Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 4, 439 – 452

Задача Дарбу для неявного дифференциального уравнения дробного порядка

Александр Н. Витюк, Анастасия В. Михайленко

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Получены достаточные условия существования и единственности решения задачи Дарбу для неявного дифференциального уравнения дробного порядка. Предлагается численный метод решения этой задачи.

2010 MSC. 35R11.

Ключевые слова и фразы. Неявное дифференциальное уравнение дробного порядка, теорема существования и единственности, численный метод.

1. Введение

Пусть $P = (0, a] \times (0, b]$, $\overline{P} = [0, a] \times [0, b]$, $0 < a, b < +\infty$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $r = (\alpha; \beta)$, $1 - r = (1 - \alpha; 1 - \beta)$, $\theta = (0; 0)$, $\sigma = (1; 1)$.

Обозначим через $C(\overline{P})$, $L(\overline{P})$, $AC(\overline{P})$, соответственно, пространство непрерывных, суммируемых по Лебегу, абсолютно непрерывных функций $f : \overline{P} \to R$. Для функции $f(x, y) \in L(\overline{P})$ левосторонним смешанным интегралом Римана–Лиувилля порядка r называем функцию [1]

$$I_\theta^r f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x - t)^{\alpha - 1} (y - s)^{\beta - 1} f(t, s)\, dt\, ds,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. В частности,

$$I_\theta^\sigma f(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f(t, s)\, dt\, ds, \qquad I_\theta^\theta f(x, y) = f(x, y).$$

Статья поступила в редакцию 15.06.2010

ISSN 1810 – 3200.

Частным интегралом Римана–Лиувилля порядка α от функции $f(x,y)$ по переменной x называем [1] функцию

$$I_{0x}^{\alpha} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,y)\,dt.$$

Левосторонней смешанной производной Римана–Лиувилля порядка r от $f(x,y)$ называем [1] функцию

$$D_{\theta}^{r} f(x,y) = D_{xy} f_{1-r}(x,y), \qquad D_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$f_{1-r}(x,y) = I_{\theta}^{1-r} f(x,y),$$

а частной дробной производной Римана–Лиувилля порядка α по переменной x — функцию

$$D_{0x}^{\alpha} f(x,y) = \frac{\partial f_{1-\alpha}(x,y)}{\partial x}, \qquad f_{1-\alpha}(x,y) = I_{0x}^{1-\alpha} f(x,y).$$

Аналогично определяем производную

$$D_{0y}^{\beta} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^y (y-s)^{-\beta} f(x,s)\,ds.$$

Для функции $f(x,y) : \overline{P} \to R$ полагаем $\gamma(x,y) = f(x,0) + f(0,y) - f(0,0)$, $q(x,y) = f(x,y) - \gamma(x,y)$. Смешанной регуляризованной производной функции $f(x,y)$ порядка r называем функцию [2]

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\theta}^{r} f(x,y) &= D_{\theta}^{r} q(x,y) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(1-\beta)} D_{xy} \left(\int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-t)^{-\alpha} \cdot (y-s)^{-\beta} q(t,s)\,dt\,ds \right). \end{aligned}$$

Частной регуляризованной производной функции $f(x,y)$ порядка α по переменной x называем функцию

$$\overline{D}_{0x}^{\alpha} f(x,y) = D_{0x}^{\alpha}(f(x,y) - f(0,y)).$$

Аналогично определяем производную

$$\overline{D}_{0y}^{\beta} f(x,y) = D_{0y}^{\beta}(f(x,y) - f(x,0)).$$

Рассмотрим задачу

$$\overline{D}_\theta^r u(x,y) = F(x,y,u(x,y),\overline{D}_\theta^r u(x,y)), \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le a;\\ u(0,y)=\psi(y), \quad 0\le y\le b;\\ \varphi(0)=\psi(0). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Задача Дарбу для дифференциального уравнения $\overline{D}_\theta^r u(x,y) = F(x,y,u(x,y))$ рассмотрена в [2], а в [3] — задача

$$\begin{gathered} D_\theta^r u(x,y)\in F(x,y,u(x,y)),\\ u_{1-r}(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le a;\\ u_{1-r}(0,y)=\psi(y), \quad 0\le y\le b;\\ \varphi(0)=\psi(0). \end{gathered}$$

В работах [4, 5] рассматривалась задача Дарбу для дифференциальных уравнений с запаздыванием и дробной производной Капуто.

