Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 1, 101 – 111

Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов

Дмитрий В. Лиманский

(Представлена М. М. Маламудом)

Аннотация. Рассматривается задача об описании пространства $\mathscr{L}(P)$ минимальных дифференциальных полиномов Q, подчиненных в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-норме произведению $P = P_1P_2$ операторов P_1 и P_2, действующих по разным переменным. Доказано, что если операторы P_1 и P_2 эллиптичны и однородны, то пространство $\mathscr{L}(P)$ — минимально возможное, т. е. включение $Q \in \mathscr{L}(P)$ эквивалентно равенству $Q = c_1P + c_2$.

2010 MSC. 35B45, 47F05.

Ключевые слова и фразы. Дифференциальный оператор, эллиптичность, априорная оценка, мультипликатор, преобразование Фурье–Стилтьеса.

1. Введение

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов порядка l:

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_\alpha(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1, \dots, N\}, \tag{1.1}$$

с измеримыми коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot)$. Рассматривается задача об описании линейного пространства $\mathscr{L}^0_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ минимальных дифференциальных полиномов $Q(D)$, удовлетворяющих оценке

$$\|Q(D)f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.2}$$

с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от выбора f.

Статья поступила в редакцию 13.01.2011

ISSN 1810 – 3200.

Эта задача была исчерпывающе решена Л. Хёрмандером [10, теорема 2.2] в случае одного оператора с постоянными коэффициентами, $p = 2$ и ограниченной области Ω. Применяя этот критерий, Хёрмандер показал [10, теорема 2.5], что для оператора P, равного тензорному произведению $P_1 \otimes P_2$ двух дифференциальных операторов P_1 и P_2, действующих по разным переменным, т. е. оператора вида

$$P(D) = P_1(D_1, \ldots, D_{p_1}, 0, \ldots, 0)\, P_2(0, \ldots, 0, D_{p_1+1}, \ldots, D_n), \qquad (1.3)$$

пространство $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P)$ совпадает с линейной оболочкой произведений операторов из $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_1)$ и $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_2)$, т. е. равно тензорному произведению этих пространств, $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P) = \mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_1) \otimes \mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_2)$.

При $N > 1$ пространства $\mathscr{L}^0_{p,\Omega}(P_1, \ldots, P_N)$ описаны в ряде случаев. Хорошо известно [1], что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω система (1.1) эллиптична тогда и только тогда, когда она коэрцитивна в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$ (т. е. оценка (1.2) выполняется для всех операторов Q порядка $\leqslant l$). При $p = 1; \infty$ этот критерий коэрцитивности утрачивает силу. Так, при $p = 1$ (и $N = 1$) Орнстейном [7] доказана невозможность оценки (1.2) для конкретных дифференциальных полиномов Q и P одинакового порядка. Далее, М.М. Маламудом в [6] показано, что из оценки (1.2) при $p = \infty$ вытекает тождество

$$Q^l(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x) P^l_j(x, \xi), \qquad x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

для l-главных символов операторов $Q(D)$ и $\{P_j(x, D)\}_1^N$ (в случае операторов с постоянными коэффициентами это утверждение доказано еще ранее де Лю и Миркилом [4]). Из этого результата следует, что включение $Q \in \mathscr{L}^0_{p,\Omega}(P_1, \ldots, P_N)$ для оператора Q порядка l возможно лишь в исключительных случаях. Тем не менее, оценка (1.2) при $p = \infty$ верна для эллиптической системы (1.1) и произвольного оператора Q порядка $< l$ (системы с таким свойством названы в [5] слабо коэрцитивными в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}^l_\infty(\Omega)$). Для оператора порядка $l \geqslant 2$ с постоянными коэффициентами от $n \geqslant 3$ переменных верно и обратное: слабая коэрцитивность этого оператора в $\overset{\circ}{W}{}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна его эллиптичности (теорема де Лю и Миркила [4]). Критерии слабой коэрцитивности для систем $\{P_j(D)\}_1^N$ были получены автором и М. М. Маламудом в [5].

