Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 2, 159 – 181

Метрические касательные к евклидовым пространствам

Дмитрий В. Дордовский

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Получено, что метрические предкасательные пространства к конечномерному евклидову или унитарному пространству E изометричны E. Как следствие этого результата описаны метрические касательные пространства в неособых точках гладких поверхностей. Доказано, что существуют предкасательные пространства к гильбертову пространству l_2 не изометричные l_2.

2010 MSC. 54E35, 51M05.

Ключевые слова и фразы. Метрические предкасательные пространства, евклидовы пространства, изометрии евклидова пространства.

1. Введение

Предкасательные и касательные пространства, используемые в настоящей работе, были введены в [11] для определения обобщенного дифференцирования на метрических пространствах без линейной структуры.

В [1] дан критерий единственности предкасательных пространств и исследован ряд интересных примеров метрических пространств с единственными предкасательными. В недавней работе [8] были найдены условия компактности и ограниченности предкасательных пространств, в [9] и [10] получены критерии их ультраметричности. Необходимые и достаточные условия при которых подпространства X и Y метрического пространства Z имеют одинаковые предкасательные пространства в точке из $X \cap Y$ найдены в [6]. В [11] доказана полнота касательных пространств к произвольным метрическим пространствам и получен критерий конечности предкасательных пространств.

Статья поступила в редакцию 9.12.2010

Строение метрических пространств, предкасательные к которым изометрично вкладываются в $\mathbb{R}$ описано в работе [3]. Выпуклость метрических пространств касательных или предкасательных к множествам лежащим на евклидовой плоскости изучалась в [7], там, в частности, был получен следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть $X = \mathbb{R}$ или $X = \mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой. Тогда каждое предкасательное пространство является касательным и изометрично X для любой нормирующей последовательности $\tilde{r}$.*

Естественным образом возникает гипотеза об аналогичном свойстве касательных пространств к евклидовым размерности более чем 2.

В настоящей работе доказано, что аналог теоремы 1.1 верен для любого конечномерного евклидова пространства X, но может нарушаться при $\dim X = \infty$. Для удобства читателя напомним необходимые определения.

Пусть (X, d) — метрическое пространство и пусть $p \in X$. Пусть также $\tilde{r}$ — последовательность положительных вещественных чисел r_n стремящихся к нулю. Назовем $\tilde{r}$ нормирующей последовательностью. Будем обозначать через $\tilde{X}$ множество всех последовательностей точек из X.

Определение 1.1. *Две последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ взаимностабильные (относительно нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), если существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} := \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \tag{1.1}$$

Семейство $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$ самостабильное относительно $\tilde{r}$, если каждые $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{F}$ взаимностабильные, $\tilde{F}$ максимальное самостабильное, если $\tilde{F}$ самостабильное и для произвольной $\tilde{z} \in \tilde{X} \setminus \tilde{F}$ существует $\tilde{x} \in \tilde{F}$, такая что $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$ не взаимностабильные.

Предложение 1.1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство и пусть $p \in X$. Тогда для каждой нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует максимальное самостабильное семейство $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$, такое что постоянная последовательность $\tilde{p} = \{p, p, \dots\} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$.*

Рассмотрим функцию $\tilde{d} : \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \times \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \to \mathbb{R}$, где $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ определена через (1.1). Очевидно, $\tilde{d}$ симметрична и неотрицательна. Кроме того, из неравенства треугольника для d следует

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \le \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{y})$$

для всех $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ из $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$. Следовательно, $(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d})$ — псевдометрическое пространство. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ как $\tilde{x} \sim \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Обозначим через $\Omega_{p,\tilde{r}} = \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ множество всех классов эквивалентности на $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ порожденных отношением $\sim$. Для $\alpha, \beta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ положим

$$\rho(\alpha, \beta) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tag{1.2}$$

где $\tilde{x} \in \alpha$ и $\tilde{y} \in \beta$, тогда ρ метрика на $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$.

Определение 1.2. *Пространство $(\Omega^X_{p,\tilde{r}}, \rho)$ называется предкасательным к X в точке p относительно нормирующей последовательности $\tilde{r}$.*

Заметим, что $\Omega_{p,\tilde{r}} \neq \varnothing$ так как постоянная последовательность $\tilde{p}$ лежит в $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ (см. предложение 1.1).

Пусть $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — бесконечная, строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $\tilde{r}'$ подпоследовательность $\{r_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и пусть $\tilde{x}' := \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ для каждой $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$. Ясно, что если $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ взаимностабильные относительно $\tilde{r}$, тогда $\tilde{x}'$ и $\tilde{y}'$ взаимностабильные относительно $\tilde{r}'$ и

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}'}(\tilde{x}', \tilde{y}'). \tag{1.3}$$

Если $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ максимальное самостабильное относительно $\tilde{r}$ семейство, тогда по лемме Цорна, существует максимальное самостабильное относительно $\tilde{r}'$ семейство $\tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$ такое что

$$\{\tilde{x}' : \tilde{x} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}\} \subseteq \tilde{X}_{p,\tilde{r}'}.$$

Обозначим через $in_{\tilde{r}'}$ отображение из $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ в $\tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$ с $in_{\tilde{r}'}(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$. После метрической идентификации отображение $in_{\tilde{r}'}$ переходит в изометрическое вложение $em' : \Omega^X_{p,\tilde{r}} \to \Omega^X_{p,\tilde{r}'}$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \arrow[r, "in_{\tilde{r}'}"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{X}_{p,\tilde{r}'} \arrow[d, "\pi'"] \\ \Omega_{p,\tilde{r}} \arrow[r, "em'"'] & \Omega_{p,\tilde{r}'} \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

коммутативна. Здесь π, π' отображения проектирования на соответствующие факторпространства, $\pi(\tilde{x}) := \{\tilde{y} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}} : \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0\}$ и $\pi'(\tilde{x}) := \{\tilde{y} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}'} : \tilde{d}_{\tilde{r}'}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0\}$.

Пусть X и Y — два метрических пространства. Напомним, что отображение $f : X \to Y$ называется изометрией, если f сохраняет расстояние и биективно.

Определение 1.3. *Предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является касательным, если $em' : \Omega^X_{p,\tilde{r}} \to \Omega^X_{p,\tilde{r}'}$ изометрия для каждого $\tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$.*

Верно следующее утверждение, см. [6].

Предложение 1.2. *Пусть (X, d) — метрическое пространство с фиксированной точкой a, $\tilde{r}$ — нормирующая последовательность и $\tilde{X}_{a,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство с соответствующим предкасательным пространством $\Omega^X_{a,\tilde{r}}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\Omega^X_{a,\tilde{r}}$ *— касательное.*

(ii) *Для каждой подпоследовательности $\tilde{r}'$ последовательности $\tilde{r}$ семейство $\{\tilde{x}' : \tilde{x} \in \tilde{X}_{a,\tilde{r}}\}$ — максимальное самостабильное.*

(iii) *Функция $em' : \Omega^X_{a,\tilde{r}} \to \Omega^X_{a,\tilde{r}'}$ сюръективна для каждого $\Omega^X_{a,\tilde{r}'}$.*

(iv) *Функция $in'_r : \tilde{X}_{a,\tilde{r}} \to \tilde{X}_{a,\tilde{r}'}$ сюръективна для каждого $\tilde{X}_{a,\tilde{r}'}$.*

2. Изометричность $\mathbb{R}^m$ и предкасательных к нему пространств

Будем говорить, что в метрическом пространстве (X, d) точки $x, y, z \in X$ лежат на одной прямой, если либо $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$, либо $d(x, y) = |d(x, z) - d(z, y)|$.