Если $\alpha=\beta=1$, то в соответствии с определением производной $\overline{D}_\theta^r u(x,y)$ задача (1.1), (1.2) сводится к задаче Дарбу для уравнения $u_{xy}=F(x,y,u,u_{xy})$, которая была рассмотрена в работе [6].

Система дифференциальных уравнений, содержащая регуляризованную производную $\overline{D}_0^\alpha z(x) = \frac{d}{dx} I_0^{1-\alpha}(z(x)-z(0))$, рассмотрена в [9].

2. Существование и единственность решения задачи (1.1), (1.2)

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывно дифференцируемые. Решением задачи (1.1), (1.2) называем такую функцию $u(x,y)$, что:

(i) $u(x,y)$, $\overline{D}_{0x}^\alpha u(x,y)$, $\overline{D}_{0y}^\beta u(x,y)$, $\overline{D}_\theta^r u(x,y)$ непрерывные для $(x,y)\in\overline{P}$, а $u_{1-r}(x,y)\in AC(\overline{P})$;

(ii) удовлетворяет условиям (1.2) и уравнению (1.1) для $(x,y)\in\overline{P}$.

Теорема 2.1. *Пусть функция $F(x,y,u,z):\overline{P}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ непрерывная. Тогда задача* (1.1), (1.2) *эквивалентная решению $v(x,y)\in C(\overline{P})$ уравнения*

$$v(x,y) = F(x,y,\gamma(x,y)+I_\theta^r v(x,y), v(x,y)), \tag{2.1}$$

где $u(x,y)=\gamma(x,y)+I_\theta^r v(x,y)$, $\gamma(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\varphi(0)$.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (1.1), (1.2), а $v(x,y) = \overline{D}_\theta^r u(x,y)$. Докажем, что $u(x,y) = \gamma(x,y) + \mu(x,y)$, $\mu(x,y) = I_\theta^r v(x,y)$, а $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2.1).

Пусть $q(x,y) = u(x,y) - \gamma(x,y)$. Тогда $q_{1-r}(x,y) = u_{1-r}(x,y) - \gamma_{1-r}(x,y) \in AC(\overline{P})$, так как $u_{1-r}(x,y) \in AC(\overline{P})$ по определению решения задачи (1.1), (1.2), а, например,

$$I_\theta^{1-r}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \int_0^y (x-t)^{-\alpha}(y-s)^{-\beta}\varphi(t)\,dt\,ds$$

$$= \frac{y^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} I_{0x}^{1-\alpha}\varphi(x) \in AC(\overline{P})$$

вследствие того, что $y^{1-\beta} \in AC([0,b])$, а $I_{0x}^{1-\alpha}\varphi(x) \in AC([0,a])$ ([1, лемма 2.1]) для $\varphi(x) \in AC([0,a])$.

Если $B = \max_{\overline{P}} |u(x,y) - \gamma(x,y)|$, то для $(x,y) \in P$

$$|q_{1-r}(x,y)| \leq \frac{Bx^{1-\alpha}y^{1-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)\cdot\Gamma(2-\beta)}.$$

Следовательно $q_{1-r}(x,y)$ можно продолжить по непрерывности так, что $q_{1-r}(x,0) = 0$, $x \in [0,a]$ и $q_{1-r}(0,y) = 0$, $y \in [0,b]$. Так как $v(x,y) = \overline{D}_\theta^r u(x,y) = D_{xy} q_{1-r}(x,y)$, то [7]

$$q_{1-r}(x,y) = I_\theta^\sigma v(x,y) = I_\theta^{1-r}(I_\theta^r v(x,y)),$$

$$I_\theta^{1-r}(q(x,y) - I_\theta^r v(x,y)) = 0.$$

Последнее уравнение есть однородное интегральное уравнение Абеля, единственным решением которого есть тривиальное решение. Поэтому $u(x,y) = \gamma(x,y) + I_\theta^r v(x,y)$. Очевидно, что $v(x,y)$ удовлетворяет (2.1).

Пусть $v(x,y) \in C(\overline{P})$ — решение уравнения (2.1). Докажем, что $u(x,y) = \gamma(x,y) + \mu(x,y)$ есть решение задачи (1.1), (1.2). Предварительно докажем, что $\mu(x,y) \in C(\overline{P})$. Пусть $(x_1,y_1),(x_2,y_1) \in P$ и $x_1 < x_2$, а $M = \max_{\overline{P}} |v(x,y)|$. Тогда

$$|\mu(x_2,y_1) - \mu(x_1,y_1)|$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \left(\int_0^{x_1}\int_0^{y_1} \left((x_1-t)^{\alpha-1} - (x_2-t)^{\alpha-1}\right)(y_1-s)^{\beta-1}\,dt\,ds \right.$$

$$\left. + \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1} (x_2-t)^{\alpha-1}(y_1-s)^{\beta-1}\,dt\,ds \right)$$

$$\leq \frac{Mb^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}\left(2(x_2-x_1)^\alpha-(x_2^\alpha-x_1^\alpha)\right)$$
$$\leq \frac{2Mb^\beta(x_2-x_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}. \quad (2.2)$$

