G^0(\cdot,\lambda)h_k\| \to 0$, $k \to \infty$, что влечет $(G^0)^\wedge(\xi,\lambda) \to 0$, $(G^0)^\vee(\xi,\lambda) \to 0$, но это противоречит тому, что $Y_\xi^\wedge(\xi,\lambda) = -I$.

Теорема 2. *Для задачи* (1), (2) *существует фундаментальное решение* $Y_\Gamma(x,\lambda) \in B(\tilde{\boldsymbol{H}}, H)$, *которое является аналитическим по* λ *в некоторой окрестности* $\Lambda'_\rho \subset \mathbb{C}$ *множества* $\mathbb{R} \setminus \sigma_e(L_\xi^0)$.

Доказательство. Рассмотрим разложение резольвенты R_λ^0 и решения $Y_\xi(x,\lambda)$ в ряд Лорана в окрестности любого собственного значения λ_k оператора L_ξ^0

$$R_\lambda^0 = \frac{P_{-1}}{\lambda - \lambda_k} + \sum_{m=0}^\infty P_m(\lambda - \lambda_k)^m \tag{10}$$

$$Y_\xi(,\lambda) = \frac{g_{-1}(x,\lambda_k)}{\lambda - \lambda_k} + \sum_{m=0}^\infty g_m(x,\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^m. \tag{11}$$

В силу следующей ниже леммы 1 при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L_\xi^0)$ получаем, что

$$\Gamma(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)^2}[A + (\lambda - \lambda_k)^2 B(\lambda)],$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k) W(x) g_{-1}(x,\lambda_k)\, dx, \\ B(\lambda) &= \sum_{m,n=0}^\infty \int_a^\xi g_m^*(x,\lambda_k) W(x) g_n(x,\lambda_k)\, dx (\lambda - \lambda_k)^{m+n}. \end{aligned} \tag{12}$$

Оператор A в силу леммы 2 имеет $\varkappa$ положительных собственных значений, а оператор $B(\lambda)$ в $\tilde{\boldsymbol{H}}$ имеет ограниченный обратный при всех λ в некоторой окрестности каждой точки λ_k. Поэтому существует достаточно малая окрестность Λ_k точки λ_k такая, что при всех $\lambda \in \Lambda_k$ оператор $\tilde{\Gamma}(\lambda) = A + (\lambda - \lambda_k)^2 B(\lambda)$ имеет $\varkappa$ собственных значений, расположенных правее некоторого $\beta > 0$. Пусть $E(\beta,\, \lambda)$ разложение единицы оператора $\tilde{\Gamma}(\lambda)$. Обозначим $P_1(\lambda) = E(\beta, \lambda),\ P_2(\lambda) = I - E(\beta, \lambda)$ операторы проектирования на инвариантные подпространства $\boldsymbol{H}_1(\lambda) = P_1(\lambda)\tilde{\boldsymbol{H}},\ \boldsymbol{H}_2(\lambda) = P_2(\lambda)\tilde{\boldsymbol{H}}$ ($\dim \boldsymbol{H}_2(\lambda) = \varkappa$ при всех $\lambda \in \Lambda_k$).

Как показано в [21], операторы $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ аналитически зависят от λ при $\lambda \in \Lambda_k$. Поскольку операторы проектирования $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ коммутируют с $\tilde{\Gamma}(\lambda)$, то

$$\tilde{\Gamma}(\lambda) = P_1(\lambda)\tilde{\Gamma}(\lambda)P_1(\lambda) + P_2(\lambda)\tilde{\Gamma}(\lambda)P_2(\lambda).$$

Обозначим $\Omega(\lambda, \lambda_k)$ эволюционный оператор [22], который следит за поворотом инвариантных подпространств $\boldsymbol{H}_1(\lambda)$, $\boldsymbol{H}_2(\lambda)$ оператора $\tilde{\Gamma}(\lambda)$ при изменении λ в окрестности Λ_k. Оператор $\Omega(\lambda, \lambda_k)$ является унитарным, дифференцируемым по λ и обладает свойством поворачивания, т.е.

