Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 1, 112 – 128

Обернена спектральна задача для стільтьєсівської струни, що має форму вісімки

Ольга М. Мартинюк, В'ячеслав М. Пивоварчик

(*Представлена М. Л. Горбачуком*)

Анотація. Розглянуто спектральну задачу, породжену рівнянням стільтьєсівської струни на метричному графі в формі вісімки, а також обернену задачу, що полягає в наступному: відомі величини мас, які розташовані на першій петлі, разом із інтервалами між ними, а також спектр задачі на вісімці та загальна довжина другої петлі разом з довжиною першого часткового відрізка і деякою константою. Треба знайти величини мас на другій петлі вісімки та довжини інтервалів між ними. В неявному вигляді знайдено умови існування розв'язку такої оберненої задачі. Запропоновано метод знаходження мас та довжин інтервалів на другій петлі графа.

2010 MSC. 34K29, 34K10, 39A70.

Ключові слова та фрази. Характеристичний многочлен, стільтьєсівська струна, граф, спектр, власні значення, кратність власних значень, граф у вигляді вісімки, напівобернена задача, задача Хохштадта–Лібермана.

Поняття стільтьєсівської струни запровадив М. Г. Крейн, який дав механічне тлумачення результатам Стільтьєса про розвинення в ланцюговий дріб так званої стільтьєсівської функції. Він назвав стільтьєсівською струною пружну невагому нитку, яка несе на собі зосереджені маси. Кількість мас може бути скінченною або нескінченною. Якщо кількість мас нескінченна, то повинно відбуватися накопичення мас тільки до одного з кінців (цьому випадку відповідає нескінченний ланцюговий дріб). Ми будемо розглядати випадок скінченної кількості мас.

Стаття надійшла в редакцію 20.12.2010
В. Пивоварчик висловлює подяку Swiss National Science Foundation за фінансову підтримку через грант IZ73Z0-128135

ISSN 1810 – 3200.

Пряму та обернену задачі для стільтьєсівської струни на скінченному інтервалі було розглянуто в [1]. Було доведено, що два спектри крайових задач разом із загальною довжиною струни однозначно визначають розподіл мас струни. Спектральну задачу для скінченного інтервалу для струни з демпфованим кінцем було розглянуто в [2–4].

У той час, як класична задача роботи [1] є дискретним аналогом задачі Штурма–Ліувілля, було розглянуто також дискретні аналоги так званої напівоберненої задачі або задачі Хохштадта–Лібермана [5]. Теорема цієї роботи стверджує, що відомий майже всюди на $[0, \frac{a}{2}]$ потенціал $q(x)$ рівняння Штурма–Ліувілля та спектр $\{\lambda_k\}_{-\infty, k\neq 0}^{\infty}$ крайової задачі, породженої даним рівнянням і крайовими умовами $y(0) = y(a) = 0$, однозначно визначають $q(x)$ на $[a/2, a]$ як функцію з $L_2\,(a/2, a)$. Дискретний аналог теореми Хохштадта–Лібермана було розглянуто в [6–8]. У перших двох з цих робіт розглянуто обернену задачу, породжену якобієвою матрицею, за певних умов доведено єдиність розв'язку. У [8] розглянуто теорему Хохштадта–Лібермана для стільтьєсівської струни, тобто відомі величини мас, розташованих на лівій половині струни, разом із інтервалами між ними, кількість яких становить половину загальної, а також спектр задачі Діріхле, породженої цією струною, та її довжина. Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку оберненої задачі. Запропоновано метод знаходження мас та довжин інтревалів на правій частині струни.

Прямі та обернені спектральні задачі на зірковому графі, що складається зі стільтьєсівських струн, розглянуто в [9]. Достатні умови існування розв'язку оберненої задачі, породженої рівнянням стільтьєсівської струни, за двома спектрами у випадку, коли областю є дерево, отримано в [10]. У [11] було розглянуто пряму задачу для стільтьєсівської струни в формі вісімки, де було доведено, що власні значення такої задачі чергуються з елементами об'єднання множин власних значень задач Діріхле, породжених струнами, що становлять петлі графа, і також з елементами об‘єднання множин власних значень періодичних задач на петлях вісімки.

У даній роботі розглядається пряма та обернена спектральні задачі для стільтьєсівської струни, що має форму вісімки. В єдиній вершині цього графа накладено умови неперервності та умову Кірхгофа, яка описує баланс сил у внутрішній вершині.

У розділі 2 наведено результати з [11]. Твердження цієї роботи є необхідними умовами існування розв'язку оберненої задачі, яку розглянуто в розділі 3. Вона полягає в наступному. Відомі власні значення задачі на вісімці, величини зосереджених мас та довжини часткових інтервалів на першій петлі вісімки. Відомими також вважаємо величину першого часткового відрізка $\widetilde{l}_0$ на другій петлі, її загальну довжину та деяку константу $\widetilde{c}_1$ (див. (3.33)). Необхідно знайти величини точкових мас та довжини часткових інтервалів на другій петлі. У статті знайдено достатні умови існування розв'язку такої оберненої задачі. Запропоновано метод відновлення мас та часткових інтервалів, який включає побудову відповідних многочленів Лагранжа та розклад у ланцюговий дріб S_0-функції.

Слід відмітити, що порідненою з вище описаною задачею є, так звана, задача за трьома спектрами [12, 14, 15]. Під трьома спектрами маються на увазі спектр крайової задачі на всьому інтервалі та спектри крайових задач на двох частинах цього інтервалу, тобто на ребрах графа.

1. Періодична задача для стільтьєсівської струни

Розглянемо струну Стільтьєса довжини L, тобто пружну невагому нитку з зосередженими масами, початок і кінець якої співпадають у деякій точці A, утворюючи таким чином кільце. Нехай на струні розташовано n зосереджених мас, величини яких позначимо через m_k, $k = \overline{1,n}$, які разом з обраною точкою розбивають струну на часткові відрізки довжин $l_k > 0$, $k = \overline{0,n}$ так, що l_k знаходиться зліва від маси m_{k+1}, а l_{k+1} — справа від даної маси.

Малі поперечні коливання такої струни можна охарактеризувати за допомогою поперечних зміщень зосереджених мас $V_k(t)$, де t — час.