Определение 2.1 ([4, с. 123]). *Метрическое пространство обладает слабо евклидовым свойством четырех точек, если любое четырехточечное множество попарно различных точек, три из которых лежат на одной прямой, изометрически вкладывается в $\mathbb{R}^2$.*

Определение 2.2 ([4, с. 41, 55]). *Метрическое пространство X называется метрически выпуклым, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существует $z \in X$ не совпадающая с x и y, что $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$, и метрически выпукло внешним образом, если $d(x, y) = |d(x, z) - d(z, y)|$.*

Детерминантом Кели–Менгера называется определитель:

$$D(x_1,\dots,x_m)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d^2(x_1,x_2) & \dots & d^2(x_1,x_m) \\ 1 & d^2(x_2,x_1) & 0 & \dots & d^2(x_2,x_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d^2(x_m,x_1) & d^2(x_m,x_2) & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Следующую теорему можно найти в [4, с. 128].

Теорема 2.1. *Метрическое пространство S изометрично m-мерному евклидовому пространству $\mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда:*

(*i*) *S — полное, метрически выпуклое и метрически выпуклое внешним образом;*

(*ii*) *S обладает слабо евклидовым свойством четырех точек;*

(*iii*) *детерминант Кели–Менгера D каждых $m+2$ точек S равен нулю;*

(*iv*) *m — наименьшее целое для которого (iii) выполняется.*

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 2.2. *Каждое предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ к евклидовому пространству $X=\mathbb{R}^m$, в любой точке $p\in\mathbb{R}^m$ изометрично $\mathbb{R}^m$ и является касательным.*

Замечание 2.1. Как хорошо известно, всякое комплексное конечномерное пространство с нормой порождаемой скалярным произведением изометрично-изоморфно $\mathbb{C}^m$, а последнее в свою очередь изометрично $\mathbb{R}^{2m}$.

Таким образом, теорема 2.2 влечет

Следствие 2.1. *Каждое предкасательное пространство к комплексному конечномерному пространству X с нормой порожденной скалярным произведением изометрично X и является касательным.*

Разобъем доказательство теоремы 2.2 на несколько шагов. Начнем со следующего простого замечания. Если метрическое пространство X наделено линейной структурой, то пространство последовательностей $\tilde{X}$ тоже является линейным относительно операций

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}+\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}:=\{x_n+y_n\}_{n\in\mathbb{N}},\quad a\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}:=\{ax_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

здесь a — произвольный элемент соответствующего поля скаляров. Напомним, что подмножество A линейного пространства X над полем $\mathbb{R}$ называется аффинно выпуклым, если вся прямая $\{tx+(1-t)y : t \in \mathbb{R}\}$ лежит в A для любых $x, y \in A$.

Лемма 2.1. *Пусть E — произвольное гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ и пусть $p \in E$. Тогда любое максимальное самостабильное множество $\tilde{E}_{p,\tilde{r}}$ является аффинно выпуклым.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \tilde{x} \in \alpha$ и $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \tilde{y} \in \beta$ — элементы $\tilde{E}_{p,\tilde{r}}$. Определим $\tilde{z} = a\tilde{x} + (1-a)\tilde{y}$, $z_n := ax_n + (1-a)y_n$, для произвольного $a \in \mathbb{R}$. Нужно доказать, что $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \tilde{z} \in \tilde{E}_{p,\tilde{r}}$. Зафиксируем в E ортонормированный базис $\varepsilon = \{e_i : i \in I\}$. Проверим вначале взаимостабильность пар $\tilde{x}, \tilde{z}$ и $\tilde{y}, \tilde{z}$.

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{z}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n - z_n\|}{r_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sum_{i\in I}\left(x_n^{(i)}e_i - (ax_n^{(i)}e_i + (1-a)y_n^{(i)}e_i)\right)^2}}{r_n} \\ &= |1-a| \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sum_{i\in I}\left(x_n^{(i)}e_i - y_n^{(i)}e_i\right)^2}}{r_n} = |1-a|\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

и аналогично

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y}, \tilde{z}) = |a|\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}). \tag{2.2}$$

Покажем, что для произвольного $\tilde{t} \in \tilde{E}_{p,\tilde{r}}$ последовательности $\tilde{t}$ и $\tilde{z}$ взаимностабильные.

$$\begin{aligned}\tilde{d}^2(\tilde{z}, \tilde{t}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i\in I}(t_n^i - z_n^i)^2}{r_n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i\in I}(t_n^i - ax_n^i - (1-a)y_n^i)^2}{r_n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i\in I}(a(t_n^i - x_n^i) + (1-a)(t_n^i - y_n^i))^2}{r_n^2} \\ &= a^2\tilde{d}^2(\tilde{x}, \tilde{t}) + (1-a)^2\tilde{d}^2(\tilde{y}, \tilde{t}) + 2a(1-a)\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i\in I}(t_n^i - x_n^i)(t_n^i - y_n^i)}{r_n^2} \\ &= a^2\tilde{d}^2(\tilde{x}, \tilde{t}) + (1-a)^2\tilde{d}^2(\tilde{y}, \tilde{t}) \\ &\quad + a(1-a)\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i\in I}(t_n^i - x_n^i)^2 + (t_n^i - y_n^i)^2 - (x_n^i - y_n^i)^2}{r_n^2} \\ &= a^2\tilde{d}^2(\tilde{x}, \tilde{t}) + (1-a)^2\tilde{d}^2(\tilde{y}, \tilde{t}) \\ &\quad + a(1-a)(\tilde{d}^2(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{d}^2(\tilde{y}, \tilde{t}) - \tilde{d}^2(\tilde{x}, \tilde{y})).\end{aligned}$$

Так как правая часть конечна, то $\tilde{t}$ и $\tilde{z}$ взаимностабильные. Следовательно, $\tilde{z} \in \tilde{E}_{p,\tilde{r}}$ для любого $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Следствие 2.2. *Пусть E — произвольное гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$. Тогда любое предкасательное пространство $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ является метрически выпуклым и метрически выпуклым внешним образом.*

Напомним, что линейное нормированное пространство X называется предгильбертовым, если норма на X порождается скалярным произведением.

Лемма 2.2. *Пусть E — произвольное гильбертово пространство над $\mathbb{R}$. Тогда любое $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ является предгильбертовым пространством над $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{E}_{0,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное множество, порождающее $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$. В силу леммы 2.1, $\tilde{E}_{0,\tilde{r}}$ — аффинное подпространство линейного пространства $\tilde{E}$, а так как $\tilde{0} = (0, 0, \ldots)$ — нулевой элемент пространства $\tilde{E}$ и $\tilde{0} \in \tilde{E}_{0,\tilde{r}}$, то $\tilde{E}_{0,\tilde{r}}$ — линейное пространство относительно операций

$$a\tilde{x} = a\tilde{x} + (1-a)\tilde{0} \qquad \text{и} \qquad \tilde{x} + \tilde{y} = 2\left(\frac{1}{2}\tilde{x} + (1 - \frac{1}{2})\tilde{y}\right). \tag{2.3}$$

Кроме того, из нормированности E следует, что $\tilde{E}_{0,\tilde{r}}$ — полунормированное пространство относительно полунормы

$$\|\tilde{x}\|_{\tilde{r}} := \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{0}, \tilde{x})$$