$$P_j(\lambda) = \Omega(\lambda, \lambda_k)P_j(\lambda_k)\Omega^*(\lambda, \lambda_k).$$

Поэтому $\tilde{\Gamma}(\lambda) = \Omega(\lambda, \lambda_k)[\Gamma_1(\lambda) \oplus \Gamma_2(\lambda)]\Omega^*(\lambda, \lambda_k)$, где $\Gamma_j(\lambda),\ j = 1, 2$ самосопряженные операторы в $\boldsymbol{H}_j(\lambda_k)$

$$\Gamma_j(\lambda) = P_j(\lambda_k)\Omega^*(\lambda, \lambda_k)\tilde{\Gamma}(\lambda)\Omega(\lambda, \lambda_k)P_j(\lambda_k).$$

Тогда

$$\Gamma^{\frac{1}{2}}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_k}\Omega(\lambda, \lambda_k)[\Gamma_1^{\frac{1}{2}}(\lambda) \oplus \Gamma_2^{\frac{1}{2}}(\lambda)]\Omega^*(\lambda, \lambda_k).$$

Так как

$$\Gamma_1^{\frac{1}{2}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)P_1(\lambda_k)B(\lambda_k)P_1(\lambda_k) + (\lambda - \lambda_k)^2 \cdot \tilde{\Gamma}_1(\lambda),$$

$$\Gamma_2^{\frac{1}{2}}(\lambda) = A^{\frac{1}{2}} + (\lambda - \lambda_k) \cdot \tilde{\Gamma}_2(\lambda),$$

где $\tilde{\Gamma}_1(\lambda), \tilde{\Gamma}_2(\lambda)$ — дифференцируемые оператор-функции, то при $\lambda \neq \lambda_k$ в некоторой окрестности точки λ_k существует обратный оператор $\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\lambda)$. Положим

$$Y_\Gamma(x, \lambda) = Y_\xi(x, \lambda) \cdot \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\lambda).$$

Оператор-функция $Y_\xi(x, \lambda)$ является аналитической при $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma(L_\xi^0)$ и имеет полюсы в точках $\lambda = \lambda_k$, поэтому оператор-функция $Y_\Gamma(x, \lambda)$

в этих точках имеет либо полюс, либо устранимую особенность. Если бы точка $\lambda = \lambda_k$ являлась полюсом, то при $\lambda \to \lambda_k$ по любому направлению предел был бы неограниченным. Однако при любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_e(L_\xi^0)$ и $h \in \tilde{\boldsymbol{H}}$

$$\|Y_\Gamma(\cdot,\lambda)h\|^2 = \left(\left(\int\limits_a^\xi Y_\Gamma^*(x,\lambda)W(x)Y_\Gamma(x,\lambda)\,dx\right)h, h\right) = |h|^2.$$

Поэтому оператор $Y_\Gamma(x,\lambda) : \tilde{\boldsymbol{H}} \to H$ равномерно ограничен по λ и тем более ограничен оператор $Y_\Gamma(x,\lambda) : \tilde{\boldsymbol{H}} \to H(a,\xi)$. Следовательно, особенность в точке $\lambda = \lambda_k$ устранимая. Доопределяя

$$Y_\Gamma(x,\lambda_k) = \lim_{\lambda\to\lambda_k} Y_\Gamma(x,\,\lambda),$$

получим невырожденное операторное решение $Y_\Gamma(x,\lambda)$, которое аналитически зависит от λ в некоторой окрестности $\Lambda'_\rho \subset \mathbb{C}$ множества $\mathbb{R} \setminus \sigma_e(L_\xi^0)$. Теорема доказана. $\square$

Лемма 1. *При всех* $m = 0; 1; 2; \ldots$

$$\int\limits_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k)W(x)\,g_m(x,\lambda_k)\,dx = \int\limits_a^\xi g_m^*(x,\lambda_k)W(x)\,g_{-1}(x,\lambda_k)\,dx = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Подставляя (10) и (11) в (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(\lambda - \lambda_k)$, получим

$$(P_m f)^\vee(\xi) = \int\limits_a^\xi g_m^*(x,\lambda_k)W(x)\,f(x)\,dx, \quad m = -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Как известно, $(-P_{-1})$ является оператором проектирования на собственное подпространство H_k, отвечающее собственному значению λ_k. Если

