Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 1, 1 – 16

О дробно-линейных отношениях и образах угловых операторов

Томас Азизов, Виктор Хацкевич,
Валерий Сендеров

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Для плюс-операторов в банаховом индефинитном пространстве рассмотрено дробно-линейное отношение. Описаны классы операторов, для которых область определения такого отношения пуста. Даны условия достаточные (и в некотором смысле и необходимые) для выполнения цепного правила.

2010 MSC. 46C20, 47B50.

Ключевые слова и фразы. Индефинитное пространство, плюс-оператор, дробно-линейное отношение, цепное правило.

1. Введение

Топологическая (т.е. с непрерывными проекторами) прямая сумма

$$X = X_1 \dotplus X_2 \equiv P_1 X \dotplus P_2 X$$

комплексных банаховых пространств X_1 и X_2, где $\min\{\dim X_1, \dim X_2\} > 0$, называется индефинитным пространством, если в ней выделены множества всех неотрицательных векторов

$$\mathfrak{p}_+ = \{x \in X \colon x = x_1 + x_2,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ \|x_1\| \geq \|x_2\|\}$$

и всех неположительных векторов

$$\mathfrak{p}_- = \{x \in X \colon x = x_1 + x_2,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ \|x_1\| \leq \|x_2\|\}.$$

Статья поступила в редакцию 23.12.2010
Работа Т. Я. Азизова поддержана грантом РФФИ 08-01-00566-а

ISSN 1810 – 3200.

Все используемые ниже геометрические и операторные понятия и утверждения, связанные с индефинитными пространствами, содержатся, для частного случая пространств Крейна, в монографии [1].

Пусть $\mathcal{K}\,(\overline{\mathcal{K}})$ — открытый (замкнутый) единичный шар пространства $\mathcal{B}(X_1, X_2)$. Формула

$$A_{21} + A_{22}K_+ = K'_+(A_{11} + A_{12}K_+),$$

где $K_+,\ K'_+ \in \overline{\mathcal{K}}$ и $A_{ij} \in \mathcal{L}(X_j, X_i)$ при $i,\ j = 1, 2$, определяет в $\overline{\mathcal{K}}$ дробно-линейное отношение (д.л.о.) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A = \{K_+, K'_+\}$. Исследуются множества $\mathcal{F}_A(K)$, где $K \in \overline{\mathcal{K}}$, и $\mathcal{F}_A(\overline{\mathcal{K}})$.

В разделе 2 изучается область определения общих д.л.о.; в частности, показано существование широкого класса пространств X, в которых область определения д.л.о. $\mathcal{F}_A$, порожденного некоторым плюс-оператором A, пуста. В то же время, как хорошо известно, в случае гильбертова пространства $X = \mathfrak{H}$ для любого плюс-оператора A д.л.о. $\mathcal{F}_A$ определено на всем шаре $\overline{\mathcal{K}}$.

Этот случай изучается в разделах 3 и 4.

В разделе 3 для случая общих д.л.о. рассмотрено т.н. "цепное правило": $\mathcal{F}_A \circ \mathcal{F}_B = \mathcal{F}_{AB}$ (автоматически выполненное в случае дробно-линейных преобразований $\mathcal{F}_A$ и $\mathcal{F}_B$). Изучение цепного правила было начато (при несколько ином, нежели у нас, определении д.л.о.) в работе [2].

В разделе 3 получены как необходимые, так и достаточные условия на плюс-оператор $A(B)$, при выполнении которых цепное правило справедливо при любом плюс-операторе $B(A)$.

В разделе 4 рассматриваются некоторые приложения полученных результатов. Основное содержание этого раздела — получение для линейных операторов и д.л.о. новых факторизационных теорем. В случае строгого плюс-оператора A эти теоремы, с помощью обобщения результатов предыдущего раздела, переносятся и на д.л.о. $\mathcal{F}_{A^*}$ (хотя оператор A^* не является, вообще говоря, даже плюс-оператором).

Отметим, что генетически восходящий к работе [3] метод факторизации отношений постоянно находит новые приложения. В частности, с помощью этого метода в работах [4, 5] дано простое и наглядное доказательство того, что для любого строгого плюс-оператора A с условием

$$A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^* \geq 0 \tag{1.1}$$

множество $\operatorname{Im}\mathcal{F}_A$ выпукло и компактно в сильной операторной топологии.

Кроме того, в работе [5] именно метод факторизации отношений позволяет получить новые условия того, что данный оператор является плюс-оператором.

2. Плюс-операторы A с пустой областью определения дробно-линейного отношения $\mathcal{F}_A$

Построению таких операторов мы предпошлем построение неотрицательных подпространств $\mathcal{L}'$, не допускающих расширения до максимальных неотрицательных подпространств $\widetilde{\mathcal{L}}'$, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}_+$, т.е. таких, что $P_1\widetilde{\mathcal{L}}' = X_1$.

Такой пример для случая конкретного конечномерного пространства был впервые построен И. С. Иохвидовым [6]. В настоящем разделе мы докажем существование таких подпространств для весьма широких классов банаховых пространств. Так, в качестве $\mathfrak{L}_+$ может выступать любое не изоморфное гильбертову (в вещественном случае — любое не являющееся гильбертовым такое, что $\dim \mathfrak{L}_+ \geq 3$) банахово пространство.