Для (x_1, y_1), (x_1, y_2) и $y_1 < y_2$ аналогично получаем, что

$$|\mu(x_1,y_2)-\mu(x_1,y_1)| \leq \frac{2Ma^\alpha(y_2-y_1)^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что $\mu(x,y) \in C(P)$. Так как для $(x,y) \in P$

$$|\mu(x,y)| \leq \frac{Mx^\alpha y^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)},$$

то $\mu(x,y)$ можно продолжить по непрерывности так, что $\mu(x,y) \in C(\overline{P})$ и

$$\mu(x,0)=\mu(0,y)=0, \quad x\in[0,a],\ y\in[0,b].$$

Следовательно $u(x,y) \in C(\overline{P})$ и удовлетворяет условиям (1.2). Кроме того,

$$u_{1-r}(x,y) = I_\theta^{1-r}\gamma(x,y) + I_\theta^\sigma v(x,y) \in AC(\overline{P}),$$

а

$$q_{1-r}(x,y) = I_\theta^{1-r}(u(x,y)-\gamma(x,y)) = I_\theta^{1-r}(I_\theta^r v(x,y)) = I_\theta^\sigma v(x,y).$$

Значит

$$\overline{D}_\theta^r u(x,y) = D_{xy}q_{1-r}(x,y) = v(x,y)$$

для $(x,y) \in \overline{P}$. Следовательно $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1) для $(x,y) \in \overline{P}$. Докажем ещё непрерывность производных $\overline{D}_{0x}^\alpha u(x,y)$, $\overline{D}_{0y}^\beta u(x,y)$ в области $\overline{P}$. Используя теорему Фубини, получим

$$\overline{D}_{0x}^\alpha u(x,y) = D_{0x}^\alpha(u(x,y)-\psi(y))$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} I_{0x}^{1-\alpha}\left((\varphi(x)-\varphi(0)) + I_\theta^r v(x,y)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\left(\int_0^t \varphi'(\tau)\,d\tau\right)dt + I_{0x}^{1-\alpha}(I_0^r v(x,y))\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \left(\int_0^t \frac{\varphi'(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\right)dt\right.$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^y(y-s)^{\beta-1}v(t,s)\,ds\right)dt\Bigg)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x(x-t)^{-\alpha}\varphi'(t)\,dt+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^y(y-s)^{\beta-1}v(x,s)\,ds$$

$$=I_{0x}^{1-\alpha}\varphi'(x)+I_{0y}^{\beta}v(x,y).$$

Аналогично получаем, что $\overline{D}_{0y}^{\beta}u(x,y)=I_{0y}^{1-\beta}\psi'(y)+I_{0x}^{\alpha}v(x,y)$.

Докажем, что $\lambda(x,y)=I_{0y}^{\beta}v(x,y)\in C(\overline{P})$. Пусть $\varepsilon>0$, а (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in[0,a]\times(0,b]$, причём $y_1<y_2$. Докажем, что существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что $|\lambda(x_2,y_2)-\lambda(x_1,y_1)|<\varepsilon$, если $|x_2-x_1|<\delta$, $|y_2-y_1|<\delta$.

Так как $v(x,y)\in C(\overline{P})$, то для $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon\Gamma(\beta+1)}{2\cdot b^{\beta}}$ существует такое $\delta_1>0$, что $|v(x_2,y_2)-v(x_1,y_1)|<\varepsilon_1$, если $|x_2-x_1|<\delta_1$, $|y_2-y_1|<\delta_1$. Теперь

$$|\lambda(x_2,y_2)-\lambda(x_1,y_1)|\le|\lambda(x_2,y_2)-\lambda(x_2,y_1)|$$
$$+|\lambda(x_2,y_1)-\lambda(x_1,y_1)|=A_1+A_2,$$

$$A_1=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left|\int\limits_0^{y_2}(y_2-s)^{\beta-1}v(x_2,s)\,ds-\int\limits_0^{y_1}(y_1-s)^{\beta-1}v(x_2,s)\,ds\right|$$
$$\le\frac{M}{\Gamma(\beta)}\left[\int\limits_0^{y_1}\big((y_1-s)^{\beta-1}-(y_2-s)^{\beta-1}\big)ds+\int\limits_{y_1}^{y_2}(y_2-s)^{\beta-1}\,ds\right]$$
$$\le\frac{M}{\Gamma(\beta+1)}\left[2(y_2-y_1)^{\beta}-(y_2^{\beta}-y_1^{\beta})\right]\le\frac{2M(y_2-y_1)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)},$$

$$A_2\le\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{y_1}(y_1-s)^{\beta-1}|v(x_2,s)-v(x_1,s)|\,ds\le\frac{\varepsilon_1b^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)},$$