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{æ}(x) \tag{15}$$

ортонормированный базис в H_k, то $(-P_{-1})$ является интегральным оператором в $H(a,\xi)$ с ядром $K(x,t) = \sum_{j=1}^{æ} \varphi_j(x)\varphi_j^*(t)$:

$$(-P_{-1}f)(x) = \int\limits_a^\xi \mathrm{K}(x,t)W(t)f(t)\,dt.$$

Тогда из (14) получаем (при $m=-1$)

$$g_{-1}(x,\,\lambda_k)=\sum_{j=1}^{æ}\varphi_j(x)\overset{\vee}{\varphi}{}_j^{\,*}(\xi). \tag{16}$$

Для разложения резольвенты замкнутого симметрического оператора известно (см., например, [23]), что

$$P_{-1}P_m=P_m\cdot P_{-1}=0,\quad m=0,1,2,\ldots,$$

$$P_m=P_0^{m+1},\quad m=1,2,\ldots,\qquad P_{-1}^2=-P_{-1}.$$

Поэтому для любой функции $f(x)\in H(a,\,\xi)$

$$\int\limits_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k)W(x)\,P_mf(x)\,dx=(P_{-1}P_mf)^\vee(\xi)=0, \tag{17}$$

$$\int\limits_a^\xi g_m^*(x,\lambda_k)W(x)\,P_{-1}f(x)\,dx=(P_mP_{-1}f)^\vee(\xi)=0, \tag{18}$$

$$\int\limits_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k)W(x)\,P_{-1}f(x)\,dx=(P_{-1}P_{-1}f)^\vee(\xi)$$
$$=-(P_{-1}f)^\vee(\xi)=-\int\limits_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k)W(x)f(x)\,dx \tag{19}$$

$$\int\limits_a^\xi g_m^*(x,\lambda_k)W(x)\,P_0f(x)\,dx=(P_mP_0f)^\vee(\xi)$$
$$=(P_{m+1}f)^\vee(\xi)=\int\limits_a^\xi g_{m+1}^*(x,\lambda_k)W(x)f(x)\,dx \tag{20}$$

Из (20) при $m=0$ имеем

$$\int\limits_a^\xi g_1^*(x,\lambda_k)W(x)\,f(x)\,dx=\int\limits_a^\xi g_0^*(x,\lambda_k)W(x)P_0f(x)\,dx.$$

Возьмем $f = P_0 h$. Тогда, дважды применяя (20), получим

$$\int\limits_a^\xi g_2^*(x,\lambda_k)W(x)\,h(x)\,dx = \int\limits_a^\xi g_1^*(x,\lambda_k)W(x)\,P_0 h(x)\,dx = \int\limits_a^\xi g_0^*(x,\lambda_k)W(x)\,P_0^2 h(x)\,dx$$

и т.д. Таким образом, для любой функции $f(x) \in H(a,\xi)$

$$\int\limits_a^\xi g_m^*(x,\lambda_k)W(x)f(x)\,dx = \int\limits_a^\xi g_0^*(x,\lambda_k)W(x)P_0^m f(x)\,dx.$$

Рассмотрим оператор $T : H(a,\,\xi) \to \tilde{\boldsymbol{H}}$ по формуле:

$$Tf = \int\limits_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k)W(x)f(x)\,dx.$$

Тогда для любого $h \in \tilde{\boldsymbol{H}}$

$$(Tf,h) = \left(\int\limits_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k)W(x)f(x)\,dx, h\right) = \int\limits_a^\xi (W(x)\,f(x), g_{-1}(x,\lambda_k)h)\,dx = \langle f, g_{-1}h\rangle.$$