т.е. что

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{\tilde{r}} \leqslant \|\tilde{x}\|_{\tilde{r}} + \|\tilde{y}\|_{\tilde{r}}, \qquad \|a\tilde{x}\|_{\tilde{r}} = |a|\|\tilde{x}\|_{\tilde{r}} \quad \text{и} \quad \|\tilde{x}\|_{\tilde{r}} \geqslant 0$$

но, вообще говоря, равенство $\|\tilde{x}\|_{\tilde{r}} = 0$ не влечет $\tilde{x} = \tilde{0}$. Стандартный переход от полунормированного пространства к нормированному [2, с. 174] показывает, что $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ — нормированное пространство с нормой определенной при любом $\beta \in \Omega^E_{0,\tilde{r}}$ равенством

$$\|\beta\|_{\Omega} = \rho(\alpha, \beta), \tag{2.4}$$

где $\alpha = \pi(\tilde{0})$, см. (1.4). Осталось показать, что норма (2.4) порождается скалярным произведением. Как хорошо известно [12, с. 162], для этого достаточно проверить равенство параллелограмма

$$2(\|\beta\|^2_{\Omega} + \|\gamma\|^2_{\Omega}) = \|\beta - \gamma\|^2_{\Omega} + \|\beta + \gamma\|^2_{\Omega},$$

последнее легко выводится из соответствующего равенства в пространстве E. $\square$

Доказательство следующей леммы легко получить, используя приведенную выше теорему 2.1.

Лемма 2.3. *Предгильбертово пространство X имеет конечную размерность m тогда и только тогда, когда*

(i) *детерминант Кели–Менгера D каждых $m+2$ точек X равен нулю,*

(ii) *m — наименьшее целое для которого (i) выполняется.*

Следующая лемма доказана в [7].

Лемма 2.4. *Пусть (X,d) — метрическое пространство с отмеченной точкой a, $\tilde{r}=\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — нормирующая последовательность и $\tilde{X}_{a,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство и $\tilde{f}=\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность изометрий $f_n:X\to X$ с $f_n(a)=a$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда $\tilde{f}(\tilde{X}_{a,\tilde{r}}):=\{\{f_n(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}:\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\tilde{X}_{a,\tilde{r}}\}$ максимальное самостабильное и псевдометрические пространства $(\tilde{X}_{a,\tilde{r}},\tilde{d})$ и $(\tilde{f}(\tilde{X}_{a,\tilde{r}}),\tilde{d})$ изометричны. Кроме того, если $\Omega^X_{a,\tilde{r}}$ и $\Omega^{\tilde{f},X}_{a,\tilde{r}}$ — метрические идентификации $\tilde{X}_{a,\tilde{r}}$ и, соответственно, $\tilde{X}^{\tilde{f}}_{a,\tilde{r}}$ и $\Omega^X_{a,\tilde{r}}$ — касательное, то и $\Omega^{\tilde{f},X}_{a,\tilde{r}}$ касательное.*

В лемме 2.2 было установлено, что любое предкасательное $\Omega^{\tilde{E}}_{0,\tilde{r}}$ к евклидову пространству E само является евклидовым. Хорошо известно, что два евклидовых пространства изометричны если их размерности совпадают, поэтому для доказательства первой части теоремы 2.2 достаточно установить следующую лемму.

Лемма 2.5. *Пусть E — евклидово пространство размерности $m<\infty$. Тогда любое предкасательное $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ является евклидовым пространством той же размерности m,*

$$\dim\Omega^E_{0,\tilde{r}}=\dim E. \tag{2.5}$$

Доказательство. Докажем вначале неравенство

$$\dim(E)\geqslant\dim(\Omega^{\tilde{E}}_{0,\tilde{r}}) \tag{2.6}$$

В соответствии с леммой 2.3 для этого достаточно проверить, что детерминант Кэли–Менгера обращается в нуль для любых $m+2$ векторов пространства $\Omega^{\tilde{E}}_{0,\tilde{r}}$.

Пусть $\alpha_i \in \Omega^E_{0,\tilde r}$, $i = 1, \dots, m+2$ и $\tilde x_i := \{x_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \alpha_i$. Так как E изометрично себе, то для всех n верно

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d^2(x_{1,n}, x_{2,n}) & \dots & d^2(x_{1,n}, x_{m+2,n}) \\ 1 & d^2(x_{2,n}, x_{1,n}) & 0 & \dots & d^2(x_{2,n}, x_{m+2,n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d^2(x_{m+2,n}, x_{1,n}) & d^2(x_{m+2,n}, x_{2,n}) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно

$$\frac{1}{r_n^{2m+4}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d^2(x_{1,n}, x_{2,n}) & \dots & d^2(x_{1,n}, x_{m+2,n}) \\ 1 & d^2(x_{2,n}, x_{1,n}) & 0 & \dots & d^2(x_{2,n}, x_{m+2,n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d^2(x_{m+2,n}, x_{1,n}) & d^2(x_{m+2,n}, x_{2,n}) & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \frac{d^2(x_{1,n}, x_{2,n})}{r_n^2} & \dots & \frac{d^2(x_{1,n}, x_{m+2,n})}{r_n^2} \\ 1 & \frac{d^2(x_{2,n}, x_{1,n})}{r_n^2} & 0 & \dots & \frac{d^2(x_{2,n}, x_{m+2,n})}{r_n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{d^2(x_{m+2,n}, x_{1,n})}{r_n^2} & \frac{d^2(x_{m+2,n}, x_{2,n})}{r_n^2} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как определитель матрицы — непрерывная функция ее элементов, то переходя к пределу при $n \to \infty$, с учетом взаимной стабильности всех последовательностей $\tilde x_i$, получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \tilde d^2(\tilde x_1, \tilde x_2) & \dots & \tilde d^2(\tilde x_1, \tilde x_{m+2}) \\ 1 & \tilde d^2(\tilde x_2, \tilde x_1) & 0 & \dots & \tilde d^2(\tilde x_2, \tilde x_{m+2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \tilde d^2(\tilde x_{m+2}, \tilde x_1) & \tilde d^2(\tilde x_{m+2}, \tilde x_2) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

или

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \rho^2(\alpha_1, \alpha_2) & \dots & \rho^2(\alpha_1, \alpha_{m+2}) \\ 1 & \rho^2(\alpha_2, \alpha_1) & 0 & \dots & \rho^2(\alpha_2, \alpha_{m+2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho^2(\alpha_{m+2}, \alpha_1) & \rho^2(\alpha_{m+2}, \alpha_2) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Осталось доказать неравенство обратное (2.6). Для этого достаточно показать, что из

$$\dim(\Omega^{\tilde E}_{0,\tilde r}) = m_0 < m \tag{2.7}$$

следует, что самостабильное семейство $\tilde{E}_{0,\tilde{r}}$, соответствующее пред-касательному пространству $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$, не является максимальным.