если $|x_2-x_1|<\delta_1$.

Пусть $\delta_2=\left(\frac{\varepsilon\cdot\Gamma(\beta+1)}{4M}\right)^{1/\beta}$, а $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Тогда для $|x_2-x_1|<\delta$, $|y_2-y_1|<\delta$ получим, что $A_1+A_2<\varepsilon$. Из оценки $|\lambda(x,y)|\le\frac{My^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}$ следует, что $\lambda(x,y)$ можно продолжить по непрерывности нулем в точках $(x,0)$, $x\in[0,a]$. Следовательно $\lambda(x,y)\in C(\overline{P})$. Так как $\varphi'(x)\in C([0,a])$, то аналогично доказываем, что $I_{0x}^{1-\alpha}\varphi'(x)\in C([0,a])$.

Теорема 2.1 доказана. $\square$

При доказательстве следующей теоремы о существовании и единственности решения задачи (1.1), (1.2) используем общую идею работы [8].

Предположения **(H)**. Пусть функция $F(x, y, u, z) : \overline{P} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывная, и для любых $(x, y, u_i, z_i) \in \overline{P} \times \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$

$$|F(x, y, u_1, z_1) - F(x, y, u_2, z_2)| \le K|u_1 - u_2| + L|z_1 - z_2|, \tag{2.4}$$

причём $0 < L < 1$.

Пусть $\max_{\overline{P}} |F(x, y, \gamma(x, y), 0)| \le S$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$z(x, y) = \frac{K}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^y (x - t)^{\alpha - 1} (y - s)^{\beta - 1} z(t, s)\, dt\, ds + Lz(x, y) + S,$$

единственным решением которого, принадлежащим классу $C(\overline{P})$, является функция [3]

$$z(x, y) = \frac{S}{1 - L} E_r\Big(\frac{K x^\alpha y^\beta}{1 - L}\Big),$$

где

$$E_r(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1) \cdot \Gamma(\beta k + 1)}.$$

Предполагаем также, что в классе функций, удовлетворяющих условию $0 \le p(x, y) \le z(x, y)$, $(x, y) \in \overline{P}$ функция $p(x, y) = 0$, $(x, y) \in \overline{P}$ является единственным измеримым решением уравнения

$$p(x, y) = K I_\theta^r p(x, y) + Lp(x, y). \tag{2.5}$$

Легко доказать, что это предположение выполняется, если

$$\frac{K a^\alpha b^\beta}{(1 - L) \cdot \Gamma(\alpha + 1) \cdot \Gamma(\beta + 1)} < 1.$$

Заметим, что интегральное уравнение (2.5) эквивалентно уравнению

$$p(x, y) = (1 - L)^{-1} \cdot K \cdot I_\theta^r p(x, y),$$

но для дальнейшего удобна его запись в виде (2.5). Рассмотрим последовательность $p_n(x, y)$, $n \ge 0$, $(x, y) \in \overline{P}$, где $p_0(x, y) = z(x, y)$,

$$p_{n+1}(x, y) = K \cdot I_\theta^r p_n(x, y) + Lp_n(x, y). \tag{2.6}$$

Докажем, что $p_n(x,y) \in C(\overline{P})$ и для $(x,y) \in \overline{P}$

$$0 \le p_{n+1}(x,y) \le p_n(x,y) \le p_0(x,y), \quad n \ge 0. \tag{2.7}$$

При $n = 0$

$$p_1(x,y) = K \cdot I_\theta^r p_0(x,y) + Lp_0(x,y) \\ \le K \cdot I_\theta^r p_0(x,y) + Lp_0(x,y) + S = p_0(x,y).$$