Сопряженный оператор $T^* : \tilde{\boldsymbol{H}} \to H(a,\,\xi)$ по формуле

$$T^* h = g_{-1}(x,\lambda)h. \tag{21}$$

Оператор $T_1 : H(a,\,\xi) \to \tilde{\boldsymbol{H}}$ определим по формуле

$$T_1 f = \int\limits_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k)W(x)P_{-1}\,f(x)\,dx.$$

Аналогично предыдущему получаем

$$T_1^* h = P_{-1}^*[g_{-1}^*(x,\lambda_k)h] = P_{-1}[g_{-1}(x,\lambda_k)h]. \tag{22}$$

Так как в силу (19) $T_1 = -T$, то из (21) получаем, что

$$P_{-1}[g_{-1}(x,\lambda_k)h] = -g_{-1}(x,\lambda_k)h.$$

Аналогично доказывается, что $\forall\, h \in \tilde{\boldsymbol{H}}$

$$g_m(x,\lambda_k)h = P_0^m(g_0(x,\lambda_k)h). \tag{23}$$

Отсюда, используя (22) и (23), для любого $h \in \tilde{\boldsymbol{H}}$ имеем

$$\int\limits_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k)W(x)g_m(x,\lambda_k)h\,dx$$
$$= \int\limits_a^\xi g_m^*(x,\lambda_k)W(x)\,g_{-1}(x,\lambda_k)h\,dx = 0, \quad (m = 0,1,2,\dots),$$

что равносильно (13). Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. 1) *Пусть $\varphi_1(x),\dots,\varphi_{æ}(x)$ — ортонормированный базис собственного подпространства $H_k = (-P_{-1})H(a,\xi)$. Обозначим $\boldsymbol{H}_k$ подпространство в $\tilde{\boldsymbol{H}}$ натянутое на векторы $\varphi_1^\vee(\xi),\dots,\varphi_{æ}^\vee(\xi)$, A_k — сужение оператора A на $\boldsymbol{H}_k$. Тогда оператор A_k имеет ограниченный обратный.*

2) *Оператор $B(\lambda)$ в $\tilde{\boldsymbol{H}}$ имеет ограниченный обратный при всех λ в некоторой окрестности каждой точки λ_k.*

Доказательство. 1) В силу (16)

$$A = \int\limits_a^\xi g_{-1}^*(x,\lambda_k)W(x)g_{-1}(x,\lambda_k)\,dx$$
$$= \sum_{i,j=0}^{\kappa} \varphi_j^\vee(\xi) \int\limits_a^\xi \varphi_j^*(x)W(x)\varphi_i(x)\,dx\,\varphi_i^{\vee *}(\xi) = \sum_{j=1}^{\kappa} \varphi_j^\vee(\xi)\varphi_j^{\vee *}(\xi).$$

Векторы $\varphi_j^\vee(x) \in \tilde{\boldsymbol{H}}$, $j = 1,\dots,æ$. Поэтому $A \neq 0$ на подпространстве $\boldsymbol{H}_k \subset \tilde{\boldsymbol{H}}$.

2) Пусть при некоторых $\lambda' \neq \lambda_k$, $\operatorname{Im}\lambda' = 0$ и $h \in \tilde{\boldsymbol{H}}$, $B(\lambda')h = 0$. Так как

$$(B(\lambda')h, h) = \int_a^\xi |\, W^{\frac{1}{2}}(x) G_0(x, \lambda', \lambda_k) h|^2 \, dx, \tag{24}$$

где $G_0(x, \lambda, \lambda_k) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x, \lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^m$, то $G_0(x, \lambda', \lambda_k)h = 0$ и поэтому

$$G^0(x, \lambda')h = \frac{g_{-1}(x, \lambda_k)h}{\lambda' - \lambda_k}.$$

Так как $g_{-1}(x, \lambda_k)h$ — решение уравнения $l[y] = \lambda W(x)y$ при $\lambda = \lambda_k$, а $G^0(x, \lambda')h$ — решение того же уравнения при $\lambda = \lambda'$ и $\lambda' \neq \lambda_k$, то $G^0(x, \lambda')h \equiv 0$. Откуда $h = 0$. Пусть $\lambda' = \lambda_k$. Тогда, если $B(\lambda_k)h = \int_a^\xi g_0^*(x, \lambda_k) W(x) g_0(x, \lambda_k) h \, dx = 0$, то $g_0(x, \lambda_k)h \equiv 0$ и в силу (23) $g_m(x, \lambda_k)h \equiv 0$. Поэтому $B(\lambda)h = 0$ при всех λ из некоторой окрестности точки λ_k, что противоречит доказанному выше при $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