В дальнейшем речь пойдет о случае $p = \infty$, $\Omega = \mathbb{R}^n$, $N = 1$ и операторе $P(D) := P_1(D)$ с постоянными коэффициентами; пространство $\mathscr{L}^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P)$ будет обозначаться через $\mathscr{L}(P)$ или $\mathscr{L}_n(P)$. Из вышеупомянутых результатов М. М. Маламуда вытекает, что для эллиптического оператора $P(D)$ порядка l базис пространства $\mathscr{L}(P)$ образуют $P(D)$ и дифференциальные мономы $\{D^\alpha\}_{|\alpha|<l}$, т. е. пространство $\mathscr{L}(P)$ в этом случае является максимально возможным.

В связи с упомянутым результатом Хёрмандера возникает задача об описании пространств $\mathscr{L}(P)$ для операторов $P(D)$ вида (1.3). В этом направлении в [5, предложение 3.13] получено аналогичное утверждение для эллиптических операторов P_1 и P_2, полные символы которых невырождены (т. е. не имеют вещественных нулей). Условие невырожденности символов здесь существенно: уже в случае произведения $P_1 \otimes P_2$ двух однородных эллиптических операторов пространство $\mathscr{L}(P)$ не содержит ни одного нетривиального дифференциального монома, хотя каждое из пространств $\mathscr{L}(P_1)$ и $\mathscr{L}(P_2)$ является максимально возможным (см. [5, предложение 3.14]). Доказательство последнего результата использовало теорему Бомана [3].

В настоящей работе мы усиливаем предложение 3.13 из [5]. Следующая теорема — основной результат работы.

Теорема 1.1. *Пусть $P(D)$ — дифференциальный оператор вида (1.3), $P_1(D)$ и $P_2(D)$ — однородные эллиптические операторы порядков l и m, соответственно. Тогда пространство $\mathscr{L}(P) := \mathscr{L}^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P_1 \otimes P_2)$ — минимально возможное, т. е. включение $Q \in \mathscr{L}(P)$ эквивалентно равенству $Q(D) = c_1 P(D) + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.*

Доказательство теоремы 1.1 не апеллирует к теореме Бомана. Тем не менее, в нем (так же, как и в доказательстве упомянутых выше результатов из [5]) используются свойства априорных оценок для дифференциальных полиномов в L^∞, приведенные в §2, и связанные с ними результаты из гармонического анализа (в частности, используются свойства мультипликаторов в L^∞).

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Обозначения. $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ — множество вещественных положительных чисел; $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^n_+ := \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k,\ D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ полагаем $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Если $P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_\alpha D^\alpha$ — дифференциальный полином порядка l, $\deg P = l$, то обозначим через $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_\alpha \xi^\alpha$ его символ, через $P^l(D) := \sum_{|\alpha| = l} a_\alpha D^\alpha$ его главную часть, а через $P^l(\xi) = \sum_{|\alpha| = l} a_\alpha \xi^\alpha$ — соответствующий главный символ.

Кроме того, $P^j(\xi) := \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha \xi^\alpha$ будет обозначать сумму мономов j-й степени, входящих в полином $P(\xi)$, так что $P(\xi)=\sum_{j=0}^{l} P^j(\xi)$. Если $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_p) \in \mathbb{R}^p$, $p \leqslant n$, то через $\deg_\zeta P$ будет обозначаться степень полинома $P(\cdot)$ относительно переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$.

Наконец, через $\mathrm{span}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_p\}$ будет обозначаться линейная оболочка в $\mathbb{R}^n$, порожденная символами $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$, т.е. множество векторов вида $\sum_{k=1}^{p} c_k \zeta_k$, $c_k \in \mathbb{R}$.

Напомним [1, 2], что оператор $P(D)$ порядка l называется эллиптическим, если $P^l(\xi) \neq 0$ для $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Приведем некоторые сведения, касающиеся свойств априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, а также вспомогательные утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Предложение 2.1 ([3, §1], [5, предложение 2.7]). *Из оценки*

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2.1}$$

вытекает алгебраическое неравенство

$$|Q(\xi)| \leqslant C_1 |P(\xi)| + C_2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

для символов $Q(\xi)$ и $P(\xi)$ операторов $Q(D)$ и $P(D)$.