В силу доказанного в теореме 2.1 $I_\theta^r p_0(x,y) \in C(\overline{P})$. Следовательно $p_1(x,y) \in C(\overline{P})$. Если $0 \le p_n(x,y) \le p_{n-1}(x,y)$, $p_n(x,y) \in C(\overline{P})$, $n \ge 1$, то для $(x,y) \in \overline{P}$

$$p_{n+1}(x,y) = K \cdot I_\theta^r p_n(x,y) + Lp_n(x,y) \\ \le K \cdot I_\theta^r p_{n-1}(x,y) + Lp_{n-1}(x,y) = p_n(x,y)$$

и $p_{n+1}(x,y) \in C(\overline{P})$. Таким образом, последовательность $p_n(x,y)$, $n \ge 0$ невозрастающая и ограничена снизу. Поэтому существует измеримая функция $\tau(x,y)$, которая является поточечным пределом последовательности $p_n(x,y)$, $n \ge 0$, причём $0 \le \tau(x,y) \le p_0(x,y)$, $(x,y) \in \overline{P}$. Согласно теореме Лебега о мажорантной сходимости $\tau(x,y)$ является решением уравнения (2.5). Следовательно $\tau(x,y) = 0$, $(x,y) \in \overline{P}$ и согласно теореме Дини последовательность $p_n(x,y)$, $n \ge 0$ равномерно на $\overline{P}$ сходится к нулю.

Рассмотрим ещё последовательность $v_n(x,y)$, $n \ge 0$, полагая $v_0(x,y) = 0$, а

$$v_{n+1}(x,y) = F(x,y,\gamma(x,y) + I_\theta^r v_n(x,y), v_n(x,y)). \tag{2.8}$$

Теорема 2.2. *Пусть функция $F(x,y,u,z)$ удовлетворяет предположениям* **(H)**. *Тогда существует единственное решение $v(x,y)$ уравнения* (2.1) *такое, что для $(x,y) \in \overline{P}$*

$$|v(x,y)| \le z(x,y), \tag{2.9}$$

$$|v(x,y) - v_n(x,y)| \le p_n(x,y), \quad n \ge 0. \tag{2.10}$$

Доказательство. Очевидно, что $|v_0(x,y)| \le z(x,y)$. Пусть $v_n(x,y) \le z(x,y)$. Тогда

$$|v_{n+1}(x,y)| \le |F(x,y,\gamma(x,y) + I_\theta^r v_n(x,y), v_n(x,y)) - F(x,y,\gamma(x,y),0)| \\ + |F(x,y,\gamma(x,y),0)| \le K \cdot I_\theta^r |v_n(x,y)| + L|v_n(x,y)| + S \\ \le K \cdot I_\theta^r z(x,y) + Lz(x,y) + S = z(x,y), \quad (x,y) \in \overline{P}.$$

Следовательно для $(x,y)\in\overline{P}$, $v_n(x,y)\in C(\overline{P})$ и

$$|v_n(x,y)|\leq z(x,y),\quad n\geq 0. \tag{2.11}$$

Докажем, что для любого натурального $p\geq 1$ и $(x,y)\in\overline{P}$

$$|v_{n+p}(x,y)-v_n(x,y)|\leq p_n(x,y),\quad n\geq 0. \tag{2.12}$$

При $n=0$

$$|v_p(x,y)-v_0(x,y)|=|v_p(x,y)|\leq p_0(x,y).$$

Предположим, что $|v_{n+p}(x,y)-v_n(x,y)|\leq p_n(x,y)$. Тогда

$$\begin{aligned}&|v_{n+p+1}(x,y)-v_{n+1}(x,y)|\\&\qquad\leq K\cdot I_\theta^r\left(|v_{n+p}(x,y)-v_n(x,y)|\right)+L|v_{n+p}(x,y)-v_n(x,y)|\\&\qquad\qquad\leq K\cdot I_\theta^r p_n(x,y)+Lp_n(x,y)=p_{n+1}(x,y).\end{aligned}$$

Отсюда и метода математической индукции следует справедливость оценки (2.12), согласно которой последовательность $v_n(x,y)$, $n\geq 0$ равномерно на $\overline{P}$ сходится к $v(x,y)\in C(\overline{P})$. Из (2.11) при $n\to\infty$ следует (2.9), из (2.12) при $p\to 0$ следует (2.10), а из (2.8) при $n\to\infty$ следует, что $v(x,y)$ является решением уравнения (2.1).

Единственность. Пусть $\overline{v}(x,y)\in C(\overline{P})$, $|\overline{v}(x,y)|\leq z(x,y)$, $(x,y)\in\overline{P}$ есть другое решение уравнения (2.1). Используя индукцию, доказываем, что $|\overline{v}(x,y)-v_n(x,y)|\leq p_n(x,y)$, $n\geq 0$ в области $\overline{P}$. Следовательно $\lim v_n(x,y)=\overline{v}(x,y)$ при $n\to\infty$, т.е. $\overline{v}(x,y)=v(x,y)$.