Пусть (2.7) выполнено. Фиксируем в евклидовом пространстве $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ ортонормированный базис $\beta_1, \dots, \beta_{m_0}$ и пусть $\tilde{x}^1 = \{x^1_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \tilde{x}^{m_0} = \{x^{m_0}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — элементы $\tilde{E}_{0,\tilde{r}}$ такие, что

$$\beta_1 = \pi(\tilde{x}^1), \dots, \beta_{m_0} = \pi(\tilde{x}^{m_0}). \tag{2.8}$$

Предположим вначале, что все последовательности

$$\left\{\frac{x^j_n}{r_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad j = 1, \dots, m_0, \tag{2.9}$$

сходятся в пространстве E. Обозначим

$$x^j := \lim_{n\to\infty} x^j_n / r_n \tag{2.10}$$

для $j = 1, \dots, m_0$. Прямые вычисления показывают, что сходимость последовательностей 2.9 и ортонормированность векторов $\beta_1, \dots, \beta_{m_0}$ влечет равенство

$$\left\langle x^i, x^j \right\rangle = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в E. Следовательно, $x^1, \dots, x^{m_0}$ — ортонормированная система векторов в E. Далее из 2.10 следует

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x^j_n}{r_n} - x^j \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x^j_n - r_n x^j}{r_n} \right\| = 0.$$

Таким образом,

$$\tilde{x}^j_{\tilde{r}} := \{r_n x^j\}_{n\in\mathbb{N}} \in \beta_j \tag{2.11}$$

для любого $j = 1, \dots, m_0$. Так как $\beta_1, \dots, \beta_{m_0}$ — базис в пространстве $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$, то используя лемму 2.2 можно утверждать, что для любого $\tilde{x} \in \tilde{E}_{0,\tilde{r}}$ найдется линейная комбинация $k_1 \tilde{x}^1_{\tilde{r}} + \dots + k_{m_0} \tilde{x}^{m_0}_{\tilde{r}}$ такая, что

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}\left(\tilde{x}, \sum_{i=1}^{m_0} k_i \tilde{x}^i_{\tilde{r}}\right) = 0. \tag{2.12}$$

Пусть теперь $x^{m_0+1} \in E$ произвольный ненулевой вектор, принадлежащий ортогональному дополнению подпространства порожденного векторами $x^1, \dots, x^{m_0}$. Такой вектор найдется, так как $m_0 < \dim X$.

Аналогично (2.11) положим $\tilde{x}_{\tilde{r}}^{m_0+1} := \{r_n x^{m_0+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Теперь используя (2.12) находим

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}^2(\tilde{x}, \tilde{x}_{\tilde{r}}^{m_0+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\| r_n \sum_{j=1}^{m_0} k_j x^j - r_n x^{m_0+1} \right\|_E^2}{r_n^2}$$
$$= \left\| \sum_{j=1}^{m_0} k_j x^j - x^{m_0+1} \right\|_E^2 = \sum_{j=1}^{m_0} |k_j|^2 + \|x^{m_0+1}\|_E^2 > 0.$$

Таким образом, для любого $\tilde{x} \in \tilde{E}_{0,\tilde{r}}$ вектора $\tilde{x}_{\tilde{r}}^{m_0+1}$ и $\tilde{x}$ взаимностабильны и $\tilde{x}_{\tilde{r}}^{m_0+1} \notin \tilde{E}_{0,\tilde{r}}$, что противоречит максимальной самостабильности $\tilde{E}_{0,\tilde{r}}$.

Пусть теперь (2.7) и (2.8) выполнены, но хотя бы одна из последовательностей $\{\frac{x_n^j}{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является сходящейся. Предположим, существует $\tilde{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность линейных ортогональных преобразований пространства E (т.е. линейных преобразований, сохраняющих скалярное произведение) и таких, что все последовательности $\{\frac{f_n(x_n^j)}{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, m_0$, являются сходящимися. По лемме 2.4 $\tilde{f}(\tilde{E}_{0,\tilde{r}})$ — максимальное самостабильное семейство, а предкасательные пространства $\Omega_{0,\tilde{r}}^E$ и $\Omega_{0,\tilde{r}}^{\tilde{f},E}$ являются изометричными. Следовательно их размерности совпадают

$$\dim(\Omega_{0,\tilde{r}}^{\tilde{f},E}) = m_0$$

и, кроме того, проекции элементов $\{f_n(x_n^j)\} \in \tilde{f}(\tilde{E}_{0,\tilde{r}})$ на $\Omega_{0,\tilde{r}}^{\tilde{f},E}$ образуют ортонормированный базис в $\Omega_{0,\tilde{r}}^{\tilde{f},E}$. Как показано в первой части доказательства настоящей леммы эти предположения ведут к противоречию. Следовательно для завершения доказательства осталось построить последовательность линейных ортогональных преобразований $f_n : E \to E$ для которых все последовательности

$$\left\{ f_n\left(\frac{x_n^j}{r_n}\right) \right\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad j = 1, \ldots, m_0,$$

являются сходящимися в E. Построим такую последовательность.

Заметим прежде всего, что при достаточно больших n векторы $\frac{x_n^1}{r_n}, \frac{x_n^2}{r_n}, \ldots, \frac{x_n^{m_0}}{r_n}$ — линейно независимы, так как предел последовательности определителей Грамма

$$\Gamma\left(\frac{x_n^1}{r_n},\dots,\frac{x_n^{m_0}}{r_n}\right)=\begin{vmatrix} \left\langle \frac{x_n^1}{r_n},\frac{x_n^1}{r_n}\right\rangle & \left\langle \frac{x_n^1}{r_n},\frac{x_n^2}{r_n}\right\rangle & \dots & \left\langle \frac{x_n^1}{r_n},\frac{x_n^{m_0}}{r_n}\right\rangle \\ \left\langle \frac{x_n^2}{r_n},\frac{x_n^1}{r_n}\right\rangle & \left\langle \frac{x_n^2}{r_n},\frac{x_n^2}{r_n}\right\rangle & \dots & \left\langle \frac{x_n^2}{r_n},\frac{x_n^{m_0}}{r_n}\right\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \frac{x_n^{m_0}}{r_n},\frac{x_n^1}{r_n}\right\rangle & \left\langle \frac{x_n^{m_0}}{r_n},\frac{x_n^2}{r_n}\right\rangle & \dots & \left\langle \frac{x_n^{m_0}}{r_n},\frac{x_n^{m_0}}{r_n}\right\rangle \end{vmatrix}$$

при $n\to\infty$ есть

$$\begin{vmatrix} \langle\beta_1,\beta_1\rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle\beta_2,\beta_2\rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle\beta_{m_0},\beta_{m_0}\rangle \end{vmatrix}=1, \tag{2.13}$$

а соотношение

$$\Gamma\left(\frac{x_n^1}{r_n},\dots,\frac{x_n^{m_0}}{r_n}\right)\neq 0$$

равносильно линейной независимости, см., например, [5, с. 226].

Ортонормировав, при каждом n, конечную последовательность векторов $\frac{x_n^1}{r_n},\dots,\frac{x_n^{m_0}}{r_n}$, получаем последовательность (ортонормированных в E) векторов $x_n^{*1},\dots,x_n^{*m_0}$. Зафиксируем в E какой-нибудь ортонормированный базис $e_1,\dots,e_m$. Дополним, при каждом n, систему $x_n^{*1},\dots,x_n^{*m_0}$ до ортонормированного базиса векторами $x_n^{*m_0+1},\dots,x_n^{*m}$. Рассмотрим линейное отображение $f_n : E\to E$ такое, что $f_n(x_n^{*j})=e_j$ для любого $j=1,\dots,m$. Хорошо известно, что такое преобразование является ортогональным, см., например, [13, с. 221]. Проверим равенства

$$\lim_{n\to\infty} f_n\Big(\frac{x_n^j}{r_n}\Big)=e_j \qquad \text{при } j=1,\dots,m_0$$

Последнее можно переписать как

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|f_n\Big(\frac{x_n^j}{r_n}\Big)-e_j\Big\|=\lim_{n\to\infty}\Big\|f_n\Big(\frac{x_n^j}{r_n}\Big)-f_n(x_n^{*j})\Big\|=\lim_{n\to\infty}\Big\|\frac{x_n^j}{r_n}-x_n^{*j}\Big\|=0 \tag{2.14}$$