Якщо обрати на струні деяку масу m_k і розглянути її поперечне зміщення $V_k(t)$ від положення рівноваги, то коливання маси m_k описується наступним рівнянням:

$$\frac{V_k(t) - V_{k-1}(t)}{l_{k-1}} + \frac{V_k(t) - V_{k+1}(t)}{l_k} + m_k V_k''(t) = 0 \quad (k = \{1, 2, \dots, n\}). \tag{1.1}$$

Умова співпадіння початку струни з кінцем описується рівнянням:

$$V_0(t) = V_{n+1}(t). \tag{1.2}$$

Розглянемо періодичну задачу, яка виникає, якщо до рівнянь (1.1), (1.2) приєднати рівняння

$$\frac{V_1(t) - V_0(t)}{l_0} = \frac{V_{n+1}(t) - V_n(t)}{l_n}. \tag{1.3}$$

Це рівняння описує баланс сил у точці A та є аналогом умови Кірхгофа в теорії електричних ланцюгів та в квантовій механіці.

Виконуючи в (1.1)–(1.3) заміну $V_k(t) = U_k e^{i\rho t}$ приходимо до системи лінійних рівнянь:

$$\frac{U_k - U_{k-1}}{l_{k-1}} + \frac{U_k - U_{k+1}}{l_k} - m_k \lambda U_k = 0, \quad (k = \{1, 2, \dots, n\}) \tag{1.4}$$

$$U_0 = U_{n+1}, \tag{1.5}$$

$$\frac{U_1 - U_0}{l_0} = \frac{U_{n+1} - U_n}{l_n}, \tag{1.6}$$

де U_k — амплітуда коливань маси m_k, а число $\lambda = \rho^2$ відіграє роль спектрального параметра.

Згідно [1], розв'язок системи U_k будемо шукати у вигляді:

$$U_k = R_{2k-2}(\lambda) a + Q_{2k-2}(\lambda) b, \tag{1.7}$$

де $R_{2k-2}(\lambda), Q_{2k-2}(\lambda)$ — многочлени, що задаються наступною системою рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned} R_{2k}(\lambda) &= l_k R_{2k-1}(\lambda) + R_{2k-2}(\lambda), \\ R_{2k-1}(\lambda) &= R_{2k-3}(\lambda) - m_k \lambda R_{2k-2}(\lambda), \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} Q_{2k}(\lambda) &= l_k Q_{2k-1}(\lambda) + Q_{2k-2}(\lambda), \\ Q_{2k-1}(\lambda) &= Q_{2k-3}(\lambda) - m_k \lambda Q_{2k-2}(\lambda) \end{aligned} \tag{1.9}$$

з відповідними початковими умовами

$$R_0(\lambda) = 1, \quad R_{-1}(\lambda) = \frac{1}{l_0}, \tag{1.10}$$

$$Q_0(\lambda) = 1, \quad Q_{-1}(\lambda) = 0. \tag{1.11}$$

Вектор $(U_0, U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1})$, де U_k задані рівняннями (1.7), задовольняє рівняння (1.4) завдяки співвідношенням (1.8)–(1.11).

Рівняння (1.5), враховуючи (1.8)–(1.11), набуде вигляду:

$$R_{2n}(\lambda) a + (Q_{2n}(\lambda) - 1)\, b = 0. \tag{1.12}$$

З рівняння (1.6) випливає наступне:

$$\left(\frac{1}{l_0} - R_{2n-1}(\lambda)\right) a - Q_{2n-1}(\lambda) b = 0. \tag{1.13}$$

Рівняння (1.12)–(1.13) становлять систему лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь з двома невідомими a, b. Нетривіальний її розв'язок існує тоді і тільки тоді, коли визначник системи

$$p(\lambda) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} R_{2n}(\lambda) & Q_{2n}(\lambda) - 1 \\ \frac{1}{l_0} - R_{2n-1}(\lambda) & -Q_{2n-1}(\lambda) \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

дорівнює нулю.

Якщо врахувати аналог тотожності Лагранжа (див. [16])

$$R_{2k-1}(\lambda)Q_{2k}(\lambda) - R_{2k}(\lambda)Q_{2k-1}(\lambda) = \frac{1}{l_0}, \tag{1.15}$$

то рівняння (1.14) можемо переписати у вигляді:

$$p(\lambda) = \frac{Q_{2n}(\lambda) + l_0 R_{2n-1}(\lambda) - 2}{l_0}. \tag{1.16}$$

Відмітимо, що $p(0) = 0$, оскільки з рекурентних співвідношень (1.8)–(1.11) випливає, що $Q_{2n}(0) = 1,\ R_{2n-1}(0) = \frac{1}{l_0}$.

Означення 1.1. *Функція $f(z)$ називається неванлінновою функцією, якщо:*

1) $f(z)$ *аналітична в півплощинах* $\operatorname{Im} z > 0$ *та* $\operatorname{Im} z < 0$*;*

2) $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$*;*

3) $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geq 0$ *для* $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Означення 1.2. *Функцію $f(z)$, що є аналітичною в $C\backslash[0, +\infty)$, будемо називати S-функцією, якщо*

1) $f(z)$ *неванліннова;*

2) $f(z) \geq 0$ *для* $z < 0$.

Клас S-функцій позначимо через S.

Означення 1.3. *S-функцію $f(z)$ будемо називати S_0-функцією, якщо вона не має полюса в нулі, тобто $|f(0)| < \infty$.*

Поряд з цією задачею будемо розглядати, так звану, задачу Діріхле–Діріхле, породжену рівняннями (1.4) та умовами Діріхле на обох кінцях:

$$U_0 = 0,$$

$$U_{n+1} = 0.$$

Тоді $R_{2n}(\lambda)$ — характеристичний многочлен задачі Діріхле–Діріхле.

Теорема 1.1. *Після скорочення спільних множників у чисельнику і знаменнику, якщо такі існують, раціональна функція*

$$\frac{R_{2n}(\lambda)}{p(\lambda)} \in S. \tag{1.17}$$

Цю теорему доведено в [11].