Пусть $\mathfrak{L}$ и $\mathcal{L}$ — банаховы пространства, $\mathcal{L} \subset \mathfrak{L}$. Обозначим

$$\alpha(\mathcal{L}) = \inf \|A\|,$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathcal{L})$, $A\big|_{\mathcal{L}} = I\big|_{\mathcal{L}}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — вещественное банахово пространство, не являющееся гильбертовым;* $\dim \mathfrak{L} \geq 3$*. Тогда существует подпространство $\mathcal{L}$ такое, что $\alpha(\mathcal{L}) > 1$.*

Доказательство. Легко показать, что в $\mathfrak{L}$ существует не являющееся гильбертовым трехмерное подпространство $\mathfrak{L}'$ (это сразу следует, например, из [7]). Без ограничения общности будем считать $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$. По известной теореме Какутани [8] имеем $\|A\| > 1$ для любого проектора A на некоторое подпространство $\mathcal{L}$ (т.е. для любого оператора A, фигурирующего в утверждении леммы). Зафиксируем такое $\mathcal{L}$ и докажем, что $\alpha(\mathcal{L}) > 1$.

Пусть $\|A_n\| \to \alpha(\mathcal{L})$ при $n \to \infty$, $\|x_n\| = 1$ при $n \in \mathbb{N}$, $A_n x_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности будем считать $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Очевидно, найдется константа C такая, что

$$\|A_n x_n - A_n x_0\| \leq \|A_n\| \cdot \|x_n - x_0\| \leq C\|x_n - x_0\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда $A_n x_0 \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $A_n \to A$ при $n \to \infty$, где $Ax_0 = 0$, $A\big|_{\mathcal{L}} = I\big|_{\mathcal{L}}$. Отсюда $\|A_n\| \to \|A\|$ при $n \to \infty$. Но $\|A\| > 1$ по выбору $\mathcal{L}$. $\square$

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathfrak{L}_+$ *— то же, что в лемме* 2.1. *Тогда существует банахово пространство* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+ \dot{+} \mathfrak{L}_-$, *в котором существует двумерное равномерно положительное подпространство* $\mathcal{L}'$, *не расширяемое до подпространства* $\widetilde{\mathcal{L}}' \in \mathfrak{M}_+$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство леммы 2.1. Возьмем в качестве $\mathfrak{L}_-$ изометричное $\mathcal{L}$ пространство: $\mathfrak{L}_- = U\mathcal{L}$, где U — унитарный оператор; зададим на пространстве $\mathcal{L}$ угловой оператор $K(\mathcal{L}')$ равенством $K(\mathcal{L}') = \beta U$, где $1 > \beta > \frac{1}{\alpha(\mathcal{L})}$.

Предположим, что оператор $K(\mathcal{L}')$ допускает расширение до заданного на всем пространстве $\mathfrak{L}_+$ сжатия $\widetilde{K}$. Тогда оператор $P = \frac{1}{\beta} U^{-1}\widetilde{K}$ — проектор на подпространство $\mathcal{L}$, $\|P\| \leq \frac{1}{\beta}$. Поскольку $\|P\| \geq \alpha(\mathcal{L})$, получаем $\beta \leq \frac{1}{\alpha(\mathcal{L})}$. Противоречие. □

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *в пространстве* $\mathfrak{L}$ *существует* (*плюс-*)*оператор* A *с* $\operatorname{Im} A = \mathcal{L}'$ *такой, что* $\mathcal{F}_A = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}_1)$ — некоторый (ограниченный) проектор на двумерное пространство $P_1\mathcal{L}'$. Положим $Ax = (I + K(\mathcal{L}'))Px_+$ при $x = x_+ + x_-$, $x_+ \in \mathfrak{L}_1$, $x_- \in \mathfrak{L}_2$. Очевидно, $A\mathcal{L}'' = \mathcal{L}'$ при любом $\mathcal{L}'' \in \mathfrak{M}_+$. Вследствие теоремы 2.1 отсюда сразу следует доказываемое утверждение. □

Замечание 2.1. В условиях теорем 2.1 и 2.2 двумерное равномерно положительное подпространство можно заменить нейтральным подпространством $\mathcal{L}'$ таким, что $\dim \mathfrak{L}_+ / P_+\mathcal{L}' < \infty$.

Это нетрудно доказать с помощью теоремы Какутани [8].

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathfrak{L}_+$ *— вещественное или комплексное пространство, не изоморфное гильбертову. Тогда существует пространство* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+ \dot{+} \mathfrak{L}_-$, *в котором существует равномерно положительное подпространство* $\mathcal{L}'$, *не расширяемое до подпространства* $\widetilde{\mathcal{L}}' \in \mathfrak{M}_+$. *При этом угловой оператор* $K(\mathcal{L}')$ *можно считать компактным с произвольно малой нормой.*

Для доказательства нам понадобится следующее обобщение хорошо известной теоремы Линденштрауса–Цафрири.