в силу того, что f_n — изометрия E. Осталось доказать последнее равенство. Для этого заметим, что процесс построения ортонормированных векторов $x_n^{*1},\dots,x_n^{*m_0}$ можно разбить на два этапа: ортогонализации и последующего нормирования. Используем явные формулы для этапа ортогонализации

$$y_n^1=\frac{x_n^1}{r_n},\qquad y_n^2=\begin{vmatrix} \left\langle \frac{x_n^1}{r_n},\frac{x_n^1}{r_n}\right\rangle & \frac{x_n^1}{r_n} \\ \left\langle \frac{x_n^2}{r_n},\frac{x_n^1}{r_n}\right\rangle & \frac{x_n^1}{r_n} \end{vmatrix},\dots,$$

$$y_n^{m_0} = \begin{vmatrix} \left\langle \frac{x_n^1}{r_n}, \frac{x_n^1}{r_n} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{x_n^1}{r_n}, \frac{x_n^{m_0-1}}{r_n} \right\rangle & \frac{x_n^1}{r_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left\langle \frac{x_n^{m_0-1}}{r_n}, \frac{x_n^1}{r_n} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{x_n^{m_0-1}}{r_n}, \frac{x_n^{m_0-1}}{r_n} \right\rangle & \frac{x_n^{m_0-1}}{r_n} \\ \left\langle \frac{x_n^{m_0}}{r_n}, \frac{x_n^1}{r_n} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{x_n^{m_0}}{r_n}, \frac{x_n^{m_0-1}}{r_n} \right\rangle & \frac{x_n^{m_0}}{r_n} \end{vmatrix}$$

см., например, [5, с. 234]. Разлагая эти определители по последнему столбцу, получим

$$y_n^j - \Gamma\left(\frac{x_n^1}{r_n}, \dots, \frac{x_n^{j-1}}{r_n}\right)\frac{x_n^j}{r_n} \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty. \tag{2.15}$$

Аналогично (2.13) имеем $\lim_{n\to\infty} \Gamma(\frac{x_n^1}{r_n}, \dots, \frac{x_n^j}{r_n}) = 1$. Значит, из (2.15) следует

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y_n^j - \frac{x_n^j}{r_n} \right\| = 0, \tag{2.16}$$

отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n^j\| = 1 \qquad \text{при всех } j = 1, \dots, m_0. \tag{2.17}$$

Так как $x_n^{*j} = \frac{y_n^j}{\|y_n^j\|}$, то (2.16) и (2.17) влекут последнее из равенств (2.14). □

Замечание 2.2. Из леммы 2.5 следует, в частности, что любое предкасательное пространство $\Omega_{0,\tilde r}^E$ к конечномерному гильбертову пространству будет полным, как конечномерное нормированное пространство.

Окончание доказательства теоремы 2.2. Докажем, что для любой нормирующей последовательности $\tilde r$ предкасательное пространство является касательным. В силу предложения 1.2, для этого достаточно проверить, что для любой подпоследовательности $\tilde r'$ последовательности $\tilde r$ вложение $em' : \Omega_{0,\tilde r}^E \to \Omega_{0,\tilde r'}^E$ сюръективно, т.е., что

$$em'(\Omega_{0,\tilde r}^E) = \Omega_{0,\tilde r'}^E, \tag{2.18}$$

см. (1.4). Заметим прежде всего, что $in_{\tilde r'}(\tilde E_{0,\tilde r})$ является подпространством линейного пространства $\tilde E_{0,\tilde r}$, так как отображение $in_{\tilde r'}$ линейно. Следовательно, $em'(\Omega_{0,\tilde r}^E)$ — линейное подпространство пространства $\Omega_{0,\tilde r}^E$ как образ $in_{\tilde r'}(\tilde E_{0,\tilde r})$ при фактор-отображении π', которое также является линейным. По теореме Мазура–Улама, см., например, [15], отображение

$$\Omega_{0,\tilde r}^E \ni \beta \mapsto em'(\beta) \in em'(\Omega_{0,\tilde r}^E) \tag{2.19}$$

является аффинным. Это отображение линейно, т.к. $\pi(\tilde{0})$ — ноль пространства $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ переходит в $\pi'(in_{\tilde{r}'}(\tilde{0}))$ — ноль пространства $\Omega^E_{0,\tilde{r}'}$. Так как отображение (2.19) является изометрией, то ядро состоит только из нуля. Следовательно,

$$\dim(\Omega^E_{0,\tilde{r}}) = \dim\left(em'(\Omega^E_{0,\tilde{r}})\right). \tag{2.20}$$

В силу уже доказанной части теоремы 2.2 мы имеем равенство

$$\dim(\Omega^E_{0,\tilde{r}}) = \dim(\Omega^E_{0,\tilde{r}'}) = m,$$

что вместе с (2.20) дает

$$\dim\left(em'(\Omega^E_{0,\tilde{r}})\right) = \dim(\Omega^E_{0,\tilde{r}'}) = m. \tag{2.21}$$

Единственным подпространством размерности m конечномерного линейного пространства $\Omega^E_{0,\tilde{r}'}$ размерности m является само $\Omega^E_{0,\tilde{r}'}$. Таким образом (2.21) влечет (2.18). ☐

Доказательство теоремы 2.2 об изометричности гильбертова пространства E и предкасательных к нему пространств $\Omega^E_{p,\tilde{r}}$ опиралось на конечномерность E. Возникает вопрос о том, насколько существенным является это условие в теореме 2.2.

Пусть, как обычно, l_2 — пространство всех последовательностей $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{C}$, для которых

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Теорема 2.3. *Для любой нормирующей последователньости $\tilde{r}$ существует предкасательное пространство к гильбертову пространству l_2 не изометричное l_2.*

Доказательство. Для доказательства построим $X \subseteq l_2$, $0 \in X$, такое что некоторое предкасателньое $\Omega^X_{0,\tilde{r}}$ содержит множество B мощности континуум, $\operatorname{card} B = \mathfrak{c}$, и такое, что выполняется равенство

$$\rho(\gamma,\beta) = \sqrt{2} \tag{2.22}$$

для всех различных $\gamma, \beta \in B$. Существование такого $B \subseteq \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ влечет существование предкасательного $\Omega^{l_2}_{0,\tilde{r}}$ не изометричного l_2.

Действительно, если $\tilde{X}_{0,\tilde{r}}$ — максимальное в $\tilde{X}$ самостабильное множество последователньостей, соответствующее $\Omega^X_{0,\tilde{r}}$, то, используя лемму Цорна, найдем максимальное в $\tilde{l}_2$ самостабильное множество $\tilde{l}_{2,0,\tilde{r}} \supseteq \tilde{X}_{0,\tilde{r}}$. После метрической идентификации получаем предкасательное к l_2 пространство $\Omega^{l_2}_{0,\tilde{r}}$. в которое B изометрически вкладывается следующим образом

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}_{0,\tilde{r}} \arrow[r, "in_X"] \arrow[d, "pr_X"] & \tilde{l}_{2,0,\tilde{r}} \arrow[d, "pr_{l_2}"] \\ B \arrow[r, "in_B"] & \Omega^X_{0,\tilde{r}} \arrow[r, "em_X"] & \Omega^{l_2}_{0,\tilde{r}} \end{tikzcd}$$

Здесь in_B и in_X — отображения вложения подмножеств в множества, pr_X и pr_{l_2} — проектирования на факторпространства, а em_X — изометрическое вложение для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{0,\tilde{r}} \arrow[r, "in_X"] \arrow[d, "pr_X"'] & \tilde{l}_{2,0,\tilde{r}} \arrow[d, "pr_{l_2}"] \\ \Omega^X_{0,\tilde{r}} \arrow[r, "em_X"'] & \Omega^{l_2}_{0,\tilde{r}} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Подмножество $em_X(in_B B)$ имеет мощность континуум и в соответствии с (2.22) дискретно. Следователньо, $em_X(in_B B)$ не является сепарабельным. Так как любое подмножество сепарабельного метрического пространства сепарабельно, см., например [14, с. 69], то $\Omega^{l_2}_{0,\tilde{r}}$ не сепарабельно. Отсюда и из сепарабельности l_2 следует, что $\Omega^{l_2}_{0,\tilde{r}}$ не гомеоморфно l_2, а значит и не изометрично l_2.