Нехай $\{\nu_k\}_{k=1}^n$ є власними значеннями задачі Діріхле–Діріхле, породженої струною на інтервалі довжини L, а $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ — власні значення періодичної задачі на цьому ж інтервалі. Тоді за теоремою 1.1 $\{\nu_k\}_{k=1}^n$ нестрого чергуються з $\{\mu_k\}_{k=1}^n$:

$$0 = \mu_1 < \nu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \nu_n.$$

При деякому значенні λ всі елементи матриці системи (1.12)–(1.13) можуть дорівнювати 0:

$$R_{2n}(\lambda) = Q_{2n}(\lambda) - 1 = \frac{1}{l_0} - R_{2n-1}(\lambda) = -Q_{2n-1}(\lambda) = 0,$$

тобто існує два лінійно незалежних розв'язки системи (1.12)–(1.13). Таким чином, кратність цього кореня $p(\lambda)$ дорівнює 2. Більшою вона бути не може, тому що, як відомо [1], всі корені $R_{2n}(\lambda)$ прості і якщо $p(\lambda)$ мало б корінь кратності більше, ніж 2, то (1.17) було б неможливим завдяки (1.8)–(1.11) та аналогічним співвідношенням для $\tilde{R}_{2k-2}(\lambda),\ \tilde{Q}_{2k-2}(\lambda)$.

2. Пряма задача для графа у вигляді вісімки

Розглянемо метричний граф у вигляді вісімки, в якого довжина однієї з його петель L, іншої — $\widetilde{L}$, а вершина графа є точкою з'єднання. Нехай на одній петлі знаходиться n точкових мас $m_k,\ k = \overline{1, n}$, які разом з вершиною графа розбивають петлю на часткові відрізки довжин $l_k > 0,\ k = \overline{0, n},\ \sum_{k=0}^n l_k = L$. Амплітуди малих коливань такої струни можна охарактеризувати за допомогою рівнянь (1.4).

На іншій петлі знаходиться n точкових мас $\widetilde{m}_k$, які разом з вершиною розбивають петлю довжини $\widetilde{L}$ на часткові відрізки довжин $\widetilde{l}_k > 0,\ k = \overline{0, n}$, $\sum_{k=0}^n \widetilde{l}_k = \widetilde{L}$. Малі коливання такої струни можна охарактеризувати за допомогою амплітуд коливань точкових мас $\widetilde{U}_k$, що задовольняють рівняння

$$\frac{\widetilde{U}_k - \widetilde{U}_{k-1}}{\widetilde{l}_{k-1}} + \frac{\widetilde{U}_k - \widetilde{U}_{k+1}}{\widetilde{l}_k} - \widetilde{m}_k \lambda \widetilde{U}_k = 0, \quad (k = \{1, 2, \ldots, n\}). \tag{2.18}$$

Нехай у вершині графа виконуються умови неперервності

$$U_0 = U_{n+1} = \widetilde{U}_0 = \widetilde{U}_{n+1} \tag{2.19}$$

та умова балансу сил, або ж умова Кірхгофа:

$$\frac{U_1 - U_0}{l_0} + \frac{\widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_0}{\widetilde{l}_0} = \frac{U_{n+1} - U_n}{l_n} + \frac{\widetilde{U}_{n+1} - \widetilde{U}_n}{\widetilde{l}_n}. \tag{2.20}$$

Розв'язок $(U_0, U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}, \widetilde{U}_0, \widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \dots, \widetilde{U}_n, \widetilde{U}_{n+1})$ системи, що складається із рівнянь (1.4) та (2.18)–(2.20), будемо шукати у вигляді:

$$U_k = R_{2k-2}(\lambda)a + Q_{2k-2}(\lambda)b, \tag{2.21}$$

$$\widetilde{U}_k = \widetilde{R}_{2k-2}(\lambda)\widetilde{a} + \widetilde{Q}_{2k-2}(\lambda)\widetilde{b}, \tag{2.22}$$

де $R_{2k-2}(\lambda), Q_{2k-2}(\lambda)$ — многочлени, що задаються системою (1.8)–(1.11). Аналогічні співвідношення виконуються для $\widetilde{R}_{2k-2}(\lambda)$, $\widetilde{Q}_{2k-2}(\lambda)$, де $\widetilde{m}_k$ беремо замість m_k та $\widetilde{l}_k$ замість l_k.

Вектор $(U_0, U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}, \widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \dots, \widetilde{U}_n, \widetilde{U}_{n+1})$, де $\{U_k, \widetilde{U}_k\}$ задано рівняннями (2.21)–(2.22), задовольняє рівняння (1.4) та (2.18) завдяки (1.8)–(1.11).

Враховуючи (1.8)–(1.11), рівняння (2.19), (2.20) відповідно можна привести до вигляду:

$$b = \widetilde{b}, \tag{2.23}$$

$$R_{2n}(\lambda)a + (Q_{2n}(\lambda) - 1)\, b = 0, \tag{2.24}$$

$$\widetilde{R}_{2n}(\lambda)\widetilde{a} + \big(\widetilde{Q}_{2n}(\lambda) - 1\big)\widetilde{b} = 0, \tag{2.25}$$

$$\Big(R_{2n-1}(\lambda) - \frac{1}{l_0}\Big)a + \Big(\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda) - \frac{1}{\widetilde{l}_0}\Big)\widetilde{a} + Q_{2n-1}(\lambda)b + \widetilde{Q}_{2n-1}(\lambda)\widetilde{b} = 0. \tag{2.26}$$

Рівняння (2.23)–(2.26) становлять систему лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь з чотирма невідомими $a, \widetilde{a}, b, \widetilde{b}$. Нетривіальний її розв'язок існує тоді і тільки тоді, коли визначник системи

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) \overset{def}{=} R_{2n}(\lambda)\Big(\frac{1}{\widetilde{l}_0}\widetilde{Q}_{2n}(\lambda) - \frac{2}{\widetilde{l}_0} + \widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)\Big) \\ + \widetilde{R}_{2n}(\lambda)\Big(\frac{1}{l_0}Q_{2n}(\lambda) - \frac{2}{l_0} + R_{2n-1}(\lambda)\Big)\end{aligned} \tag{2.27}$$

дорівнює нулю.