Теорема 2.4 ([9]). *Пусть* X *— такое банахово пространство, что для каждого замкнутого подпространства* $Y \subset X$ *и для каждого компактного оператора* $U\colon Y \to Y$ *существует ограниченное расширение* $\widehat{U}\colon X \to Y$. *Тогда пространство* X *изоморфно гильбертову пространству.*

Доказательство теоремы 2.3. Пусть $Y \subset \mathfrak{L}_+$, $U\colon Y \to Y$ — компактный оператор, не допускающий ограниченного расширения на все пространство $\mathfrak{L}_+$. Пусть, как при доказательстве теоремы 2.1, $\mathfrak{L}_- = VY$, где V — унитарный оператор. При произвольном $0 < \varepsilon < 1$ зададим на пространстве Y угловой оператор $K = \frac{\varepsilon}{\|U\|} VU$. Окончание доказательства проводится по той же схеме, что и в случае теоремы 2.1. □

Теорема 2.5. *Пусть в условиях теоремы* 2.3 *пространство* $\mathfrak{L}_1$ *сепарабельно. Тогда в пространстве* $\mathfrak{L}$ *теоремы* 2.3 *существует* (*плюс-*) *оператор* A *такой, что* $\overline{\operatorname{Im} A} = \mathcal{L}'$, $\mathcal{F}_A = \varnothing$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая ниже теорема 2.6, доказательство которой нам любезно предоставил В. Шульман. Мы не исключаем, что этот факт был известен и ранее.

Теорема 2.6. *Пусть* X *— произвольное банахово пространство,* Y *— его сепарабельное подпространство. Тогда на* X *существует ограниченный линейный оператор* T *такой, что* $\overline{TX} = Y$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $F \subset L$ — конечномерные подпространства в банаховом пространстве и если P — непрерывный проектор на F, то найдется непрерывный проектор Q на L, для которого $QP = P = PQ$ (мы это будем записывать в виде $P \le Q$). В самом деле, пусть $K = \operatorname{Ker} P$, выберем непрерывный проектор R пространства K на $K \cap L$ и положим $Q = P + R \circ (1 - P)$.

Пусть X — банахово пространство, Y — его сепарабельное подпространство. Тогда существует плотная последовательность e_n в Y; рассматривая линейные оболочки первых n векторов e_i (и выбрасывая лишнее), получим возрастающую последовательность конечномерных подпространств $Z_n \subset Y$ с плотным в Y объединением: $\overline{\cup_n Z_n} = Y$.

Используя сказанное выше, построим последовательность непрерывных проекторов P_n на подпространства Z_n такую, что $P_n \le P_{n+1}$ для всех n. Полагая $Q_n = P_n - P_{n-1}$, получим последовательность проекторов Q_n такую, что $Q_n Q_m = 0$ при $m \ne n$, причем линейная оболочка их образов плотна в Y. Положим $\alpha_n = \|Q_n\|$ и рассмотрим оператор $T = \sum_n \frac{1}{2^n \alpha_n} Q_n$. Его образ содержит все $Q_n X$, поскольку $Tx = \frac{1}{2^n \alpha_n} x$ при $x \in Q_n X$. Значит, $Y = \overline{TX}$. □

Доказательство теоремы 2.5. Рассуждая как при доказательстве теоремы 2.2, положим $Ax = (I + K(\mathcal{L}'))Tx_+$ при $x = x_+ + x_-$, где T — оператор, существующий в силу теоремы 2.6. □

3. Дробно-линейные отношения и цепное правило

В этом разделе мы будем рассматривать плюс-операторы T, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^+ \oplus \mathfrak{H}^- \tag{3.1}$$

со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и снабженным индефинитной метрикой $[\cdot,\cdot] = (J\cdot,\cdot)$, где $J = P^+ - P^-$, $P^\pm$ — ортопроекторы на $\mathfrak{H}^\pm$, соответственно. Такие пространства называют пространствами Крейна, или J-пространствами. Если $\dim \mathfrak{H}^+ = \kappa < \infty$, то такое J-пространство называется пространством Понтрягина.

Напомним, что между сжатиями K, действующими из $\mathfrak{H}^+$ в $\mathfrak{H}^-$, и неотрицательными линеалами $\mathcal{L}_+$ существует взаимно-однозначное соответствие:

$$\mathcal{L}_+ = \{x = x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in P^+\mathcal{L}_+\}.$$

Такие операторы K называются угловыми операторами соответствующих подпространств $\mathcal{L}_+$. При этом K определен на всем $\mathfrak{H}^+$, или, что то же, $K \in \overline{\mathcal{K}}(\mathfrak{H}^+,\mathfrak{H}^-)$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_+$ — максимальное неотрицательное подпространство, что будет обозначаться так: $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}_+$. Напомним, что неотрицательное подпространство $\mathcal{L}_+$ называется равномерно положительным, если существует такая постоянная $\alpha > 0$, что $[x,x] \geq \alpha(x,x)$ при всех $x \in \mathcal{L}_+$, или, что эквивалентно, если угловой оператор K имеет норму меньше 1, т.е. $K \in \mathcal{K}(\mathfrak{H}^+,\mathfrak{H}^-)$.