Предположим, что $B(\lambda)h_j \to 0$ при $j \to \infty$, где $|h_j| = 1$. Тогда из (12) имеем, что $\|G_0(\cdot, \lambda, \lambda_k)h_j\| \to 0$. Обозначив $P_{-1}^{\perp}(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\lambda - \lambda_k)^m$, для любой функции $f \in H(a, \xi)$ получаем при $j \to \infty$

$$\begin{aligned}
|((P_{-1}^{\perp} f)^{\vee}(\xi), h_j)| &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} ((P_m f)^{\vee}(\xi), h_j)(\lambda - \lambda_k)^m \right| \\
&= \left| \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_a^\xi g_m^*(x, \lambda_k) W(x) f(x) \, dx, h_j \right) (\lambda - \lambda_k)^m \right| \\
&= \left| \left(\int_a^\xi \sum_{m=0}^{\infty} g_m^*(x, \lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^m W(x) f(x) \, dx, h_j \right) \right| \\
&= \left| \left(\int_a^\xi G_0^*(x, \lambda, \lambda_k) W(x) f(x) \, dx, h_j \right) \right| \\
&= \left| \int_a^\xi (W(x) f(x), G_0(x, \lambda, \lambda_k) h_j) \, dx \right| \\
&\leq \|f(\cdot)\| \cdot \|G_0(\cdot, \lambda, \lambda_k) h_j\| \to 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Для каждого вектора $h_j \in \tilde{\boldsymbol{H}}$, используя лемму 3 (см. ниже), выберем последовательность функций $f_{j,m} \in H(a, \xi)$. Тогда, взяв в

(25) f переменным $f = f_{j,m}$, для всех m получаем

$$|((P_{-1}^{\perp} f_{j,m})^{\vee}(\xi), h_j)| \le c \cdot |h_j| \cdot \|G_0(\cdot, \lambda, \lambda_k) h_j\| \to 0, \quad j \to \infty. \tag{26}$$

Однако, в силу леммы 3, при достаточно больших m при всех j имеем

$$\begin{aligned} |((P_{-1}^{\perp} f_{j,m})^{\vee}(\xi), h_j)| &= |((P_{-1}^{\perp} f_{j,m})^{\vee}(\xi) - h_j, h_j) + 1| \\ &\ge 1 - |(P_{-1}^{\perp} f_{j,m})^{\vee}(\xi) - h_j| > \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{27}$$

Условия (26) и (27) противоречивы. □

Лемма 3. *Для любого вектора $h \in \tilde{\boldsymbol{H}}$ можно выбрать последовательность функций $f_m \in H(a, \xi)$ так, чтобы $\|f_m\| \le c \cdot |h|$ при всех m и $|(P_{-1}^{\perp} f_m)^{\vee}(\xi) - h| \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно по h.*

Доказательство. Положим $H_k^{\perp} = D(L_\xi^0) \ominus H_k$. Так как $P_{-1}^{\perp} P_{-1} = P_{-1} P_{-1}^{\perp} = 0$ и

$$R_\lambda^0 H(a, \xi) = \Big(\frac{P_{-1}}{\lambda - \lambda_k} + P_{-1}^{\perp}\Big) H(a, \xi),$$

то $P_{-1}^{\perp} H(a, \xi) \subseteq H_k^{\perp}$. Однако, так как для любого $f \in H_k^{\perp}$

$$P_{-1} L_\xi^0 f = \Big(R_\lambda^0 - \frac{P_{-1}}{\lambda - \lambda_k}\Big) L_\xi^0 f = f - \frac{1}{\lambda - \lambda_k} P_{-1} L_\xi^0 f = f,$$

то $P_{-1}^{\perp} H(a, \xi) = H_k^{\perp}$.