Теорема 2.2 доказана. □

Таким образом, если $F(x,y,u,z)$ в области $\overline{P}\times\mathbb{R}^2$ удовлетворяет предположениям (H), то согласно теореме 2.2 существует единственное решение $v(x,y)\in C(\overline{P})$ уравнения (2.1), а согласно теореме 2.1 $u(x,y)=\gamma(x,y)+I_\theta^r v(x,y)$ будет единственным решением задачи (1.1), (1.2) в области $\overline{P}$, причём a и b такие, что

$$Ka^\alpha b^\beta\left((1-L)\cdot\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)\right)^{-1}<1.$$

3. Численный метод

Рассмотрим численный метод приближённого решения задачи (1.1), (1.2). Предположим, что функция $F(x,y,u,z)$ удовлетворяет условиям (H). Пусть $P_{h\tau}=\{(x_i,y_j):\ x_i=ih,\ y_j=j\tau;\ N_1\cdot h=a,\ N_2\cdot\tau=b\}$, а $P_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$. Кроме того, $u_{ij}\approx u(x_i,y_j)$, $v_{ij}\approx v(x_i,y_j)$, $\gamma_{ij}=\gamma(x_i,y_j)$. Воспользуемся следующим утверждением работы [2].

Лемма 3.1. *Пусть сеточные функции* $z : P_{h\tau} \to \mathbb{R}$, $w : P_{h\tau} \to \mathbb{R}_+$ *такие, что*

$$|z_{n+1,m+1}| \le \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)} \times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} |z_{ij}| \left(x^{\alpha}_{n-i+1} - x^{\alpha}_{n-i}\right)\cdot\left(y^{\beta}_{m-j+1} - y^{\beta}_{m-j}\right) + B,$$

$$w_{n+1,m+1} \ge \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)} \times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij} \left(x^{\alpha}_{n-i+1} - x^{\alpha}_{n-i}\right)\cdot\left(y^{\beta}_{m-j+1} - y^{\beta}_{m-j}\right) + B, \quad (3.1)$$

$n = \overline{0, N_1 - 1}$, $m = \overline{0, N_2 - 1}$, *причём*

$$A > 0,\ B > 0, \quad z_{i0} = z_{j0} = 0, \quad w_{i0} = w_{j0} = B, \quad i = \overline{0, N_1},\ j = \overline{0, N_2}.$$

Тогда $|z_{ij}| \le w_{ij}$, $i = \overline{0, N_1}$, $j = \overline{0, N_2}$, *а соотношениям* (3.1) *удовлетворяют* $w_{ij} = \sigma(x_i, y_j)$, *где* $\sigma(x, y) = B \cdot E_r(A \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta})$ *есть решение интегрального уравнения*

$$\sigma(x, y) = \frac{A}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x - t)^{\alpha-1}(y - s)^{\beta-1}\sigma(t, s)\, dt\, ds + B.$$

Значения v_{i0} и v_{0j} есть решения уравнений

$$v_{i0} = F(x_i, 0, \gamma_{i0}, v_{i0}), \quad v_{0j} = F(0, y_j, \gamma_{0j}, v_{0j}), \quad i = \overline{0, N_1},\ j = \overline{0, N_2}.$$

Пусть u_{ij}, v_{ij}, $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$; $u_{i,m+1}, v_{i,m+1}$, $i = \overline{0, n}$; $u_{n+1,j}, v_{n+1,j}$, $j = \overline{0, m}$ уже найдены. Тогда

$$u(x_{n+1}, y_{m+1}) = \gamma_{n+1,m+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{x_{n+1}} \int\limits_0^{y_{m+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha-1}(y_{m+1} - s)^{\beta-1} v(t, s)\, dt\, ds$$

$$= \gamma_{n+1,m+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha-1}(y_{m+1} - s)^{\beta-1} v(t, s)\, dt\, ds$$

$$\approx \gamma_{n+1,m+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}$$
$$\times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} (x_{n+1}-t)^{\alpha-1}(y_{m+1}-s)^{\beta-1} v_{ij}\,dt\,ds.$$

В качестве $u_{n+1,m+1}$ принимаем величину

$$u_{n+1,m+1} = \gamma_{n+1,m+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}$$
$$\times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} v_{ij}\left(x^{\alpha}_{n-i+1} - x^{\alpha}_{n-i}\right)\cdot\left(y^{\beta}_{m-j+1} - y^{\beta}_{m-j}\right). \quad (3.2)$$