Таким образом, если положить K угловым оператором подпространства $\mathcal{L}$, то определенное выше д.л.о. $\mathcal{F}_T(\cdot)$ отображает K на множество $\mathcal{F}_T(K)$ угловых операторов всех подпространств из $\mathfrak{M}_+$, являющихся расширениями неотрицательного линеала $T\mathcal{L}$. Такая интерпретация упростит нам в дальнейшем объяснение некоторых фактов. В частности, из такого определения немедленно следует включение

$$\mathcal{F}_U(\mathcal{F}_V(K)) \subset \mathcal{F}_{UV}(K) \quad \text{при всех} \quad K \in \overline{\mathcal{K}}. \tag{3.2}$$

Будем говорить, что имеет место цепное правило для операторов U и V, если

$$\mathcal{F}_U(\mathcal{F}_V(K)) = \mathcal{F}_{UV}(K) \quad \text{при всех} \quad K \in \overline{\mathcal{K}}. \tag{3.3}$$

Целью этого раздела является изучение случаев, когда имеет место цепное правило. Следует отметить, что в случае пространства

Понтрягина каждый J-несжимающий оператор является J-бинесжимающим и потому цепное правило выполнено при всех J-несжимающих операторах U и V. Поэтому ниже мы будем предполагать, что подпространство $\mathfrak{H}^+$ бесконечномерно и сепарабельно.

Отметим, что так же, как и в случае гильбертова пространства, для операторов, действующих в J-пространствах, вводится понятие J-сопряженного оператора T^c к ограниченному оператору T по формуле: $[Tx, y] = [x, T^c y]$ при всех $x, y \in \mathfrak{H}$. Из этой формулы прямо следует связь между J-сопряженным оператором и сопряженным: $T^c = JT^*J$.

Далее нам понадобятся следующие ниже лемма 3.1 и лемма 3.2. Первую мы приводим без доказательства, а вторую доказываем, хотя, как нам кажется, она хорошо известна, но мы не нашли ее доказательство в доступной нам литературе.

Все следующие ниже матричные представления операторов приводятся относительно разложения (3.1).

Лемма 3.1 ([3]). *Пусть T — J-несжимающий оператор. Тогда найдется такая пара операторов $\{T_1, U_1\}$, где T_1 — верхне-треугольный J-несжимающий оператор, т.е.*

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} \\ 0 & T_{22}^{(1)} \end{bmatrix},$$

U_1 — J-унитарный оператор, т.е. $U_1\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ и $[U_1x, U_1x] = [x, x]$ для всех $x \in \mathfrak{H}$, или, что эквивалентно, $U_1^c = U_1^{-1}$, и $T = U_1T_1$. Если при этом T — J-бинесжимающий оператор, то найдется также такая пара $\{T_2, U_2\}$, где T_2 — J-бинесжимающий нижне-треугольный оператор, т.е.

$$T_2 = \begin{bmatrix} T_{11}^{(2)} & 0 \\ T_{21}^{(2)} & T_{22}^{(2)} \end{bmatrix},$$

U_2 — J-унитарный и $T = T_2U_2$.

Лемма 3.2. *Пусть T – J-бинесжимающий оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(*i*) *оператор T^c, или что эквивалентно, T^* — J-полуунитарный оператор, т.е. $[T^cx, T^cx] = [x, x] = [T^*x, T^*x]$ при всех $x \in \mathfrak{H}$.*

(*ii*)
$$\mathcal{F}_T(\overline{\mathcal{K}}) = \overline{\mathcal{K}}, \tag{3.4}$$

(*iii*)
$$\mathcal{F}_T(\mathcal{K}) = \mathcal{K}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Предположим сперва, что T — J-унитарный оператор. Из определения такого оператора прямо следует, что он взаимно-однозначно преобразует множество максимальных неотрицательных подпространств, а потому порожденное им дробно-линейное преобразование отображает взаимно-однозначно как $\overline{\mathcal{K}}$ на $\overline{\mathcal{K}}$, так и $\mathcal{K}$ на $\mathcal{K}$.

Пусть теперь T^c является J-полуунитарным. Так как он является и J-бинесжимающим, то согласно лемме 3.1 он допускает представление $T^c = U_2 T_2$, где U_2 — J-унитарный оператор. Следовательно, T^c является J-полуунитарным точно тогда, когда этим свойством обладает верхне-треугольный оператор T_2. Учитывая то, что к тому же T_2 — J-бинесжимающий оператор, получим его диагональность. В силу сделанного в начале доказательства замечания о J-унитарных операторах, можно без нарушения общности считать, что в матричном представлении оператора T:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

оператор T_{11} унитарен, T_{22} является сопряженным к полуунитарному, а $T_{12} = T_{21} = 0$, или, что эквивалентно, $T^c = T^*$. Пусть $Q \in \overline{\mathcal{K}}$. Тогда уравнение $Q = T_{22} K T_{11}^{-1}$ имеет решение $K = T_{22}^* Q T_{11} \in \overline{\mathcal{K}}$. Более того, если $Q \in \mathcal{K}$, то и $K \in \mathcal{K}$. Следовательно, выполнены равенства (3.4) и (3.5).