Предложение 2.2 ([4, предложение 1], [3, лемма 1]). *Оценка* (2.1) *эквивалентна тождеству*

$$Q(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

где $M(\cdot)$ и $N(\cdot)$ — мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Напомним [9, гл. 4, §3], что мультипликаторы в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ — это преобразования Фурье–Стилтьеса конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$. Они представляют собой равномерно непрерывные ограниченные в $\mathbb{R}^n$ функции [8, ч. 2, гл. 7].

Предложение 2.3 ([4, предложение 2], [6, §5, теорема 3]). *Пусть порядок дифференциального оператора $P(D)$ равен l. Тогда из оценки* (2.1) *вытекает тождество*

$$Q^l(\xi) = cP^l(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{C}, \tag{2.4}$$

где $Q^l(\cdot)$ и $P^l(\cdot)$ — соответствующие главные символы этих операторов.

Предложение 2.4 ([5, предложение 4.5], [4]). *Оценка* (2.1) *сохраняется при “сужении” операторов $Q(D)$ и $P(D)$ на произвольное линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$.*

Докажем теперь две вспомогательные леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и функция $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ имеет вид*

$$F(x) := \sum_{k=-n}^{n} F_k x^{\frac{k}{m}}. \tag{2.5}$$

Тогда функция $F(\cdot)$ ограничена тогда и только тогда, когда она постоянна, $F(\cdot) \equiv F_0$.

Доказательство. Пусть $j \in \{0, \dots, n\}$ — наибольший из индексов, для которых $F_j \neq 0$. Предположим, что $j \geqslant 1$. Тогда

$$F(x) = F_j x^{\frac{j}{m}} + O(x^{\frac{j-1}{m}}) = x^{\frac{j}{m}}(F_j + o(1)), \qquad x \to \infty,$$

что противоречит ограниченности функции $F(\cdot)$. Отсюда $j \leqslant 0$ и $F_k = 0$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Для доказательства того, что $F_k = 0$ при $k \in \{-n, \dots, -1\}$, достаточно повторить те же рассуждения для функции $F(x^{-1}) = \sum_{k=-n}^{n} F_{-k} x^{\frac{k}{m}}$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и функция $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ имеет вид*

$$F(x) := \sum_{k=0}^{n} F_k x^{\frac{k}{m}}. \tag{2.6}$$

Тогда функция $F(\cdot) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $F_k = 0$ для всех $k \in \{0, \dots, n\}$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что функция

$$\widetilde{F}(y) := F(y^m) = \sum_{k=0}^{n} F_k y^k \equiv 0, \qquad y > 0. \tag{2.7}$$

Поскольку $\widetilde{F}(\cdot)$ — полином, тождество (2.7) возможно в том и только в том случае, когда $F_k = 0$ для всех $k \in \{0, \dots, n\}$. $\square$

3. Случай дифференциального монома ($n = 2$)

Следующее предложение представляет собой важный частный случай теоремы 1.1, когда оператор $P = P_1 \otimes P_2$ — дифференциальный моном, т. е. операторы P_1 и P_2 зависят от одной переменной ($n = 2$).

Предложение 3.1. *Пусть $l, m \in \mathbb{N}$ и $P(D) = D_1^l D_2^m$ — дифференциальный моном. Тогда пространство $\mathscr{L}(P)$ — минимально возможное, т. е. включение $Q \in \mathscr{L}(P)$ эквивалентно равенству $Q(D) = c_1 P(D) + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть $Q \in \mathscr{L}(P)$, т.е. справедлива оценка (2.1). Согласно предложению 2.2, оценка (2.1) эквивалентна равенству

$$Q(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1, \xi_2) \cdot \xi_1^l \xi_2^m + N(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

где $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ — мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Будем в дальнейшем считать, что $\xi_1, \xi_2 > 0$. Так как $M(\cdot)$ и $N(\cdot)$ — ограниченные функции, из тождества (3.1) (или из неравенства (2.2)) вытекает, что $\deg_{\xi_1} Q \leqslant l$ и $\deg_{\xi_2} Q \leqslant m$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, таких, что $\alpha_1 \leqslant l$ и $\alpha_2 \leqslant m$. Тогда полином $Q(\cdot)$ можно записать в виде