Осталось построить $X \subseteq l_2$ с необходимыми свойствами. Проведем это построение по аналогии с конструкцией, использованной в теореме 8 работы [8] для построения счетного ультраметрического пространства, предкасательное к которому содержит дискретное подпространство мощности $\mathfrak{c}$.

Пусть ε — стандартный базис в l_2, а $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная нормирующая последовательность. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим множество X_n как

$$X_n := r_n\varepsilon,$$

т.е. вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ попадает в X_n тогда и только тогда, когда все его координаты кроме одной есть нули, а ненулевая координата равна r_n. Положим

$$X := \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) \cup \{0\}, \tag{2.23}$$

где $\{0\}$ — множество, единственным элементом которого есть ноль линейного пространства l_2.

Лемма 2.6. *Если A — подмножество декартова произведения множеств X_n,*

$$A \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n,$$

такое, что для любых различных $\tilde{x}, \tilde{y} \in A$, $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует $n_0 = n_0(\tilde{x}, \tilde{y})$ такое, что

$$x_n \neq y_n \tag{2.24}$$

при всех $n \geqslant n_0$, то $\tilde{F} = A \cup \{\tilde{0}\}$ — самостабильное относительно $\tilde{r}$ и

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{0}) = 1 \tag{2.25}$$

для любых различных $\tilde{x}, \tilde{y} \in A$.

Замечание 2.3. Декартово произведение $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ понимается здесь стандартным образом, как множество всех отображений f из $\mathbb{N}$ в $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ таких, что $f(n) \in X_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, любой элемент множества $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ есть последовательность точек из X, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \subseteq \tilde{X}$ и мы можем говорить о существовании пределов $\lim \frac{d(x_n,y_n)}{r_n}$ для $\tilde{x}, \tilde{y} \in \prod X_n$, самостабильности множеств $A \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ и т.д.

Доказательство леммы 2.6. Пусть $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ элементы произведения $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ такие, что существует $n_0 = n_0(\tilde{x}, \tilde{y})$ для которого $x_n \neq y_n$ при $n \geqslant n_0$. По определению X_n найдутся два различных вектора $e(x_n)$ и $e(y_n)$ базиса ε для которых

$$x_n = r_n e(x_n) \qquad \text{и} \qquad y_n = r_n e(y_n).$$

В силу ортонормальности векторов базиса ε имеем

$$\|x_n - y_n\| = r_n \|e(x_n) - e(y_n)\| = \sqrt{2} r_n$$

при всех $n \geqslant n_0(\tilde{x}, \tilde{y})$. Следовательно,

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} = \sqrt{2}.$$

Аналогично имеем

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{0}) = 1.$$

Это доказывает самостабильность $\tilde{F}$ и равенство (2.25). $\square$

Хорошо известно, что множество всех бесконечных последовательностей $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, где t_i принимает только два значения 0 и 1 имеет мощность континуум. (Каждой такой последовательности естественным образом соответствует характеристическая функция какого-то подмножества множества $\mathbb{N}$. А множество всех таких подмножеств имеет мощность континуум.) Поставим в соответствие последовательности

$$\tilde{t} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} = (t_1, t_2, \dots t_i, \dots), \quad t_i \in \{0, 1\}$$

последовательность

$$\tilde{n}(\tilde{t}) = \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}} = (n_1, n_2, \dots n_i, \dots), \quad n_i \in \mathbb{N}$$

такую, что

$$n_1 = t_1 2^1, \quad n_2 = t_1 2^1 + t_2 2^2, \dots, \quad n_i = \sum_{k=1}^{i} t_k 2^k, \dots . \tag{2.26}$$

Лемма 2.7. *Пусть* $\tilde{t}^{(1)} = \{t_i^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $\tilde{t}^{(2)} = \{t_i^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— две различные последовательности со значениями в* $\{0, 1\}$*, а последовательности* $\tilde{n}(\tilde{t}^{(1)}) = \{n_i^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $\tilde{n}(\tilde{t}^{(2)}) = \{n_i^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *определены соотношениями* (2.26)*. Тогда существует* $i_0 = i_0(\tilde{t}^{(1)}, \tilde{t}^{(2)})$ *такое, что*

$$n_i^{(1)} \neq n_i^{(2)} \tag{2.27}$$

при всех $i \geqslant i_0$*.*

Доказательство. Пусть i_0 — первое натуральное i для которого $t_i^{(1)} \neq t_i^{(2)}$. Для любого $j \geqslant i_0$ обозначим $\bar{j}$ наибольший из индексов i таких, что $i \leqslant j$ и $t_i^{(1)} \neq t_i^{(2)}$. Не уменьшая общности можно считать, что

$$t_{\bar{j}}^{(1)} = 1 \quad \text{и} \quad t_{\bar{j}}^{(2)} = 0.$$

Оценим разность $n_j^{(1)} - n_j^{(2)}$ при $j \geqslant i_0$,

$$n_j^{(1)} - n_j^{(2)} = n_{\bar{j}}^{(1)} - n_{\bar{j}}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\bar{j}} (t_k^{(1)} - t_k^{(2)}) 2^k \geqslant 2^{\bar{j}} - \sum_{k=1}^{\bar{j}-1} 2^k = 2^{\bar{j}} - (2^{\bar{j}} - 2) = 2.$$

Таким образом, при $i \geqslant i_0$ имеем

$$|n_j^{(1)} - n_j^{(2)}| \geqslant 2$$

что и доказывает лемму. □

Следствие 2.3. *Отображение* $\tilde{t} \mapsto \tilde{n}(\tilde{t})$ *определенное правилом* (2.26) *инъективно на множестве всех последовательностей* $\tilde{t}$ *с элементами из* $\{0,1\}$.

Окончание доказательства теоремы 2.3. Пусть X — подмножество l_2, заданное формулой (2.23). Перенумеруем векторы базиса ε стандартным образом

$$e_1 = (1,0,0\ldots), \quad e_2 = (0,1,0,0\ldots), \quad e_3 = (0,0,1,0\ldots) \quad \text{и т.д.}$$

Для каждой последовательности $\tilde{n} = \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, полученной в соответствии с (2.26), определим элемент $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{n}) = (x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ как $x_i = r_i e_{n_i}$, где r_i — i-ый член нормирующей последовательности $\tilde{r}$.