Пусть теперь выполнено равенство (3.5) для некоторого J-бинесжимающего оператора T (для случая выполнения равенства (3.4) рассуждения дословно повторяются). Тогда согласно лемме 3.1 он допускает факторизацию $T = T_1 U$, где T_1 — нижне-треугольный бинесжимающий оператор, а U — J-унитарный оператор. Поскольку J-унитарный оператор порождает д.л.п., отображающее $\mathcal{K}$ на $\mathcal{K}$, то равенства (3.5) и $F_{T_1}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ эквивалентны. Кроме того, операторы T и T_1 являются сопряженными к J-полуунитарному одновременно. Следовательно, не ограничивая общности, будем сразу считать, что $T = \|T_{ij}\|_{i,j=1}^2$ является нижне-треугольным, т.е. $T_{12} = 0$. Отсюда

$$F_T(K) = (T_{21} + T_{22} K) T_{11}^{-1}. \tag{3.7}$$

Пусть при любом $Q \in \mathcal{K}$ уравнение

$$Q = (T_{21} + T_{22} K) T_{11}^{-1} \tag{3.8}$$

имеет решение $K \in \mathcal{K}$ Из того, что T является J-бинесжимающим, следует, что операторы T_{11}^{-1}, $T_{21} T_{11}^{-1}$ и T_{22} являются сжатиями, более того, $-T_{21} T_{11}^{-1} \in \mathcal{K}$. Полагая в (3.8) $Q = -T_{21} T_{11}^{-1}$, получим, что

$-2T_{21}T_{11}^{-1} \in \mathcal{K}$ и по индукции $-nT_{21}T_{11}^{-1} \in \mathcal{K}$ для произвольного натурального n. Отсюда $T_{21} = 0$.

Из (3.8) в этом случае следует

$$Q^*Q = T_{11}^{-1*}K^*T_{22}^*T_{22}KT_{11}^{-1} \leq T_{11}^{-1*}T_{11}^{-1}.$$

Так как $Q \in \mathcal{K}$ произвольно, то это неравенство возможно только при $T_{11}^{-1*}T_{11}^{-1} = I$, т.е. когда T_{11}^{-1} является полуунитарным. Поскольку этот оператор всюду обратим, то он унитарен.

Из тех же соображений получаем, что T_{22}^* является полуунитарным. Следовательно, T^c — J-полуунитарный оператор. □

Ниже нам потребуется следующий результат для случая гильбертовых пространств.

Лемма 3.3. *Пусть*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2, \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2 \tag{3.10}$$

являются сепарабельными гильбертовыми пространствами. Пусть U — оператор, сопряженный с полуунитарным, причем $\mathfrak{G}_1 = \ker U$, $\mathfrak{G}_2 = \operatorname{Im} U^*$. Пусть $K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix} : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{G}$ — сжатие, действующее из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\{\widetilde{K}\}$ множество сжатий, действующих из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ и являющихся расширениями для K, а через $\{\widetilde{UK}\}$ — множество сжатий, действующих из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ и являющихся расширениями для UK.

Тогда множества $U\{\widetilde{K}\}$ и $\{\widetilde{UK}\}$ совпадают.

Доказательство. Из определения множеств $\{\widetilde{K}\}$ и $\{\widetilde{UK}\}$ прямо следует включение $U\{\widetilde{K}\} \subset \{\widetilde{UK}\}$. Проверим обратное утверждение, т.е. для произвольного $S \in \{\widetilde{UK}\}$ существует такое $T \in \{\widetilde{K}\}$, что

$$UT = S. \tag{3.11}$$

Для этого представим операторы в матричном виде относительно разложений (3.9) и (3.10):

$$U = \begin{bmatrix} 0 & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} K_{11} & T_{12} \\ K_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} U_{12}K_{21} & S_{12} \\ U_{22}K_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

$$UT = \begin{bmatrix} U_{12}K_{21} & U_{12}T_{22} \\ U_{22}K_{21} & U_{22}T_{22} \end{bmatrix}.$$

Из равенства (3.11) после умножения обеих его частей на полуунитарный оператор U^* следует, что $T_{22} = U_{12}^*S_{12} + U_{22}^*S_{22}$. Теперь проблема в выборе подходящего T_{12}. Непосредственным вычислением проверяются равенства

$$T^*T = \begin{bmatrix} K_{11}^* \\ T_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & T_{12} \end{bmatrix} + S^*S = \begin{bmatrix} K_{11}^* \\ T_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & T_{12} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} K_{21}^*K_{21} & K_{21}^*U_{12}^*S_{12} + K_{21}^*U_{22}^*S_{22} \\ S_{12}^*U_{12}K_{21} + S_{22}^*U_{22}K_{21} & S_{12}^*S_{12} + S_{22}^*S_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Следовательно, T является сжатием тогда и только тогда, когда

$$\begin{bmatrix} K_{11}^* \\ T_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & T_{12} \end{bmatrix} \le I - S^*S,$$