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} b_\alpha \, \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \qquad b_\alpha = b_{(\alpha_1, \alpha_2)} \in \mathbb{C}.$$

Зафиксируем произвольное $\tau > 0$ и рассмотрим сужение полинома $Q(\cdot)$ на кривую $\xi_1^l \xi_2^m = \tau$:

$$Q\big[\xi_1, \big(\tau \xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big] = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} b_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \big(\tau \xi_1^{-l}\big)^{\frac{\alpha_2}{m}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} b_\alpha \tau^{\frac{\alpha_2}{m}} \, \xi_1^{\frac{\alpha_1 m - \alpha_2 l}{m}}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим более внимательно структуру функции (3.2). Она имеет вид (2.5), ибо $|\alpha_1 m - \alpha_2 l| \leqslant lm$, если $\alpha_1 \leqslant l$, $\alpha_2 \leqslant m$, и поэтому дробь $\frac{\alpha_1 m - \alpha_2 l}{m}$ принимает конечное число рациональных значений, по модулю не превышающих l.

Обозначим через $\mathcal{A}_j$ множество мультииндексов $\alpha \in \mathcal{A}$, для которых $\alpha_1 m - \alpha_2 l = j$. Здесь $j \in \{-lm, \dots, 0, \dots, lm\}$. Очевидно,

$$\mathcal{A} = \cup_{j=-lm}^{lm} \mathcal{A}_j, \qquad \text{причем } \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k = \varnothing, \quad j \neq k.$$

Отметим, что какие-то из множеств $\mathcal{A}_j$ могут быть пустыми, хотя множество $\mathcal{A}_0$ всегда непусто и содержит мультииндексы $(0,0)$ и (l, m). Тогда функция (3.2) перепишется в виде

$$Q\left[\xi_1, \left(\tau \xi_1^{-l}\right)^{\frac{1}{m}}\right] = \sum_{j=-lm}^{lm} \xi_1^{\frac{j}{m}} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j} b_\alpha \tau^{\frac{\alpha_2}{m}} = \sum_{j=-lm}^{lm} \varphi_j(\tau) \, \xi_1^{\frac{j}{m}}, \tag{3.3}$$

где

$$\varphi_j(\tau) := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j} b_\alpha \tau^{\frac{\alpha_2}{m}}, \qquad j \in \{-lm, \dots, 0, \dots, lm\}. \tag{3.4}$$

Далее, рассмотрим “сужение” тождества (3.1) на ту же кривую $\xi_1^l \xi_2^m = \tau$. Полагая $\xi_2 := (\tau \xi_1^{-l})^{\frac{1}{m}}$ в (3.1), с учетом (3.3) имеем:

$$\sum_{j=-lm}^{lm} \varphi_j(\tau)\, \xi_1^{\frac{j}{m}} = \tau\, M\big[\xi_1, \big(\tau \xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big] + N\big[\xi_1, \big(\tau \xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big]. \tag{3.5}$$

Правая часть равенства (3.5) ограничена, следовательно, ограничена и левая его часть. Применяя лемму 2.1 к функции (3.3), получим, что — константа, т.е.

$$\varphi_j(\tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j} b_\alpha \tau^{\frac{\alpha_2}{m}} = 0 \qquad \text{при } j \neq 0. \tag{3.6}$$

Откажемся теперь от требования постоянства параметра $\tau > 0$ и рассмотрим функции (3.4). Все показатели степеней в конечной сумме (3.4) неотрицательны и различны, поскольку при данных j и α_2 компонента α_1 вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{A}_j$ однозначно определяется равенством $\alpha_1 m - \alpha_2 l = j$. Исходя из равенств (3.6), применим к функциям $\varphi_j(\cdot)$, $j \neq 0$, лемму 2.2. Получим, что

$$b_\alpha = 0 \qquad \text{для всех } \alpha \in \mathcal{A}_j,\ j \neq 0.$$

Поэтому полином $Q(\cdot)$ перепишется в виде

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} b_\alpha\, \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \tag{3.7}$$