Формулі (2.27) можна надати наступне тлумачення. Умови неперервності у вершині разом з умовою Кірхгофа можна вважати узагальненням умови Неймана на кінці інтервалу для класичної задачі. Так, якщо ці умови накладено у висячій вершині графа, то умова неперервності виконується автоматично, а умова Кірхгофа стає звичайною умовою Неймана. Тому $\varphi(\lambda)$ у (2.27) можна вважати характеристичним многочленом задачі на вісімці з умовою Неймана у вершині. Так само, $p(\lambda)$ та

$$\widetilde{p}(\lambda) \overset{def}{=} \frac{1}{\widetilde{l}_0}\widetilde{Q}_{2n}(\lambda) - \frac{2}{\widetilde{l}_0} + \widetilde{R}_{2n-1}(\lambda), \tag{2.28}$$

що є характеристичними многочленами періодичних задач на першій та другій петлі вісімки, відповідно, можна вважати характеристичними многочленами з умовою Неймана на першій та другій петлі відповідно.

Отже, формула

$$\varphi_N(\lambda) = \varphi_N^I(\lambda)\varphi_D^{II}(\lambda) + \varphi_N^{II}(\lambda)\varphi_D^I(\lambda),$$

отримана в [17] для дерев, справедлива і для графа, що є вісімкою.

Права частина (2.27) — характеристичний многочлен задачі (1.4), (2.18)–(2.20), тобто корені цього многочлена становлять спектр цієї задачі. Цей многочлен можна подати наступним чином:

$$\varphi(\lambda) = c\lambda \prod_{j=2}^{2n} \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\Big), \tag{2.29}$$

де $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$ — множина власних значень задачі на петлі. Взявши похідну виразу (2.27) в точці $\lambda = 0$ і враховуючи, що згідно (1.8)–(1.11) та аналогічними рівняннями для $\widetilde{Q}_k(\lambda)$, $\widetilde{R}_{2k-1}(\lambda)$, виконуються рівності $p(0) = \widetilde{p}(0) = 0$, маємо

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda)\big|_{\lambda=0} = R_{2n}(\lambda)\big|_{\lambda=0}\Big(\frac{1}{\widetilde{l}_0}\widetilde{Q}'_{2n}(\lambda)\big|_{\lambda=0} + \widetilde{R}'_{2n-1}(\lambda)\big|_{\lambda=0}\Big) \\ + \widetilde{R}_{2n}(\lambda)\big|_{\lambda=0}\Big(\frac{1}{l_0}Q'_{2n}(\lambda)\big|_{\lambda=0} + R'_{2n-1}(\lambda)\big|_{\lambda=0}\Big).\end{aligned}$$

Знайшовши значення похідних $R'_{2n-1}(\lambda)$, $Q'_{2n}(\lambda)$, $\tilde{R}'_{2n-1}(\lambda)$ та $\tilde{Q}'_{2n}(\lambda)$ в точці $\lambda = 0$ з рекурентних співвідношень (1.8)–(1.11) та їх аналогів для $\tilde{R}_{2n-1}(\lambda)$ та $\tilde{Q}_{2n}(\lambda)$, отримаємо

$$\begin{aligned}c \overset{def}{=} \varphi'(0) = \big(l_0\widetilde{l}_0\big)^{-1}\Bigg(L\Bigg(\sum_{p=1}^{n}\widetilde{l}_p\sum_{k=1}^{p}\widetilde{m}_k + \sum_{p=1}^{n}\widetilde{m}_p\sum_{k=1}^{p}\widetilde{l}_k\Bigg) \\ + \widetilde{L}\Bigg(\sum_{p=1}^{n}l_p\sum_{k=1}^{p}m_k + \sum_{p=1}^{n}m_p\sum_{k=1}^{p}l_k\Bigg)\Bigg).\end{aligned} \tag{2.30}$$

Наступні теореми 2.1, 2.2 приводимо без доведення, так як їх доведено в [11].

Теорема 2.1. *Нехай* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$ *— власні значення задачі, що складається із* (1.4), *та* (2.18)–(2.20); $\{\nu_k\}_{k=1}^{n}$ *є власні значення задачі*

Діріхле–Діріхле, породженої струною лівої петлі на інтервалі довжини L, а $\{\widetilde{\nu}_k\}_{k=1}^n$ — власні значення задачі Діріхле–Діріхле, породженої струною правої петлі на інтервалі $\widetilde{L}$. Позначимо через

$$\{\xi_k\}_{k=1}^{2n} = \{\nu_k\}_{k=1}^n \bigcup \{\widetilde{\nu}_k\}_{k=1}^n .$$

Тоді $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$ нестрого чергуються з $\{\xi_k\}_{k=1}^{2n}$:

$$0 = \lambda_1 < \xi_1 \leq \cdots \leq \lambda_{2n} \leq \xi_{2n}.$$

Відомо, що кратність коренів многочленів $R_{2n}(\lambda)$ та $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ дорівнює 1; як було доведено в кінці розділу 1, максимальна кратність коренів многочленів $p(\lambda)$ та $\widetilde{p}(\lambda)$ може дорівнювати 2. Крім того, для деякого λ, може бути

$$\frac{1}{\widetilde{l}_0}\widetilde{Q}_{2n}(\lambda) - \frac{2}{\widetilde{l}_0} + \widetilde{R}_{2n-1}(\lambda) = \widetilde{R}_{2n}(\lambda)$$
$$= \frac{1}{l_0}Q_{2n}(\lambda) - \frac{2}{l_0} + R_{2n-1}(\lambda) = R_{2n}(\lambda) = 0.$$

Таким чином, з (2.27) випливає, що кратність коренів $\varphi(\lambda)$ не перевищує та може дорівнювати 3.

Теорема 2.2. *Нехай $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$ — власні значення задачі, що складається з рівнянь* (1.4) *та* (2.18)–(2.20); *$\{\mu_k\}_{k=1}^n$ — власні значення періодичної задачі, породженої лівою струною, на інтервалі довжини L, а $\{\widetilde{\mu}_k\}_{k=1}^n$ — власні значення періодичної задачі, породженої правою струною, на інтервалі $\widetilde{L}$. Позначимо через*

$$\{\zeta_k\}_{k=1}^{2n} = \{\mu_k\}_{k=1}^n \bigcup \{\widetilde{\mu}_k\}_{k=1}^n.$$

Тоді $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$ нестрого чергуються з $\{\zeta_k\}_{k=1}^{2n}$:

$$0 = \zeta_1 = \lambda_1 = \zeta_2 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \zeta_{2n} \leq \lambda_{2n},$$

де $0 = \zeta_1 = \lambda_1 = \zeta_2 = \mu_1 = \widetilde{\mu}_1$.