или, что эквивалентно, когда найдется такое сжатие $L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \end{bmatrix} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}_1$, что

$$\begin{bmatrix} K_{11} & T_{12} \end{bmatrix} = L(I - S^*S)^{1/2}. \quad (3.13)$$

Запишем оператор $F := (I - S^*S)^{1/2}$ в матричном виде:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12}^* & F_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда из представления операторов F и $I - S^*S$ (см. (3.12)) следует, что

$$\begin{bmatrix} F_{11}^* & F_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12}^* \end{bmatrix} = I - K_{21}^*K_{21}.$$

Так как оператор K по условию является сжатием, то отсюда следует, что

$$K_{11}^*K_{11} \le \begin{bmatrix} F_{11}^* & F_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12}^* \end{bmatrix},$$

а потому существует такое сжатие $L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \end{bmatrix} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}_1$, что

$$K_{11} = L \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12}^* \end{bmatrix}.$$

Положив

$$T_{12} = L \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{bmatrix},$$

получим искомое равенство (3.13). □

Прежде чем перейти к формулировке основной теоремы этого раздела, напомним понятие дефекта J-несжимающего оператора V. Пусть $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}_+$. Тогда $V\mathcal{L}$ — неотрицательное подпространство, которое будет максимальным тогда и только тогда, когда V — J-бинесжимающий оператор. Пусть $\mathcal{M}$ — какое-либо расширение $V\mathcal{L}$ до максимального неотрицательного подпространства. Коразмерность подпространства $V\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$ не зависит от выбора $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ и называется дефектом V.

Теорема 3.1. *Пусть U — J-бинесжимающий оператор. Для того, чтобы при любом J-несжимающем операторе V имело место цепное правило* (3.3)*, необходимо и достаточно, чтобы оператор U^* был J-полуунитарным.*

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что

- (A) если для всех J-несжимающих V выполнено цепное правило, то F_U отображает $\overline{\mathcal{K}}$ на $\overline{\mathcal{K}}$,

а потому в силу леммы 3.2 оператор U^c является J-полуунитарным. Проверим утверждение (A), переформулированное следующим образом:

- (B) Для каждого подпространства $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}_+$ найдется такое подпространство $\widetilde{\mathcal{N}} \in \mathfrak{M}_+$, что $U\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{L}$.

Сперва докажем, что для любого подпространства $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}_+$, $\mathcal{L} = \{x = x_+ + Kx_+\}$, существует подпространство $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}_+$, такое, что

$$\dim \mathcal{L} \cap U\mathcal{N} = \infty. \tag{3.14}$$

В силу леммы 3.1 без ограничения общности можно считать оператор U верхне-треугольным. Пусть V — J-несжимающий, определенный следующим образом: $V\mathfrak{H}^+ \subset \mathfrak{H}^+$ и $V|_{\mathfrak{H}^+}$ — такой полуунитарный оператор, что коразмерность $V\mathfrak{H}^+$ в $\mathfrak{H}^+$ бесконечна, а $V|_{\mathfrak{H}^-} = 0$. Тогда V — J-несжимающий оператор с бесконечным дефектом. Таким же будет и оператор UV. Рассмотрим подпространство $UV\mathfrak{H}^+ \subset \mathfrak{H}^+$. Оно имеет бесконечную коразмерность в $\mathfrak{H}^+$. Расширим его до максимального неотрицательного подпространства $\widetilde{\mathcal{M}} \in \mathfrak{M}_+$, добавив бесконечномерное подпространство $\mathcal{L}_1 = \{x = x_+ + Kx_+ \mid x_+ \perp UV\mathfrak{H}^+\}$. По построению $\mathcal{L}_1 \subset \widetilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{L}$ и потому последнее бесконечномерно. Из цепного правила следует, что найдется такое $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}_+$, что $U\mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{M}}$, что и доказывает (3.14).

Обозначим $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \cap U\mathcal{N}$. Тогда существует бесконечномерное подпространство $\mathcal{N}_0 \subset N$ такое, что $U\mathcal{N}_0 = \mathcal{L}_0$. Пусть Q — угловой оператор подпространства $\mathcal{N}_0$ и V_1 — полуунитарный оператор в $\mathfrak{H}^+$ с областью значений, совпадающей с областью определения оператора Q. Введем в рассмотрение максимальное неотрицательное подпространство $\mathcal{L}_2 = \{x = x_+ + QV_1x_+\}$ и определим линейный оператор V следующей матрицей:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Тогда V — J-несжимающий оператор, причем $V\mathcal{L}_2 = \mathcal{N}_0$. Следовательно, $UV\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$. Отсюда, в силу цепного правила, имеем (B).