а тождество (3.5) примет вид

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} b_\alpha \tau^{\frac{\alpha_2}{m}} = \tau \cdot M\big[\xi_1, \big(\tau \xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big] + N\big[\xi_1, \big(\tau \xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big]. \tag{3.8}$$

Положим теперь $\xi_2 = 0$ в тождестве (3.1). Поскольку компоненты α_1 и α_2 вектора $\alpha \in \mathcal{A}_0$ обращаются в нуль одновременно, получим

$$N(\xi_1, 0) \equiv b_{(0,0)}. \tag{3.9}$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\xi_1 \to \infty} N\big[\xi_1, \big(\tau \xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big] = b_{(0,0)}. \tag{3.10}$$

Действительно, из равномерной непрерывности функции $N(\cdot)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из неравенства $|\xi' - \xi''| \leqslant \delta$ для векторов $\xi', \xi'' \in \mathbb{R}^2$ следует неравенство $|N(\xi') - N(\xi'')| \leqslant \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$\xi' := (\xi_1, 0), \qquad \xi'' := (\xi_1, (\tau \xi_1^{-l})^{1/m}).$$

Тогда при $\xi_1 \geqslant (\tau\delta^{-m})^{1/l}$ и с учетом (3.9) имеем:

$$|\xi' - \xi''| = (\tau\xi_1^{-l})^{1/m} \leqslant \delta \qquad \text{и}$$
$$|N(\xi') - N(\xi'')| = |N(\xi_1, (\tau\xi_1^{-l})^{1/m}) - b_{(0,0)}| \leqslant \varepsilon.$$

Это и означает, что выполнено (3.10).

Из (3.8) и (3.10) теперь вытекает существование предела функции $M(\xi_1, (\tau\xi_1^{-l})^{1/m})$ при $\xi_1 \to \infty$ и фиксированном τ. Этот предел равен

$$\lim_{\xi_1\to\infty} M\big[\xi_1, \big(\tau\xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big] = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} b_\alpha \tau^{\frac{\alpha_2}{m}-1} - b_{(0,0)}\tau^{-1} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0\setminus\{0\}} b_\alpha \tau^{\frac{\alpha_2}{m}-1}. \tag{3.11}$$

Покажем, что предел (3.11) не зависит от τ, т.е. что функция

$$\psi(\tau) := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0\setminus\{0\}} b_\alpha \tau^{\frac{\alpha_2}{m}-1} \tag{3.12}$$

является константой. В самом деле, пусть

$$\lim_{\xi_1\to\infty} M\big[\xi_1, \big(\tau_j\xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big] = k_j, \qquad j \in \{1,2\},$$

для некоторых $\tau_1, \tau_2 > 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $M(\cdot)$ существует $\delta > 0$, такое, что из неравенства $|\xi' - \xi''| \leqslant \delta$ для векторов $\xi', \xi'' \in \mathbb{R}^2$ следует неравенство $|M(\xi') - M(\xi'')| \leqslant \varepsilon$. Положим

$$\xi' := (\xi_1, (\tau_1\xi_1^{-l})^{1/m}) \qquad \text{и} \qquad \xi'' := (\xi_1, (\tau_2\xi_1^{-l})^{1/m}).$$

Тогда при $\xi_1 \geqslant \delta^{-m/l} \cdot |\tau_1^{1/m} - \tau_2^{1/m}|^{m/l}$ имеем:

$$|\xi' - \xi''| = \xi_1^{l/m}|\tau_1^{1/m} - \tau_2^{1/m}| \leqslant \delta \quad \text{и}$$
$$|M(\xi') - M(\xi'')| = \big|M\big[\xi_1, \big(\tau_1\xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big] - M\big[\xi_1, \big(\tau_2\xi_1^{-l}\big)^{\frac{1}{m}}\big]\big| \leqslant \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\xi_1 \to \infty$, получим $|k_1 - k_2| \leqslant \varepsilon$. Отсюда $k_1 = k_2$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$.

Применим к функции $\psi(\cdot)$ вида (3.12) лемму 2.1. Получим, что $b_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}_0 \setminus \{0\}$, для которых $\alpha_2 \neq m$. Но последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha \neq (l, m)$.