Множество полученных таким образом последовательностей обозначим через A. Из леммы 2.7 следует, что если $\tilde{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ два различных элемента множества A, то найдется $i_0 = i_0(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$x_i \neq y_i$$

при $i \geqslant i_0$. По лемме 2.6 любые $\tilde{x}, \tilde{y} \in A$ являются взаимностабильными, а множество $A \cup \{\tilde{0}\}$ — самостабильное подмножество множества $\tilde{X}$. Пусть $\tilde{X}_{0,\tilde{r}}$ максимальное в $\tilde{X}$ самостабильное множество для которого $A \cup \{\tilde{0}\} \subseteq \tilde{X}_{0,\tilde{r}}$ (такое $\tilde{X}_{0,\tilde{r}}$ найдется по лемме Цорна) и пусть $\Omega^X_{0,\tilde{r}}$ — метрическая идентификация $\tilde{X}_{0,\tilde{r}}$. Используя следствие 2.3 видим, что A имеет мощность континуум, а из (2.25) следует, что проектирование $pr_X : \tilde{X}_{0,\tilde{r}} \to \Omega^X_{0,\tilde{r}}$ инъективно на A и для любых различных точек γ, β множество $B := pr_X(A)$ выполнено (2.22). Как отмечалось выше, этого достаточно для справедливости теоремы. $\square$

Под параметрической k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$, будем понимать непустое множество $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ вместе с гомеоморфизмом $F : U \to Y$, где U — открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^k$. Здесь и далее мы считаем Y метрическим пространством с метрикой индуцированной из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Используя стандартные базисы (в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$) можно записать F в координатной форме. Пусть $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in U$ тогда

$$F(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})),$$

$$f_1(\bar{x}) = f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \quad f_n(\bar{x}) = f_n(x_1, \ldots, x_k).$$

Будем говорить, что поверхность Y невырождена в точке $F(\bar{b})$, $\bar{b} \in U$, если F дифференцируема в точке $\bar{b}$ и ранг матрицы Якоби

$$F'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

равен k в этой точке, $\operatorname{rank}(F'(\bar{b})) = k$. Отметим, что свойство поверхности быть невырожденной в точке сохраняется при замене базисов в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^k$. Это легко получить используя правило дифференцирования сложной функции и того факта, что ранг произвольной матрицы A не изменится при умножении A на невырожденную матрицу [13, с. 101].

Следствие 2.4. *Пусть Y — k-мерная параметрическая поверхность в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$, с параметризацией $F : U \to Y$, где U — открытое подмножество $\mathbb{R}^k$, $\bar{0} = (0, \dots, 0) \in U$. Если Y невырождена в точке $\bar{a} = F(\bar{0})$, то каждое предкасательное пространство $\Omega^X_{\bar{a},\tilde{r}}$ является касательным и изометрично $\mathbb{R}^k$.*

Для доказательства нам понадобятся некоторые результаты статьи [6]. Приведем их.

Пусть (X, d) — метрическое пространство с фиксированной точкой a, Y и Z — подпространства X такие, что $a \in Y \cap Z$ и пусть $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — нормирующая последовательность.

Определение 2.3. *Пространства Y и Z называются касательно эквивалентными в точке a относительно $\tilde{r}$, если для каждой $\tilde{y}_1 = \{y_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{Y}$ и каждой $\tilde{z}_1 = \{z_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{Z}$ с конечными пределами*

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{a}, \tilde{y}_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(y_n^{(1)}, a)}{r_n} \quad \textit{and} \quad \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{a}, \tilde{z}_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(z_n^{(1)}, a)}{r_n}$$

существуют $\tilde{y}_2 = \{y_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{Y}$ и $\tilde{z}_2 = \{z_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{Z}$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(y_n^{(1)}, z_n^{(2)})}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d(y_n^{(2)}, z_n^{(1)})}{r_n} = 0.$$

Y и Z называются строго касательно эквивалентными, если (Y, a) и (Z, a) — касательно эквивалентные для каждой нормирующей последовательности $\tilde{r}$.

Пусть $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$. Для нормирующей последовательности $\tilde{r}$ определим семейство $[\tilde{F}]_Y = [\tilde{F}]_{Y,\tilde{r}}$ правилом

$$(\tilde{y} \in [\tilde{F}]_Y) \Leftrightarrow ((\tilde{y} \in \tilde{Y}) \& (\exists\, \tilde{x} \in \tilde{F} : \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0)).$$

Лемма 2.8. *Пусть Y и Z — подпространства X, $a \in Y \cap Z$ и пусть $\tilde{r}$ — нормирующая последовательность. Предположим Y и Z касательно эквивалентные относительно $\tilde{r}$. Тогда следующие утверждения верны для каждого максимального самостабильного (в $\tilde{Z}$) семейства $\tilde{Z}_{a,\tilde{r}}$.*

(*i*) *Семейство* $[\tilde{Z}_{a,\tilde{r}}]_Y$ — *максимальное самостабильное* (*в* $\tilde{Y}$) *и*

$$[[\tilde{Z}_{a,\tilde{r}}]_Y]_Z = \tilde{Z}_{a,\tilde{r}} = [\tilde{Z}_{a,\tilde{r}}]_Z.$$

(*ii*) *Если* $\Omega^Z_{a,\tilde{r}}$ *и* $\Omega^Y_{a,\tilde{r}}$ — *метрические идентификации* $\tilde{Z}_{a,\tilde{r}}$ *и* $\tilde{Y}_{a,\tilde{r}}$, *а* $\tilde{Y}_{a,\tilde{r}} := [\tilde{Z}_{a,\tilde{r}}]_Y$, *тогда отображение*

$$\Omega^Z_{a,\tilde{r}} \ni \alpha \longmapsto [\alpha]_Y \in \Omega^Y_{a,\tilde{r}}$$

является изометрией. Кроме того, если $\Omega^Z_{a,\tilde{r}}$ — *касательное, то* $\Omega^Y_{a,\tilde{r}}$ *также касательное.*

Для $a \in Y$ и $t > 0$ определим через

$$S^Y_t = S^Y(a,t) := \{y \in Y : d(a,y) = t\}$$

сферу в Y с центром a и радиусом t и аналогично определим сферу $S^Z_t = S^Z(a,t)$. Положим

$$\varepsilon_a(t,Z,Y) := \sup_{z \in S^Z_t} \inf_{y \in Y} d(z,y)$$

и аналогично определим $\varepsilon_a(t,Y,Z)$. Пусть теперь

$$\varepsilon_a(t) = \varepsilon_a(t,Z,Y) \vee \varepsilon_a(t,Y,Z).$$

Лемма 2.9. *Пусть* Y *и* Z — *подпространства* (X,d) *и пусть* $a \in Y \cap Z$. *Подпространства* Y *и* Z *сильно касательно эквивалентны в точке* a *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varepsilon_a(t)}{t} = 0. \tag{2.28}$$

Доказательство следствия 2.4. Пусть Y — невырождена в точке $\bar{a} = F(\bar{0})$. Тогда в этой точке Y имеет k-мерную касательную плоскость H, являющуюся образом пространства $\mathbb{R}^k$ при отображении

$$\mathbb{R}^k \ni \bar{x} \mapsto F'(\bar{0})\bar{x} + F(\bar{0}) \in \mathbb{R}^n \tag{2.29}$$

где $F'(\bar{0})$ — матрица Якоби отображения F в точке $\bar{0} \in U$. Из теоремы 2.2 следует, что любое предкасательное пространство $\Omega^H_{\bar{a},\tilde{r}}$ является касательным и изометрично $\mathbb{R}^k$. Используя лемму 2.8 видим, что для доказательства настоящего следствия достаточно проверить, что Y и H строго касательно эквивалентные в точке $\bar{a} = F(\bar{0})$. Для этого в соответствии (2.28) достаточно установить, что

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varepsilon_{\bar{a}}(t,H,Y) \vee \varepsilon_{\bar{a}}(t,Y,Y)}{t} = 0.$$