Аккуратно "подправим" собственные функции $\varphi_j(x)$ в точке ξ так, чтобы

$$\varphi_{j,m}^{\wedge}(\xi) = \varphi_{j,m}^{\vee}(\xi) = 0, \quad \|\varphi_j(\cdot) - \varphi_{j,m}(\cdot)\| \to 0. \tag{28}$$

Тогда $\|L_\xi^0 \varphi_j - L_\xi^0 \varphi_{j,m}\| \to 0$ при $m \to \infty$. Причем функции $\varphi_{j,m}$ можно выбрать так, чтобы при $i \ne j$

$$\langle \varphi_j, \ \varphi_{i,m} \rangle = 0 \tag{29}$$

(Это возможно в силу леммы 3, [24, п. 6]). Заметим, что из (29) следует

$$\langle \varphi_j, \varphi_{j,m} \rangle \to 1, \quad m \to \infty. \tag{30}$$

По вектору $h \in \tilde{\boldsymbol{H}}$ построим функцию $\psi(x) \in C_0^\infty$ такую, что $\psi^\wedge(\xi) = 0$, $\psi^\vee(\xi) = h$. Тогда $P_{-1}\psi(x) = \sum_{j=1}^{æ} c_j \cdot \varphi_j(x)$, где $c_j = \langle \psi, \varphi_j \rangle$. При этом

$$|c_j| \le \|\psi\| = \Bigg(\int\limits_a^\xi |W^{\frac{1}{2}}(x)\, \psi(x)|^2 \, dx \Bigg)^{\frac{1}{2}} \le C \cdot |h| \tag{31}$$

Положим $y_m(x) = \psi(x) - \sum_{j=1}^{æ} c_j \cdot \varphi_{j,m}(x)$. Тогда $y_m \in D(L_\xi^0)$, $y_m^\wedge(\xi) = 0$, $y_m^\vee(\xi) = h$ и $y_m(x) = y_m^\perp + \sum_{j=1}^{æ} \langle y, \varphi_j \rangle \varphi_j(x)$, где $y_m^\perp(x)$ проекция на $\boldsymbol{H}_k^\perp$ функции $y_m(x)$. В силу (29) и (30)

$$\langle y_m, \varphi_j \rangle = \left\langle \psi - \sum_{i=1}^{æ} c_i \cdot \varphi_{i,m}, \varphi_j \right\rangle = \langle \psi, \varphi_j \rangle - \sum_{i=1}^{æ} c_i \cdot \langle \varphi_{i,m}, \varphi_j \rangle = c_j \cdot \varepsilon_{j,m},$$

где $\varepsilon_{j,m} \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому

$$y_m(x) = y_m^\perp(x) + \sum_{j=1}^{æ} \varepsilon_{j,m}\, c_j \cdot \varphi_j(x).$$

Так как $y_m(x) \in D(L_\xi^0)$, то существует функция $f_m(x) \in H(a, \xi)$ такая, что $R_\lambda^0 f_m = y_m$. При этом

$$(P_{-1}^\perp f_m)^\wedge(\xi) = 0, \quad |(P_{-1}^\perp f_m)^\vee(\xi) - h| \le \sum_{j=1}^{æ} |\varepsilon_{j,m} c_j \cdot \varphi_j^\vee(\xi)| \to 0$$

при $m \to \infty$ равномерно по h. Кроме того, в силу (31) при всех m

$$\|f_m\| - \|(L_\xi^0 - \lambda\, I) y_m\| \le \ \|(L_\xi^0 - \lambda\, I)\psi\| + \sum_{j=1}^{æ} |c_j| \cdot \|(L_\xi^0 - \lambda I)\varphi_{j,m}\| \le c \cdot |h|.$$

Лемма 3, а вместе с ней и лемма 2, доказана. □

Благодарности. Автор признателен В. И. Могилевскому за внимание к работе.