Таким образом, доказано, что $b_\alpha = 0$ при всех $\alpha \in \mathcal{A}$, таких, что $\alpha \neq (l, m)$ и $\alpha \neq (0, 0)$. Значит, полином $Q(\cdot)$ имеет вид

$$Q(\xi) = b_{(l,m)}\xi_1^l\xi_2^m + b_{(0,0)},$$

что и требовалось доказать. $\square$

4. Доказательство основной теоремы

Здесь мы докажем основной результат работы — теорему 1.1. Обозначим через $P_1(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{p_1}) \in \mathbb{R}^{p_1}$, и $P_2(\eta)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{p_2}) \in \mathbb{R}^{p_2}$, $p_2 := n - p_1$, символы операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$, соответственно (для удобства изложения переменные, не участвующие в записи символов P_1 и P_2, опускаются).

Будем проводить доказательство индукцией по $n \geqslant 2$. При $n = 2$ утверждения теоремы 1.1 и предложения 3.1 совпадают. Пусть $n \geqslant 3$, и утверждение теоремы справедливо для всех операторов от $\leqslant n - 1$ переменных, имеющих указанный в условии теоремы вид.

Без ограничения общности можно считать, что $p_2 \geqslant 2$. Тогда

$$p_1 + 1 = n - p_2 + 1 \leqslant n - 1.$$

Пусть $\deg P_1(\xi) = l$, $\deg P_2(\eta) = m$ и $Q \in \mathscr{L}(P)$. Тогда из неравенства (2.2) следует, что

$$\deg Q(\xi, \eta) \leqslant \deg P(\xi, \eta) = l + m, \qquad \deg_\xi Q \leqslant l, \quad \deg_\eta Q \leqslant m.$$

Значит, полином $Q(\cdot)$ представляется в виде

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \xi^\alpha \, Q_\alpha(\eta), \qquad \deg Q_\alpha := q_\alpha \leqslant m.$$

Пусть $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_{p_2}) \in \mathbb{R}^{p_2} \setminus \{0\}$ — фиксированный вектор. Рассмотрим “сужения” $\widetilde{Q}(\cdot)$ и $\widetilde{P}(\cdot)$ полиномов $Q(\cdot)$ и $P(\cdot)$, соответственно, на $(p_1 + 1)$-мерное подпространство $E := \operatorname{span}\{\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, t\}$, определяемое равенством $\eta = \lambda t$, или равенствами $\eta_j = \lambda_j t$, $j \in \{1, \dots, p_2\}$, где $t \in \mathbb{R}$. Имеем:

$$\begin{gathered} \widetilde{Q}(\xi, t) := Q(\xi, \lambda t) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \xi^\alpha \, Q_\alpha(\lambda t), \\ \widetilde{P}(\xi, t) := P(\xi, \lambda t) = P_1(\xi) P_2(\lambda t). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Представляя полиномы $Q_\alpha(\cdot)$ в виде суммы однородных форм $Q_\alpha^j(\cdot)$,

$$Q_\alpha(\eta) = \sum_{j=0}^{q_\alpha} Q_\alpha^j(\eta), \qquad Q_\alpha^j(\lambda t) = t^j Q_\alpha^j(\lambda), \quad j \in \{0, \dots, q_\alpha\},$$

и учитывая, что $P_2(\cdot)$ — однородный полином степени m, $P_2(\lambda t) = t^m P_2(\lambda)$, перепишем равенства (4.1) в виде

$$\widetilde{Q}(\xi, t) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \xi^\alpha \sum_{j=0}^{q_\alpha} t^j Q_\alpha^j(\lambda), \qquad \widetilde{P}(\xi, t) = P_2(\lambda) \cdot t^m P_1(\xi), \tag{4.2}$$

причем $P_2(\lambda) \neq 0$ в силу эллиптичности полинома $P_2(\cdot)$.