Докажем теперь достаточность. Пусть U — J-бинесжимающий оператор, J-сопряженный с J-полуунитарным, V — произвольный J-несжимающий оператор и $\mathcal{L}$ — произвольное максимальное неотрицательное подпространство. В силу леммы 3.1 без ограничения общности можно считать оператор U, с учетом того, что он сопряжен с J-полуунитарным, диагональным, и даже более, $U|\mathfrak{H}^+ = I$:

$$U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}.$$

Пусть K — угловой оператор подпространства $V\mathcal{L}$, определенный на подпространстве $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}^+$. Тогда равенство (3.3) эквивалентно тому, что для каждого оператора S во множестве $\{\widetilde{U_{22}K}\}$ найдется оператор $T \in \{\widetilde{K}\}$ такой, что $U_{22}T = S$. Справедливость последнего следует из леммы 3.3. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть V — плюс-оператор, $K \in \overline{\mathcal{K}}$. Если множество $(V_{11} + V_{12}K)\mathfrak{H}_1$ плотно в $\mathfrak{H}_1$, то при любом плюс-операторе U равенство* (3.3) *справедливо. Если неплотно, то уже при J-бинесжимающем операторе $U = \operatorname{diag}\{I, 0\}$ равенство* (3.3) *не имеет места.*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{M} = (V_{11} + V_{12}K)\mathfrak{H}_1$. Пусть $\overline{\mathcal{M}} = \mathfrak{H}_1$. Тогда из [2, предложение 4.20] следует, что равенство (3.3) справедливо.

Пусть $\overline{\mathcal{M}} \neq \mathfrak{H}_1$. Тогда $\mathcal{M}$ допускает различные продолжения до $\widehat{\mathcal{M}} \in \mathfrak{M}_+$. Но $\mathcal{M} = UV\mathcal{L}$, где $K = K(\mathcal{L})$. С другой стороны, $U\mathcal{L}_1 = \mathfrak{H}_1$ для всякого $\mathcal{L}_1 \in \mathfrak{M}_+$. $\square$

4. Приложения

Теорема 4.1. *Пусть A — строгий плюс-оператор. Тогда он представим в виде*

$$A = UT, \tag{4.1}$$

где U — $\mathfrak{J}$-унитарный оператор, T — плюс-оператор, $T_{21} = 0$. При этом

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_U \circ \mathcal{F}_T. \tag{4.2}$$

Если к тому же справедливо неравенство (1.1), *то оператор A представим в виде*

$$A = \widetilde{T}\widetilde{U}, \tag{4.3}$$

где $\widetilde{U}$ — $\mathfrak{J}$-унитарный оператор, $\widetilde{T}$ — плюс-оператор, $\widetilde{T}_{12} = 0$. При этом

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_{\widetilde{T}} \circ \mathcal{F}_{\widetilde{U}}. \tag{4.4}$$

Лемма 4.1. *Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $T_{12} = T_{11}\Gamma^*$, $\|\Gamma\| < 1$. Тогда $T = BV$, где $B_{12} = 0$, а V — $\mathfrak{J}$-унитарный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, блок-матрица которого в базисе $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2\}$ имеет вид:

$$U = \begin{pmatrix} (I-\Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} & -\Gamma^*(I-\Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} \\ -\Gamma(I-\Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} & (I-\Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Оператор U (а, значит, и U^{-1}) $\mathfrak{J}$-унитарен (см. [1, теорема 2.5.10]). Полагая $B = TU$, получаем: $B_{12} = 0$, $T = BV$, где $V = U^{-1}$. □

Лемма 4.2. *Пусть A — строгий плюс-оператор, $\mathcal{L} = A^*\mathfrak{H}_1$. Тогда $\mathcal{L}^{\perp}$ и $\mathcal{L}^{[\perp]}$ — равномерно отрицательные подпространства.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{L}^{\perp}$. Тогда $(x, \mathcal{L}) = (Ax, \mathfrak{H}_1) = 0$. Таким образом, $x \in \operatorname{Ker}(P_1A)$, где P_1A — строгий плюс-оператор. Вследствие [1, предложение 2.4.14] подпространство $\operatorname{Ker}(P_1A)$ равномерно отрицательно. Окончание доказательства очевидно. □

Лемма 4.3. *Строгий плюс-оператор $A = T$ удовлетворяет условиям леммы* 4.1 *в точности, если $D = A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^* \geq 0$.*

Доказательство. В условиях леммы 4.1 линеал $A^*\mathfrak{H}_1$ равномерно положителен. Отсюда, очевидно, $D \geq 0$.

Пусть $D \geq 0$, т.е. $A^*\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{p}_+$. Из леммы 4.2 имеем $\bar{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}_+$. Далее, $\|K^*\| < 1$, где K — угловой оператор подпространства $\bar{\mathcal{L}}$. Следовательно, линеал $\mathcal{L}$ равномерно положителен, что эквивалентно доказываемому утверждению. □

Лемма 4.4. *Пусть T — строгий плюс-оператор. Тогда $T = VB$, где $B_{21} = 0$, а V — $\mathfrak{J}$-унитарный оператор.*

Доказательство. Поскольку $T\mathfrak{H}_1$ — равномерно положительный линеал, то существует сжатие $\Gamma \in \mathcal{K}$ такое, что $T_{21} = \Gamma T_{11}$. Рассмотрим оператор $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, блок-матрица которого в базисе $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2\}$ имеет вид:

$$U = \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} & -(I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}}\Gamma^* \\ -(I - \Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}}\Gamma & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Оператор U (а, значит, и U^{-1}) $\mathfrak{J}$-унитарен (см. [1, теорема 2.5.10]).