Последнее выполняется тогда и только тогда, когда

$$\varlimsup_{t\to 0}\frac{\varepsilon_{\bar a}(t,H,Y)}{t}=0 \tag{2.30}$$

и

$$\varlimsup_{t\to 0}\frac{\varepsilon_{\bar a}(t,Y,H)}{t}=0. \tag{2.31}$$

Докажем последнее равенство. Пусть $\bar y$ — точка поверхности Y, удаленная на расстояние $t>0$ от точки $\bar a$. Пусть $\bar x$ — точка в U такая, что $\bar y=F(\bar x)$. Положим $\bar z=F'(\bar 0)\bar x+F(\bar 0)$. Очевидно, что $\bar z\in H$. Непосредственно из определения величины $\varepsilon_{\bar a}(t,Y,H)$ следует, что (2.31) будет доказано, если

$$\lim_{\substack{\tilde y\neq\bar a,\\ \bar y\to\bar a}}\frac{\|\bar y-\bar z\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\bar a-\bar y\|_{\mathbb{R}^n}}=0. \tag{2.32}$$

Так как $F:U\to Y$ — гомеоморфизм, то существует непрерывное обратное отображение $F^{-1}:Y\to U$, а значит $\bar x=F^{-1}(\bar y)$ стремится к $\bar 0$ при $\bar y\to\bar a$. Перепишем предел из (2.32) в виде

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\tilde y\neq\bar a,\\ \bar y\to\bar a}}\frac{\|\bar y-\bar z\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\bar a-\bar y\|_{\mathbb{R}^n}}&=\lim_{\substack{\tilde x\neq\bar 0,\\ \bar x\to\bar 0}}\frac{\|F(\bar x)-F'(\bar 0)\bar x-F(\bar 0)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\bar a-F(\bar x)\|_{\mathbb{R}^n}}\\&=\lim_{\substack{\tilde x\neq\bar 0,\\ \bar x\to\bar 0}}\frac{\|F(\bar x)-F'(\bar 0)\bar x-F(\bar 0)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\bar x\|_{\mathbb{R}^k}}\frac{\|\bar x\|_{\mathbb{R}^k}}{\|\bar a-F(\bar x)\|_{\mathbb{R}^n}}\end{aligned}$$

В силу дифференцированности F в точке $\bar 0$ имеем

$$\lim_{\substack{\tilde x\neq\bar 0,\\ \bar x\to\bar 0}}\frac{\|F(\bar x)-F'(\bar 0)\bar x-F(\bar 0)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\bar x\|_{\mathbb{R}^k}}=0.$$

Для доказательства (2.32) достаточно проверить, что

$$\lim_{\substack{\tilde x\neq\bar 0,\\ \bar x\to\bar 0}}\frac{\|\bar x\|_{\mathbb{R}^k}}{\|\bar a-F(\bar x)\|_{\mathbb{R}^n}}<\infty. \tag{2.33}$$

Используя дифференцируемость в $\bar 0$ еще раз, имеем

$$F(\bar x)-\bar a=F'(\bar 0)\bar x+o(\|\bar x\|_{\mathbb{R}^k}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\tilde x\neq\bar 0,\\ \bar x\to\bar 0}}\frac{\|\bar x\|_{\mathbb{R}^k}}{\|\bar a-F(\bar x)\|_{\mathbb{R}^n}}&=\lim_{\substack{\tilde x\neq\bar 0,\\ \bar x\to\bar 0}}\left\|F'(0)\frac{\bar x}{\|\bar x\|_{\mathbb{R}^k}}\right\|_{\mathbb{R}^n}^{-1}\\&\leqslant\left(\inf\{\|F'(\bar 0)\bar x\|_{\mathbb{R}^n}:\|\bar x\|_{\mathbb{R}^k}=1\}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Линейное отображение

$$\mathbb{R}^k \ni \bar{x} \mapsto F'(\bar{0})\bar{x} \in H - \bar{a}, \tag{2.34}$$

где $H - \bar{a}$ — линейное в $\mathbb{R}^n$ подпространство, полученное сдвигом аффинного подпространства H на вектор $-\bar{a}$, является невырожденным, так как $\operatorname{rank}(F'(\bar{0})) = k$. Следовательно,

$$\inf\left\{\|F'(\bar{0})\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} : \|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^k} = 1\right\} = \frac{1}{c}$$

где c — норма оператора обратного к (2.34). Напомним, что все линейные отображения конечномерных пространств непрерывны, а значит $c < \infty$. Таким образом

$$\lim_{\substack{\bar{x}\neq\bar{0},\\ \bar{x}\to\bar{0}}} \frac{\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^k}}{\|\bar{a} - F(\bar{x})\|_{\mathbb{R}^n}} \leqslant c < \infty$$

что и доказывает (2.33).

Проверка предельного соотношения (2.30) проводится аналогично. □

Замечание 2.4. Условие невырожденности поверхности Y в точке $\bar{a}$ является существенным для справедливости следствия 2.4. Например можно показать, что для двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$, образованной вращением ветви параболы $y = x^2$, $x \geqslant 0$, вокруг оси OX, все пространства предкасательные к ней в точке $(0, 0, 0)$ изометрично $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

Литература

[1] F. Abdullayev, O. Dovgoshey, M. Küçükaslan, *Metric spaces with unique pretangent spaces. Conditions of the uniqueness* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **36** (2011), No. 2, (в печати).

[2] Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель, *Функциональный анализ*, Киев, Выща Школа, 1990, 600 с.

[3] В. В. Билет, А. А. Довгошей, *Отношение "лежать между", птолемеевы пространства и изометрические вложения предкасательных пространств в* $\mathbb{R}$ // Український математичний вiсник, **8** (2011), (в печати).

[4] L. Blumenthal, *Theory and application of distance geometry*, Oxford University Press, 1953, 347 p.

[5] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва, Наука, 1967, 575 с.

[6] O. Dovgoshey, *Tangent spaces to metric spaces and to their subspaces* // Ukr. Mat. Visn., **5** (2008), No. 4, 470–487.

[7] O. Dovgoshey, F. Abdullayev, M. Küçükaslan, *Tangent metric spaces to convex sets on the plane* // Reports in Math., Helsinki Univ., **481** (2008), 31 p.

[8] O. Dovgoshey, F. Abdullayev, M. Küçükaslan, *Compactness and boundedness of tangent spaces to metric spaces* // Beiträge Algebra Geom., **51** (2010), N 2, 547–576.

[9] А. А. Довгошей, Д. В. Дордовский, *Ультраметричность касательных пространств к метрическим пространствам* // Доповіді НАН України, (2010), No. 3, 19–23.

[10] O. Dovgoshey, D. Dordovskyi, *Ultrametricity and metric betweenness in tangent spaces to metric spaces* // P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. and Appl., **2** (2010), No. 2, 100–113.

[11] O. Dovgoshey, O. Martio, *Tangent spaces to metric spaces* // Reports in Math., Helsinki Univ., **480** (2008), 20 p.

[12] Л. В. Канторович, Г. П. Акимов, *Функциональный анализ*, Москва, Наука, 1977, 741 с.

[13] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Москва, Наука, 1975, 431 с.

[14] M. Ó. Searcóid, *Metric spaces*, Springer–Verlag, London Limited, 2007, 304 p.

[15] Y. Väsälä, *A proof of the Mazur–Ulam theorem* // Amer. Math. Monthly, **110** (2003), No. 7, 633–635.

Сведения об авторах

Дмитрий В. Дордовский

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург 74,
Донецк 83114
Украина
E-Mail: dordovskydmitry@gmail.com