Значение $v_{n+1,m+1}$ найдём как решение уравнения

$$v_{n+1,m+1} = F(x_{n+1}, y_{m+1}, u_{n+1,m+1}, v_{n+1,m+1}). \quad (3.3)$$

Докажем, что $\lim\max_{i,j}|u(x_i,y_j)-u_{ij}| = 0$, $\lim\max_{i,j}|v(x_i,y_j)-v_{ij}| = 0$ при $N_1\to\infty$, $N_2\to\infty$. Пусть $\delta_{ij} = v(x_i,y_j)-v_{ij}$. Из (2.1) при $x = x_{n+1}$, $y = y_{m+1}$ и (3.3) с учётом условия (2.4) следует, что

$$\begin{gathered} |\delta_{n+1,m+1}| \le K|u(x_{n+1},y_{m+1}) - u_{n+1,m+1}| + L|\delta_{n+1,m+1}|, \\ n = \overline{0, N_1-1},\ m = \overline{0, N_2-1}. \end{gathered} \quad (3.4)$$

Кроме того,

$$|u(x_{n+1},y_{m+1}) - u_{n+1,m+1}| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}$$
$$\times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} (x_{n+1}-t)^{\alpha-1}(y_{m+1}-s)^{\beta-1}|v(t,s)-v_{ij}|\,dt\,ds. \quad (3.5)$$

Для $(x,y)\in P_{ij}$

$$|v(x,y)-v_{ij}| \le |v(x,y)-v(x_i,y_j)| + |v(x_i,y_j)-v_{ij}| \le \omega(v;h,\tau) + |\delta_{ij}|, \quad (3.6)$$

где

$$\omega(v;h,\tau) = \sup\big\{|v(x,y)-v(\overline{x},\overline{y})| : (x,y),(\overline{x},\overline{y})\in\overline{P};$$
$$|x-\overline{x}|\le h, |y-\overline{y}|\le\tau\big\}$$

есть модуль непрерывности функции $v(x,y)$. Из (3.5) и (3.6) следует оценка

$$|u(x_{n+1}, y_{m+1}) - u_{n+1,m+1}| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}$$
$$\times\bigg(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}|\delta_{ij}|\left(x_{n-i+1}^{\alpha} - x_{n-i}^{\alpha}\right)\cdot\left(y_{m-j+1}^{\beta} - y_{m-j}^{\beta}\right) + a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot\omega(v;h,\tau)\bigg). \tag{3.7}$$

Из (3.5) с учётом оценки (3.7) вытекает, что

$$|\delta_{n+1,m+1}| \leq \frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}$$
$$\times\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}|\delta_{ij}|\left(x_{n-i+1}^{\alpha} - x_{n-i}^{\alpha}\right)\cdot\left(y_{m-j+1}^{\beta} - y_{m-j}^{\beta}\right) + B,$$

где

$$B = \frac{a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot\omega(v;h,\tau)\cdot K}{(1-L)\cdot\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}.$$

Отсюда согласно лемме 3.1

$$|\delta_{nm}| \leq B\cdot E_r\Big(\frac{Kx_n^{\alpha}y_m^{\beta}}{1-L}\Big) \leq B\cdot E_r\Big(\frac{Ka^{\alpha}b^{\beta}}{1-L}\Big). \tag{3.8}$$

Принимая во внимание оценки (3.7) и (3.8), получим, что

$$|u(x_{n+1}, y_{m+1}) - u_{n+1,m+1}|$$
$$\leq \frac{a^{\alpha}\cdot b^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}\bigg(B\cdot E_r\Big(\frac{Ka^{\alpha}b^{\beta}}{1-L}\Big) + \omega(v;h,\tau)\bigg). \tag{3.9}$$

Сходимость данного метода следует из оценок (3.8), (3.9), если учесть, что $B \to 0$, $\omega(v;h,\tau) \to 0$ при $h \to 0$, $\tau \to 0$.

Замечание 3.1. Если $F(x,y,u,z) : \overline{P}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условию Липшица и по переменным x и y, то можно доказать, что

$$|v(x_n, y_m) - v_{nm}| = O(h^{\alpha} + \tau^{\beta}), \qquad |u(x_n, y_m) - u_{nm}| = O(h^{\alpha} + \tau^{\beta})$$

при $h \to 0$, $\tau \to 0$.