Полагая $B = UT$, получаем: $B_{21} = 0$, $T = VB$, где $V = U^{-1}$. □

Доказательство теоремы 4.1. Равенство (4.3) следует из лемм 4.3 и 4.1, равенство (4.1) — из леммы 4.4. Отсюда равенство (4.2) справедливо вследствие теоремы 3.1, а равенство (4.4) — вследствие теоремы 3.2. □

Хорошо известно, что оператор, сопряженный к строгому плюс-оператору, может не быть даже плюс-оператором. Покажем однако, что в условиях теоремы 4.1 утверждения этой теоремы допускают распространение и на операторы A^*.

Ниже, как и во всей статье, области определений и значений д.л.о. — подмножества шара; $K \in \overline{\mathcal{K}}$. Однако $U, V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — не обязательно плюс-операторы.

Лемма 4.5. *Для всяких $U, V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ и для всякого $K \in \overline{\mathcal{K}}$ имеем*

$$\mathcal{F}_U(\mathcal{F}_V(K)) \subseteq \mathcal{F}_{UV}(K).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству [2, предложение 4.20,a].

Лемма 4.6. *Если $U, V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $K \in \overline{\mathcal{K}}$, $\mathcal{F}_V(K) \neq \varnothing$ и $\overline{(V_{11} + V_{12}K)\mathfrak{H}_1} = \mathfrak{H}_1$, то справедливо цепное правило:*

$$\mathcal{F}_U(\mathcal{F}_V(K)) = \mathcal{F}_{UV}(K). \tag{4.5}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству [2, предложение 4.20,b].

Лемма 4.7. *Если U — $\mathfrak{J}$-унитарный оператор, $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $K \in \overline{\mathcal{K}}$, то справедливо* (4.5).

Доказательство леммы фактически содержится в доказательстве теоремы 3.1.

Теорема 4.2. *Пусть A — строгий плюс-оператор. Тогда оператор A^* представим в виде*

$$A^* = TU,$$

где U — $\mathfrak{J}$-унитарный оператор, $T_{12} = 0$. При этом

$$\mathcal{F}_{A^*} = \mathcal{F}_T \circ \mathcal{F}_U.$$

Если к тому же справедливо неравенство (1.1)*, то оператор A^* представим в виде*

$$A^* = \widetilde{U}\widetilde{T},$$

где $\widetilde{U}$ — унитарный оператор, $\widetilde{T}_{21} = 0$. При этом

$$\mathcal{F}_{A^*} = \mathcal{F}_{\widetilde{U}} \circ \mathcal{F}_{\widetilde{T}}.$$

Доказательство сразу следует из представлений (4.1) и (4.3), леммы 4.6 и леммы 4.7.

Замечание 4.1. Поскольку в условиях теоремы 4.1 $A^*\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{p}_+$, то $\mathcal{F}_{A^*} \neq \varnothing$. Кроме того, $\mathcal{F}_{A^*}$ — *однозначное* отношение. В самом деле, достаточно доказать однозначность $\mathcal{F}_{A^C}$. Пусть $A^C\mathcal{L} \subset \mathfrak{p}_+$, $[x_+, A^C\mathcal{L}] = 0$. Тогда $Ax_+ \notin \mathfrak{p}_{++}$, $x_+ = 0$.

Однако легко показать, что дробно-линейным отображением шара отношение $\mathcal{F}_{A^*}$ может оказаться лишь в случае бистрогого плюс-оператора A.

Литература

[1] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, М.: Наука, 1986.

[2] V. Khatskevich, M. Ostrovskii, V. Shulman, *Linear fractional relations for Hilbert space operators* // Math. Nachr., **279** (2006), No. 8, 875–890.

[3] Т. Я. Азизов, *О расширениях инвариантных дуальных пар* // Укр. мат. ж., **41** (1989), No. 7, 958–961.

[4] В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич, *О факторизации операторов и о свойствах образов дробно-линейных отношений*, Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2010. Тезисы докладов. Воронеж: ВорГу, 2010, 132–133.

[5] В. А. Хацкевич, В. А. Сендеров, *О порождаемых плюс-операторами операторных множествах* // Вестник ВГУ, в печати.

[6] И. С. Иохвидов, *О банаховых пространствах с J-метрикой и некоторых классах линейных операторов в этих пространствах* // Известия АН Молд. ССР, сер. физ.-техн. наук, **1** (1968), 60–80.

[7] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1958.

[8] S. Kakutani, *Some characterizations of Euclidean space* // Jap. J. Math. **16**(1939), No. 2, 93–98.

[9] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *On complemented subspace problem* // Isr. J. Math. **9** (1971), 263–269.

Сведения об авторах

Томас Яковлевич Азизов
Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1
Воронеж, 394006
Россия
E-Mail: azizov@math.vsu.ru

Виктор А. Хацкевич
Department of Mathematics
ORT Braude Academic College
College Campus, P.O.Box 78
Karmiel 21982
Israel
E-Mail: victor_kh@hotmail.com