Аналоги теорем 2.1, 2.2 для дерев можна знайти в [10].

Оскільки нашим завданням є розв'язання оберненої задачі (див. далі), то треба порівняти необхідні та достатні умови існування розв'язку оберненої задачі. Однією з необхідних умов є нестроге чергування коренів $\{\widetilde{\mu}_k\}_{k=1}^n$ з $\{\widetilde{\nu}_k\}_{k=1}^n$, яке випливає з теореми 1.1, якщо її застосувати до другої петлі. Отримаємо ще одну необхідну умову існування розв'язку оберненої задачі.

Тотожність Лагранжа для правої петлі справедлива при будь-яких λ, а в точках $\lambda = \widetilde{\nu}_k$ вона матиме вигляд

$$\widetilde{Q}_{2n}\left(\widetilde{\nu}_k\right) = \frac{1}{\widetilde{R}_{2n-1}\left(\widetilde{\nu}_k\right)\widetilde{l}_0}, \tag{2.31}$$

де $\widetilde{R}_{2n-1}\left(\widetilde{\nu}_k\right) \neq 0$, оскільки неможливе одночасне виконання умов $\widetilde{R}_{2n-1}\left(\widetilde{\nu}_k\right) = 0$ та $\widetilde{R}_{2n}\left(\widetilde{\nu}_k\right) = 0$. Враховуючи (2.31), з рівності (2.28) при $\lambda = \widetilde{\nu}_k$ отримаємо квадратне рівняння відносно $\widetilde{R}_{2n-1}\left(\widetilde{\nu}_k\right)$:

$$\left(\widetilde{l}_0\widetilde{R}_{2n-1}\left(\widetilde{\nu}_k\right)\right)^2 - \widetilde{l}_0\left(2 + \widetilde{p}\left(\widetilde{\nu}_k\right)\right)\widetilde{R}_{2n-1}\left(\widetilde{\nu}_k\right) + 1 = 0. \tag{2.32}$$

Так як корені цього рівняння дійсні (це випливає з рекурентних співвідношень для даних многочленів, які аналогічні співвідношенням (1.8), (1.10)), то дискримінант даного рівняння

$$D = \left(\widetilde{l}_0(2 + \widetilde{p}\left(\widetilde{\nu}_k\right)\right)^2 - 4\left(\widetilde{l}_0\right)^2 = \widetilde{p}\left(\widetilde{\nu}_k\right)\left(\widetilde{l}_0\right)^2\left(4 + \widetilde{p}\left(\widetilde{\nu}_k\right)\right)$$

невід'ємний, тобто для кожного $k = \overline{1, n}$ повинна виконуватись одна із нерівностей

$$\widetilde{p}\left(\widetilde{\nu}_k\right) \geq 0,$$

або

$$\widetilde{p}\left(\widetilde{\nu}_k\right) \leq -4.$$

Виконання однієї з двох останніх нерівностей і є ще однією з необхідних умов для існування розв'язку оберненої задачі.

3. Обернена задача для графа у вигляді вісімки

Розглянемо наступну задачу: на першій петлі нам відомі всі зосереджені маси $\{m_k\}_{k=1}^n$ та довжини інтервалів $\{l_k\}_{k=0}^n$ ($\sum_{k=0}^n l_k = L$). Відомий також спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$, тобто власні значення задачі на вісімці (1.4), (2.18)–(2.20). Відомими також будемо вважати величини $\widetilde{l}_0$, $\widetilde{L}$ та $\widetilde{c}_1$, де

$$\widetilde{c}_1 \stackrel{def}{=} \left(\widetilde{l}_0\right)^{-1}\left(\sum_{p=1}^{n}\widetilde{l}_p\sum_{k=1}^{p}\widetilde{m}_k + \sum_{p=1}^{n}\widetilde{m}_p\sum_{k=1}^{p}\widetilde{l}_k\right), \tag{3.33}$$

що аналогічно формулі (2.30).

Треба знайти величини всіх точкових мас $\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n$ та довжини інтервалів $\{\widetilde{l}_k\}_{k=1}^n$ на другій петлі.

Оскільки всі маси і довжини інтервалів першої петлі нам відомі, ми можемо за допомогою (1.8)–(1.11) знайти многочлени $R_{2n}(\lambda)$,

$R_{2n-1}(\lambda)$, $Q_{2n}(\lambda), Q_{2n-1}(\lambda)$, котрі входять у (2.27). Також можемо знайти $\varphi(\lambda)$, оскільки знаємо $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$, а c можемо знайти за формулою

$$c = \frac{L}{l_0}\widetilde{c}_1 + \frac{\widetilde{L}}{\widetilde{l}_0}c_1 \tag{3.34}$$

де $c_1 = (l_0)^{-1}(\sum_{p=1}^{n} l_p \sum_{k=1}^{p} m_k + \sum_{p=1}^{n} m_p \sum_{k=1}^{p} l_k)$.

Будемо розглядати випадок, коли виконується наступна умова.

Умова 1. *Множина коренів ν_k многочлена $R_{2n}(\lambda)$ не перетинається з множиною коренів μ_k многочлена $p(\lambda)$, $k = \overline{1,n}$, тобто*

$$\{\nu_k\}_{k=1}^{n} \bigcap \{\mu_k\}_{k=1}^{n} = \emptyset.$$

Для знаходження $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ розглянемо задачу інтерполяції, в якості вузлів інтерполяції візьмемо корені ν_k многочлена $R_{2n}(\lambda)$, з (2.27) отримаємо значення $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ у цих вузлах

$$\widetilde{R}_{2n}(\nu_k) = \frac{\varphi(\nu_k)}{\frac{1}{l_0}Q_{2n}(\nu_k) - \frac{2}{l_0} + R_{2n-1}(\nu_k)}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.35}$$

В якості ще одного вузла інтерполяції візьмемо $\nu_0 \overset{def}{=} 0$. Використовуючи (1.8), (1.10) при $\lambda = 0$, отримаємо

$$\widetilde{R}_{2n}(0) = \frac{\widetilde{L}}{\widetilde{l}_0}. \tag{3.36}$$

Це і буде значенням многочлена $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ у вузлі інтерполяції ν_0.