Пример 3.1. Рассмотрим задачу Дарбу $(0 < \alpha, \beta \leq 1)$

$$\overline{D}_{\theta}^{r}u(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}u(x,y) + \frac{1}{6}\sin(\overline{D}_{\theta}^{r}u(x,y))$$
$$- \frac{x^{3\alpha}\cdot y^{3\beta}\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{4\cdot\Gamma(2\alpha)\cdot\Gamma(2\beta)} - \frac{1}{6}\sin(x^{\alpha}y^{\beta}), \tag{3.10}$$

$$u(x,0) = u(0,y) = 1, \quad 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1. \tag{3.11}$$

Для этой задачи

$$K = 1, \ L = \frac{1}{6}, \quad u(x,y) = 1 + \frac{x^{2\alpha} \cdot y^{2\beta} \cdot \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{4 \cdot \Gamma(2\alpha) \cdot \Gamma(2\beta)},$$

$$q_{1-r}(x,y) = \frac{x^{\alpha+1} \cdot y^{\beta+1}}{(\alpha+1) \cdot (\beta+1)},$$

$$\overline{D}^{\alpha}_{0x} u(x,y) = \frac{x^{\alpha} \cdot y^{2\beta}\Gamma(\beta)}{2 \cdot \Gamma(2\beta)}, \quad \overline{D}^{\beta}_{0y} u(x,y) = \frac{x^{2\alpha} \cdot y^{\beta}\Gamma(\alpha)}{2 \cdot \Gamma(2\alpha)},$$

$$\overline{D}^{r}_{\theta} u(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}.$$

Заметим, что при $\alpha = \beta = 1$ уравнение (3.10) сводится к уравнению

$$u_{xy}(x,y) = xy \cdot u(x,y) + \frac{1}{6}\sin(u_{xy}(x,y)) - \frac{x^3 y^3}{4} - \frac{1}{6}\sin(xy). \tag{3.12}$$

Решением задачи (3.12), (3.11) является функция $u(x,y) = 1 + \frac{x^2 y^2}{4}$. При $\alpha = \beta = 0.75$ и $N_1 = N_2 = 200$ в таблице 1 приведены значения u_{ij} и v_{ij} и их абсолютные погрешности для задачи (3.10), (3.11).

(x_i, y_j)	u_{ij}	$\lvert u(x_i, y_j) - u_{ij}\rvert$	v_{ij}	$\lvert v(x_i, y_j) - v_{ij}\rvert$
$(0.5; 0.5)$	1.05881	0.00094	0.35316	0.00039
$(0.5; 1)$	1.16688	0.00211	0.59314	0.00146
$(1; 1)$	1.47325	0.00474	0.99479	0.00521

Таблица 1.

Литература

[1] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск: Техника, 1987, 682 с.

[2] А. Н. Витюк, А. В. Михайленко, *Об одном классе дифференциальных уравнений дробного порядка* // Нелінійні коливання, **11** (2008), N 3, 293–304.

[3] А. Н. Витюк, *Существование решений дифференциальных включений с частными производными дробного порядка* // Изв. вузов. Математика, (1997), N 8, 13–19.

[4] S. Abbas, M. Benchohra, *Partial hyperbolic differential equations with finite delay involving the Caputo fractional derivative* // Commun. Math. Anal., **7** (2009), N 2, 62–77.

[5] S. Abbas, M. Benchohra, *Darboux problem for perturbed differential equations of fractional order with finite delay* // Nonlinear Anal.: Hybrid Systems, **3** (2009), 597–604.

[6] Gúnter Porath, *Über die Differentialgleichung* $z_{xy} = \Phi(x, y, z, z_{xy})$ // Mathem. Nachricht, **33** (1967), N 1/2, 73–89.

[7] S. Walczak, *Absolutely continuous functions of several variables and their application to differential equations* // Bull. Polish Acad. Sci. Math., **35** (1987), N 10–11, 733–744.

[8] T. Ważewski. *Sur un procédé de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des séries de comparison* // Bull. Acad. Polon, Sci., ser. math., astr. et phys., **8** (1960), N 1, 45–52.

[9] С. Д. Эйдельман, А. А. Чикрий, *Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка* // Укр. матем. журн., **52** (2000), N 11, 73–89.

Сведения об авторах

Александр Никанорович Витюк
Одесский национальный университет
им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2
65026, Одесса,
Украина
E-Mail: `vva@te.net.ua`

Анастасия Витальевна Михайленко
Одесский государственный
экономический университет
ул. Преображенская, 8
65000, Одесса,
Украина
E-Mail: `8012@mail.ru`