Литература

[1] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Спектральная теория*, М.: Мир, 1966.

[2] N. Limic, *Theory of scattering on highly singular potential* // Nuovo Cimento, **26** (1962), No. 3, 581–596.

[3] Ф. С. Рофе-Бекетов, Е. Х. Христов, *Асимптотические и аналитические вопросы, связанные с рассеянием на высокосингулярном потенциале* // Сб. тр. ФТИНТ АН УССР, Сер. матем. физика и функциональный анализ, (1971), вып. II, 122–168.

[4] Ф. С. Рофе-Бекетов, *Осцилляционные свойства решений систем дифференциальных уравнений* (*обыкновенных и в частных производных*), Тр. конф.: Конструктивная теория функций **81**, София, (1983), 144–149.

[5] Ф. С. Рофе-Бекетов, А. М. Холькин, *Связь спектральных и осцилляционных свойств систем произвольного порядка* // ДАН СССР, **261** (1981), No. 3, 551–555.

[6] Ф. С. Рофе-Бекетов, А. М. Холькин, *Фундаментальная система решений операторного дифференциального уравнения с краевым условием на бесконечности* // Матем. заметки, **36** (1984), No. 5, 697–709.

[7] Ф. С. Рофе-Бекетов, А. М. Холькин, *Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств*, Мариуполь: ПГТУ, 2001.

[8] F. S. Rofe-Beketov, A. M. Kholkin, *Spectral analysis of differential operators. Interplay between spectral and oscillatory properties*, New Jersey, London, Singapore,...: World Scientific Publishing Co., 2005.

[9] М. Л. Горбачук, *О спектральных функциях дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами* // Укр. матем. ж. **18** (1966), No. 2, 3–21.

[10] А. М. Холькин, *Самосопряженные краевые условия на бесконечности для квазирегулярной системы дифференциальных уравнений четного порядка* // В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения: Сб. науч. тр., (1981), 174–183.

[11] А. М. Холькин, *Описание самосопряженных расширений дифференциальных операторов произвольного порядка на бесконечном интервале в абсолютно неопределенном случае* // Теория функций, функц. анализ и их приложения, (1985), вып. 44, 112–122.

[12] V. I. Mogilevskii, *Fundamental solutions of boundary-value problems and resolvents of differential operators* // Ukr. Math. Bull., **6** (2009), No. 4, 487–525.

[13] А. М. Холькин, *Фундаментальная система решений дифференциального уравнения с операторнозначными коэффициентами и сингулярным краевым условием* // Вестник Приазовского гос. техн. унивеситета, (1995), No. 1, 262–267.

[14] Ф. С. Рофе-Бекетов, *Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций* // ДАН СССР, **184** (1969), No. 5, 1034–1037.

[15] Ф. С. Рофе-Бекетов, *О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций* // Теория функций, функц. анализ и их приложения, (1969), вып. 8, 3–24.

[16] А. Н. Кочубей, *О расширении симметрических операторов и симметрических бинарных отношений* // Матем. заметки, **17** (1975), No. 1, 41–48.

[17] В. М. Брук, *Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии* // Матем. сб., **100** (1976), No. 2, 210–216.

[18] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, К.: Наукова думка, 1984.

[19] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps* // J. Funct. Anal., **95** (1991), No. 1, 1–95.

[20] V. I. Mogilevskii, *Boundary triplets and Titchmarsh - Weyl functions of differential operators with arbitrary deficiency indices* // Methods Funct. Anal. Topology, **15** (2009), No. 3, 280–300.

[21] К. Иосида, *Функциональный анализ*, М.: Мир, 1967.

[22] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, М.: Наука, 1970.

[23] *Функциональный анализ*, сер. "Справочная математическая библиотека", М.: Наука, 1972.

[24] И. М. Глазман, *Прямые методы качественного спектрального анализа*, М.: Физматгиз, 1963.

Сведения об авторах

Александр М. Холькин

Приазовский государственный
технический университет
ул. Университетская, 7,
Мариуполь, 87500,
Украина
E-Mail: a.kholkin@gmail.com