Можемо побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ степені не вище n за вузлами інтерполяції ν_k, $k = \overline{1,n}$ та $\nu_0 = 0$ та значеннями в вузлах інтерполяції (3.35) для $k = \overline{1,n}$ та (3.36) відповідно.

Цей інтерполяційний многочлен матиме вигляд:

$$\widetilde{R}_{2n}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda\varphi(\nu_k)}{\nu_k\left(\frac{1}{l_0}Q_{2n}(\nu_k) - \frac{2}{l_0} + R_{2n}(\nu_k)\right)} \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} \frac{\lambda - \nu_j}{\nu_k - \nu_j} + \frac{(-1)^n \widetilde{L}}{\widetilde{l}_0} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda - \nu_j}{\nu_j}. \tag{3.37}$$

Далі будемо вважати, що виконується

Умова 2. *Степінь побудованого многочлена $\tilde{R}_{2n}(\lambda)$ дорівнює n.*

Будемо шукати многочлен $\widetilde{p}(\lambda)$ у наступному вигляді:

$$\widetilde{p}(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k. \tag{3.38}$$

Знайти коефіцієнти многочлена $\widetilde{p}(\lambda)$ ми можемо двома способами. З (2.27) випливає, що

$$\widetilde{p}(\mu_k)=\frac{\varphi\left(\mu_k\right)}{R_{2n}\left(\mu_k\right)}, \quad k=\overline{1,n}. \tag{3.39}$$

Тут згідно з умовою 1 виконується $R_{2n}(\mu_k)\neq 0$. Так, відновити многочлен $\widetilde{p}(\lambda)$ степені не вище n ми можемо за відомими значеннями (3.39) у вузлових точках μ_k для $k=\overline{1,n}$ та $\widetilde{p}'(0)=\widetilde{c}_1$, де $\widetilde{c}_1$ визначаємо з (3.33).

У цьому випадку, ми отримуємо систему $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $a_k,\ k=\overline{0,n}$:

$$\begin{gathered}
a_0=0,\\
a_1=\widetilde{c}_1,\\
\left(\mu_2\right)^n a_n+\left(\mu_2\right)^{n-1} a_{n-1}+\cdots+\mu_2+a_0=\frac{\varphi\left(\mu_2\right)}{R_{2n}\left(\mu_2\right)},\\
\left(\mu_3\right)^n a_n+\left(\mu_3\right)^{n-1} a_{n-1}+\cdots+\mu_3+a_0=\frac{\varphi\left(\mu_3\right)}{R_{2n}\left(\mu_3\right)},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left(\mu_n\right)^n a_n+\left(\mu_n\right)^{n-1} a_{n-1}+\cdots+\mu_n+a_0=\frac{\varphi\left(\mu_n\right)}{R_{2n}\left(\mu_n\right)},
\end{gathered} \tag{3.40}$$

визначник якої

$$\Delta=\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\
(\mu_2)^n & (\mu_2)^{n-1} & (\mu_2)^{n-2} & \dots & \mu_2 & 1\\
(\mu_3)^n & (\mu_3)^{n-1} & (\mu_3)^{n-2} & \dots & \mu_3 & 1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
(\mu_n)^n & (\mu_n)^{n-1} & (\mu_n)^{n-2} & \dots & \mu_n & 1
\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\mu_2\mu_3\dots\mu_n\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 1\\
(\mu_2)^{n-1} & (\mu_2)^{n-2} & (\mu_2)^{n-3} & \dots & 1\\
(\mu_3)^{n-1} & (\mu_3)^{n-2} & (\mu_3)^{n-3} & \dots & 1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
(\mu_n)^{n-1} & (\mu_n)^{n-2} & (\mu_n)^{n-3} & \dots & 1
\end{vmatrix}.$$

Визначник у правій частині є визначником Вандермонда для іншого многочлена степеня $n-1$, який при попарно різних вузлах $\mu_i \neq \mu_j$ при $i \neq j$; $i, j = \overline{2, n}$, відмінний від нуля.

Отже, повертаючись до задачі про знаходження многочлена за n відомим значенням $\widetilde{p}(\mu_k)$ у вузлах μ_k, $k = \overline{2, n}$ та умовами $\widetilde{p}(0) = 0$, $\widetilde{p}'(0) = \widetilde{c}_1$, ми бачимо, що існує єдиний разв'язок системи (3.40), отже можемо знайти коефіцієнти a_k многочлена (3.38).

Многочлен $\widetilde{p}(\lambda)$ можна знайти й іншим способом. Ми можемо побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа степені не вище n за вищезгаданими даними.

Цей інтерполяційний многочлен матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\widetilde{p}(\lambda) &= \frac{1}{\widetilde{l}_0}\widetilde{Q}_{2n}(\lambda) - \frac{2}{\widetilde{l}_0} + \widetilde{R}_{2n-1}(\lambda) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^2 \varphi(\mu_k)}{\mu_k^2 R_{2n}(\mu_k)} \prod_{\substack{j=2,\\ j\neq k}}^{n} \frac{\lambda - \mu_j}{\mu_k - \mu_j} + (-1)^n \widetilde{c}_1 \lambda \prod_{k=2}^{n} \frac{\lambda - \mu_k}{\mu_k}. \qquad (3.41)\end{aligned}$$

Далі будемо вважати, що виконується

Умова 3. *Степінь побудованого многочлена $\tilde{p}(\lambda)$ дорівнює n.*

Для знаходження величин точкових мас та часткових відрізків на другій петлі необхідно відновити $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$. Оскільки на даний момент нам відомий многочлен $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$, то нам відомі і його корені $\widetilde{\nu}_k$ $(k = \overline{1, n})$. Аналогічно частині 2, при розв'язанні оберненої задачі, використовуючи аналог формули Лагранжа, ми отримаємо квадратний тричлен (2.32), корені якого мають вигляд

$$\left(\widetilde{R}_{2n-1}(\widetilde{\nu}_k)\right)_{1,2} = \frac{2 + \widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k) \pm \sqrt{\widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k)(4 + \widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k))}}{2\widetilde{l}_0}, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (3.42)$$