Так как $Q \in \mathscr{L}_n(P)$, то, согласно предложению 2.4, $\widetilde{Q} \in \mathscr{L}_{p_1+1}(\widetilde{P})$. Далее, полином $\widetilde{P}(\xi, t)$ степени $p_1 + 1 \leqslant n - 1$ переменных равен произведению двух однородных эллиптических полиномов: t^m и $P_1(\xi)$ с ненулевым коэффициентом $P_2(\lambda)$. Отсюда по предположению индукции полином $\widetilde{Q}(\xi, t)$ имеет вид $\widetilde{c}_1\widetilde{P}(\xi, t) + \widetilde{c}_2$, т. е. из включения $\widetilde{Q} \in \mathscr{L}(\widetilde{P})$ и равенств (4.2) вытекает тождество

$$\sum_{|\alpha|\leqslant l} \sum_{j=0}^{q_\alpha} \xi^\alpha t^j Q_\alpha^j(\lambda) \equiv \widetilde{c}_1 P_2(\lambda) \cdot t^m P_1(\xi) + \widetilde{c}_2. \tag{4.3}$$

В левой части (4.3) нет подобных слагаемых, ибо все мономы $\xi^\alpha t^j$, $|\alpha| \leqslant l,\ j \in \{0, \ldots, q_\alpha\}$, попарно различны. Поскольку $P_1(\cdot)$ — однородный полином степени l, правая часть (4.3) является линейной комбинацией мономов вида $\xi^\alpha t^m,\ |\alpha| = l$, и константы. Поэтому из (4.3) вытекает, что $Q_\alpha^j(\lambda) = 0$ при $|\alpha| < l$ и $j \neq m$, кроме случая $\alpha = 0$, $t = 0$. Так как вектор $\lambda \neq 0$ произволен, мы заключаем, что

$$Q_\alpha^j(\eta) \equiv 0 \qquad \text{при } |\alpha| < l,\ j \neq m,\ (\alpha, t) \neq (0, 0).$$

Следовательно, полином $Q(\cdot)$ имеет вид

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{|\alpha|=l} \xi^\alpha\, Q_\alpha^m(\eta) + c_2, \qquad c_2 := Q_0^0(\eta) \equiv Q_0^0. \tag{4.4}$$

Отметим, что так как $\deg Q_\alpha^m = m$, то из (4.4) следует, что $Q(\xi, \eta) - c_2$ является однородным полиномом степени $l + m$, т.е.

$$Q^{l+m}(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta) - c_2. \tag{4.5}$$

Наконец, применим предложение 2.3. Из включения $Q \in \mathscr{L}(P)$ вытекает, что

$$Q^{l+m}(\xi, \eta) = c_1 P^{l+m}(\xi, \eta). \tag{4.6}$$

Комбинируя (4.5) и (4.6), получим, что

$$Q(\xi, \eta) - c_2 = Q^{l+m}(\xi, \eta) = c_1 P^{l+m}(\xi, \eta) = c_1 P(\xi, \eta),$$

т.е. $Q(D) = c_1 P(D) + c_2$.

Теорема 1.1 полностью доказана.

Благодарности. Я искренне признателен М. М. Маламуду за внимание к работе и полезные советы.

Литература

[1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Москва, "Наука", 1996, 480 с.

[2] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, *Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных*, Москва, "Эдиториал УРСС", 2002, 312 с.

[3] J. Boman, *Supremum norm estimates for partial derivatives of functrions of several real variables* // Illinois J. Math., **16** (1972), No. 2, 203–216.

[4] K. de Leeuw, H. Mirkil, *A priori estimates for differential operators in L_∞ norm* // Illinois J. Math., **8** (1964), No. 1, 112–124.

[5] Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд, *Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева* // Матем. сборник, **199** (2008), No. 11, 75–112.

[6] М. М. Маламуд, *Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$* // Труды ММО, **56** (1995), 206–261.

[7] D. Ornstein, *A non-inequality for differential operators in the L_1 norm* // Arch. Rational Mech. Anal., **11** (1962), No. 1, 40–49.

[8] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Москва, "Мир", 1975, 448 с.

[9] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Москва, "Мир", 1973, 344 с.

[10] Л. Хёрмандер, *К теории общих дифференциальных операторов в частных производных*, Москва, "Изд-во иностранной литературы", 1959, 131 с.

Сведения об авторах

Дмитрий Владимирович Лиманский

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
Донецк 83055,
Украина
E-Mail: `lim9@telenet.dn.ua`