Для існування розв'язку оберненої задачі, необхідно, щоб підкорінний вираз у (3.42) був невід'ємним. Враховуючи цю умову, викладену в частині 2, можемо відновити інтерполяційний многочлен Лагранжа $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$ степені не більше n, якщо за $n+1$ вузол інтерполяції взяти $\widetilde{\nu}_k$ $(k = \overline{1, n})$ та $\widetilde{\nu}_0 \overset{def}{=} 0$, а в якості значень у цих вузлах інтерполяції взяти одне з двох значень: $((\tilde{R}_{2n-1}(\tilde{\nu}_k))_1$ або $(\tilde{R}_{2n-1}(\tilde{\nu}_k))_2)$, коренів квадратного тричлена в кожному вузлі та $\frac{1}{\tilde{l}_0}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} &\frac{\lambda\left(2 + \widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k) + \sqrt{\widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k)(4 + \widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k))}\right)}{2\widetilde{\nu}_k \widetilde{l}_0} \\ &\times \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} \frac{\lambda - \widetilde{\nu}_j}{\widetilde{\nu}_k - \widetilde{\nu}_j} + \frac{(-1)^n}{\widetilde{l}_0} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda - \widetilde{\nu}_j}{\widetilde{\nu}_j}. \qquad (3.43)\end{aligned}$$

Розглянемо відношення виразів (3.37) та (3.43):

$$\frac{\widetilde{R}_{2n}(\lambda)}{\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda\varphi(\nu_k)}{\nu_k\left(\frac{1}{l_0}Q_{2n}(\nu_k)-\frac{2}{l_0}+R_{2n-1}(\nu_k)\right)}\prod\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n}\frac{\lambda-\nu_j}{\nu_k-\nu_j}+\frac{(-1)^n\widetilde{L}}{\widetilde{l}_0}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda-\nu_j}{\nu_j}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda\left((2+\widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k)+\sqrt{\widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k)(4+\widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k))}\right)}{2\widetilde{\nu}_k\widetilde{l}_0}\prod\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n}\frac{\lambda-\widetilde{\nu}_j}{\widetilde{\nu}_k-\widetilde{\nu}_j}+\frac{(-1)^n}{\widetilde{l}_0}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda-\widetilde{\nu}_j}{\widetilde{\nu}_j}},$$

де $\widetilde{p}\,(\widetilde{\nu}_k)$ — значення інтерполяційного многочлена (3.41) у вузлах інтерполяції $\widetilde{\nu}_k$, які є коренями многочлена $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$.

Теорема 3.1. *Нехай задача* (1.4), (2.18)–(2.20) *має заданий набір параметрів* $(\{m_k\}_{k=1}^n,\ \{l_k\}_{k=0}^n)$*. Нехай задано також числа* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$ *такі, що*

$$0=\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_{2n}.$$

Позначимо побудовані за $(\{m_k\}_{k=1}^n,\ \{l_k\}_{k=0}^n)$ *многочлени згідно з рекурентними співвідношеннями* (1.8)–(1.11) *через* $R_{2n}(\lambda), R_{2n-1}(\lambda)$, $Q_{2n}(\lambda)$ *та побудований за ними згідно* (1.16) *многочлен через* $p(\lambda)$*. Нехай для коренів* ν_k*,* μ_k *многочленів* $R_{2n}(\lambda)$*,* $p(\lambda)$ *виконується умова* 1*. Нехай також задано додатні числа* $\widetilde{L}, \widetilde{c}_1, \widetilde{l}_0$*. Нехай* $\varphi(\lambda)$ *побудовано за формулами* (2.29) *та* (3.34) *за* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$*,* $\widetilde{L}, \widetilde{c}_1, \widetilde{l}_0$ *та* $(\{m_k\}_{k=1}^n$*,* $\{l_k\}_{k=0}^n)$*. Нехай за формулами* (3.37) *і* (3.41) *побудовано многочлени* $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$*,* $\widetilde{p}(\lambda)$*, для яких виконуються умови* 2 *та* 3*, відповідно. Нехай* $\widetilde{\nu}_k$*,* $k=\overline{1,n}$ *— корені многочлена* $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$*, для яких виконується одна з умов* $\widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k)\geq 0$ *або* $\widetilde{p}(\widetilde{\nu}_k)\leq -4$*. Побудуємо многочлен* $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$ *згідно* (3.43)*. Якщо функція*

$$P:=\frac{\widetilde{R}_{2n}(\lambda)}{\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)}$$

є S_0*-функцією, то існують такі набори* $(\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n,\ \{\widetilde{l}_k\}_{k=0}^n)$ *додатних чисел, які разом із* $(\{m_k\}_{k=1}^n,\ \{l_k\}_{k=0}^n)$ *породжують задачу* (1.4), (2.18)–(2.20)*, спектром якої є* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$*, загальна довжина другої петлі дорівнює* $\widetilde{L}$*, довжина крайнього часткового відрізку дорівнює* $\widetilde{l}_0$ *та*

$$\left(\widetilde{l}_0\right)^{-1}\left(\sum_{p=1}^{n}\widetilde{l}_p\sum_{k=1}^{p}\widetilde{m}_k+\sum_{p=1}^{n}\widetilde{m}_p\sum_{k=1}^{p}\widetilde{l}_k\right)=\widetilde{c}_1. \qquad (3.44)$$

При цьому $(\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n,\ \{\widetilde{l}_k\}_{k=0}^n)$ *знаходяться як коефіцієнти розкладу* *в ланцюговий дріб*

$$\frac{\widetilde{R}_{2n}(\lambda)}{\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)} = a_n + \cfrac{1}{-b_n\lambda + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{-b_{n-1}\lambda + \cdots + \cfrac{1}{-b_1\lambda + \cfrac{1}{a_0}}}}}, \quad (3.45)$$

де

$$b_k = \widetilde{m}_k,\ k = \overline{1,n}; \qquad a_k = \widetilde{l}_k,\ k = \overline{0,n}.$$

Доведення. Нам треба довести, що отримані набори $(\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n$, $\{\widetilde{l}_k\}_{k=0}^n)$ додатних чисел разом із $(\{m_k\}_{k=1}^n$, $\{l_k\}_{k=0}^n)$ породжують задачу (1.4), (2.18)–(2.20), спектром якої є $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$. Вочевидь, розв'язуючи пряму задачу за даними $\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n$, $\{\widetilde{l}_k\}_{k=0}^n$, $\{m_k\}_{k=1}^n$ та $\{l_k\}_{k=0}^n$, ми отримаємо, що характеристичними многочленами задач Діріхле–Діріхле та Діріхле–Неймана будуть ті $\tilde{R}_{2n}(\lambda)$ та $\tilde{R}_{2n-1}(\lambda)$, що були отримані за формулами (3.37) та (3.43). Тоді значення характеристичного многочлена періодичної залачі на другій петлі співпадуть зі значеннями $\tilde{p}(\tilde{\nu}_k)$, що використано у (3.42). Отже, значення характеристичного многочлена періодичної задачі на другій петлі, що будуть отримані при розв'язанні прямої задачі, співпадуть зі значеннями $\tilde{p}(\lambda)$ у точках $\lambda = \tilde{\nu}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Оскільки $\tilde{p}(0) = 0$, а найменше власне значення періодичної задачі дорівнює нулю, то значення характеристичного многочлена періодичної задачі на другій петлі співпадуть зі значеннями $\tilde{p}(\lambda)$ у $n + 1$ точці. Це означає, що характеристичнй многочлен періодичної задачі на другій петлі співпаде з $\tilde{p}(\lambda)$ тотожньо. Тоді згідно з (2.27) характеристичний многочлен задачі на вісімці співпаде з $\varphi(\lambda)$ і, отже, спектр задачі на вісімці співпаде з $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$.

Так як характеристичний многочлен задачі Діріхле–Діріхле співпадає з многочленом $\tilde{R}_{2n}(\lambda)$, що отриманий за формулою (3.37), то значення в нулі характеристичного многочлена задачі Діріхле–Діріхле згідно з (3.36) дорівнює $\frac{\tilde{L}}{\tilde{l}_0}$. З іншого боку, характеристичний многочлен задачі Діріхле–Неймана співпадає з $\tilde{R}_{2n-1}(\lambda)$ знайденим з (3.43), а, отже, його значення в нулі дорівнює $\frac{1}{\tilde{l}_0}$. Отже, відношення характеристичного многочлена задачі Діріхле–Діріхле до характеристичного многочлена задачі Діріхле–Неймана в нулі, що дорівнює $\tilde{L}$, співпадає з $\frac{\tilde{R}_{2n}(0)}{\tilde{R}_{2n}(0)} = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \tilde{l}_k$.

Доведемо тепер (3.44). Оскільки, як було показано вище, характеристичний многочлен задачі на вісімці співпадає з $\varphi(\lambda)$, то значення його похідної в нулі співпадає з $\varphi'(0) = c$. Тоді (3.44) випливає з (3.34). Теорему доведено. $\square$

Зауваження 3.1. Розв'язок даної задачі не є єдиним, що характерно для обернених задач на графах, які містять цикли.

Література

[1] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, Москва: ГИТТЛ, 2 изд., 1950, 359 с.

[2] Д. З. Аров, *Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости* // Сибирский мат. ж., **16** (1975), No. 3, 440–465.

[3] K. Veselic, *On Linear Vibrational Systems one Dimensional Damping* // Applicable Analysis, **29** (1988), 1–18.

[4] O. Boyko, V. Pivovarchik, *Inverse problem for Stieltjes string damped at one end* // Methods of Functional Analisys and Topology, **14** (2008), No. 1, 10–19.

[5] H. Hochstadt, B. Lieberman, *An inverse Sturm-Lioville problem with mixed given data* // SIAM J. Appl. Math., **34** (1978), 676–680.

[6] M. S. Derevyagin, *Borg-type theorems for generalized Jacobi matrices and trace formulas* // Methods of Functional Analisys and Topology, **12** (2006), No. 3, 220–233.

[7] I. Michor, G. Teschl, *Jacobi matrices from three spectra* // Spectral Methods for Operators of mathematical physics. Springer, **1** (2004), 151–155.

[8] О. М. Мартинюк, *Теорема Гохштадта–Лібермана для стільтьесівської струни* // Математичні студії, **34** (2010), No. 1.

[9] O. Boyko, V. Pivovarchik, *Inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings* // Methods of Functional Analisys and Topology, **14** (2008), No. 2, 159–167.

[10] V. N. Pivovarchik, *Existence of a tree of Stieltjes strings corresponding to two given spectra* // J. Phys. A, Math, Theor., **42** (2009), 375213, 16 pp.

[11] O. Martynyuk, V. Pivovarchik, *Spectral problem for figure-of-eight graph of Stiltjes strings* // Methods of Functional Analysis and Topology, **16** (2010), No. 4.

[12] V. Pivovarchik, *An inverse Sturm-Liuville problem by three spectra* // Integral Equations Oper. Theory, **34** (1999), No. 2, 234–243.

[13] F. Gesztesy, B. Simon, *On determination of a potential from three spectra* // Advances in Math. Sci.,V. Buslaev, M. Solomyak eds., Amer. Math. Sci. Transl., **189 (2)**)1999), 85–92.

[14] R. Hryniv, Ya. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials, III. Reconstruction by three spectra* // J. Math. Anal. Appl., **284** (2003), No. 2, 626–646.

[15] O. Boyko, V. Pivovarchik, *The inverse three–spectral problem for a Stieltjes string and the inverse problem with one-dimensional damping* //Inverse Problems, **24** (2008), No. 1, 13 pp.

[16] И. С. Кац, М. Г. Крейн, *О спектральной функции струны*, Дополнение 2 в кн.: Аткинсон Ф. *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Москва: Мир, 1968, 749 с.

[17] C. K. Law, V. N. Pivovarchik, *Characteristic functions of quantum graphs* // J. Phys. A Math., Theor., **42** (2009), No. 3, 12 pp.

Відомості про авторів

Ольга Миколаївна Мартинюк, В'ячеслав Миколайович Пивоварчик

Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського,
вул. Старопортофранківська, 26,
Одеса, 65020
Україна
E-Mail: v.pivovarchik@paco.net