Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 2, 212 – 219

Діагоналізація матриць над областю головних ідеалів з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta),\ \alpha \neq \beta$

Володимир М. Прокіп

(*Представлена І. В. Протасовим*)

Анотація. Отримано необхідні та достатні умови діагоналізації матриць над областю головних ідеалів з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), \alpha \neq \beta$. На підставі отриманих результатів вказано умови, за яких матриці мають спільні власні вектори.

2010 MSC. 15A18, 15A21, 15A36.

Ключові слова та фрази. Область головних ідеалів, діагоналізація матриці, власний вектор.

1. Вступ

Нехай R область головних ідеалів з одиницею $e \neq 0$. Введемо позначення: I_n — одинична $n \times n$-матриця; O — нульова матриця, вимірність якої визначатиметься з контексту; $M_{m,n}(\mathrm{R})$ — множина $(m \times n)$-матриць над областю головних ідеалів R. Якщо $m = n$, то кільце $(n \times n)$-матриць над R позначатимемо через $M_n(\mathrm{R})$.

Кажуть, що матриця $A \in M_n(\mathrm{R})$ є діагоналізованою, якщо вона перетворенням подібності зводиться до діагонального вигляду, тобто для A існує матриця $U \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що

$$UAU^{-1} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in M_n(\mathrm{R})$$

— діагональна матриця. З цієї рівності випливає, якщо матриця $A \in M_n(\mathrm{R})$ діагоналізована, то її характеристичний многочлен $a(\lambda)$ допускає зображення у вигляді добутку

$$a(\lambda) = \det(I_n\lambda - A) = (\lambda - \alpha_1)^{k_1}(\lambda - \alpha_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \alpha_r)^{k_r},$$

Стаття надійшла в редакцію 20.03.2009

ISSN 1810 – 3200.

де $\alpha_i \in \mathrm{R}$, $i = 1, 2, \ldots, r$; і $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Очевидно, якщо $A \in M_n(\mathrm{R})$ — діагоналізована матриця, то її мінімальний многочлен $m(\lambda)$ не має кратних коренів, тобто $m(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \cdots (\lambda - \alpha_r)$. Якщо ж $\mathrm{R} = \mathrm{F}$ — поле, то остання умова є необхідною та достатньою для діагоналізації матриці A над полем F. Легко переконатися в тому, що ця умова не є достатньою для діагоналізації матриць над комутативними кільцями з одиницею (і над областю головних ідеалів R, зокрема).

По аналогії з умовами діагоналізованості матриць над полем в [1] доведено, що матриця $A \in M_n(\mathrm{R})$ діагоналізована тоді і тільки тоді, коли для неї існує n різних власних векторів $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n \in M_{1,n}(\mathrm{R})$, які відповідають власним значенням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, таких, що вони є базою R-модуля $M_{1,n}(\mathrm{R})$. З практичної точки зору це є трудомісткою задачею і на даний час не встановлено умов такого існування. В роботі [2] вказано необхідні та достатні умови діагоналізації матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ у випадку, коли її характеристичний многочлен $a(\lambda)$ має n різних власних значень $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

У даній роботі розглядається задача про діагоналізованість матриць із $M_n(\mathrm{R})$ з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, де $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ і $\alpha \neq \beta$. На підставі здобутих результатів вказано умови, за яких для матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ існують спільні власні вектори. Зауважимо, що здобуті результати справедливі для матриць над областями елементарних дільників. Крім цього, деякі з них можуть бути поширені для матриць над ID-кільцями [3], тобто над комутативними кільцями з одиницею, над якими ідемпотентна матриця діагоналізується. Разом з тим залишається відкритою задача про класифікацію не діагоналізованих матриць над областю головних ідеалів з мінімальним квадратичним многочленом відносно перетворень подібності. Відзначимо, що для матриць над полем така задача досліджувалася в роботі [5].

2. Діагоналізованість матриць з мінімальним квадратичним многочленом

Нехай $A \in M_n(\mathrm{R})$ — ідемпотентна матриця рангу k, тобто $A^2 = A$ і $\operatorname{rank} A = k$. Очевидно, що $m(\lambda) = \lambda(\lambda - e)$ — мінімальний многочлен ідемпотентної матриці. В [3] доведено (див. також [4]), що ідемпотентна матриця $A \in M_n(\mathrm{R})$ діагоналізується, тобто для A існує матриця $U \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що $UAU^{-1} = \operatorname{diag}(I_k, O)$. Нижче опишемо структуру діагоналізованих матриць із $M_n(\mathrm{R})$ з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, де $\alpha \neq \beta$.

Теорема 2.1. *Нехай* $A \in M_n(\mathrm{R})$ *— матриця з характеристичним многочленом*

$$\det(I_n\lambda - A) = (\lambda-\alpha)^k(\lambda-\beta)^{n-k}, \quad \alpha,\beta \in R,\ \alpha\neq\beta;\ 1\le k<n.$$

Матриця A *діагоналізується, тобто для* A *існує матриця* $T \in GL(n,R)$ *така, що*

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha I_k & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \beta I_{n-k} \end{bmatrix},$$

тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

а) $m(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ *— мінімальний многочлен матриці* A*;*

б) $(A-\alpha I_n) = \mathrm{O}(\mathrm{mod}\ (\beta-\alpha))$.

Доведення. Необхідність. Нехай $A \in M_n(\mathrm{R})$ — матриця з характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - A) = (\lambda-\alpha)^k(\lambda-\beta)^{n-k}$, де $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$, $\alpha\neq\beta$ і $1\le k<n$, діагоналізується, тобто

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha I_k & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \beta I_{n-k} \end{bmatrix},$$

де $T \in GL(n,R)$. Очевидно, що $m(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ — мінімальний многочлен матриці A. Тоді

$$\begin{aligned} A-\alpha I_n &= T^{-1}\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & (\beta-\alpha)I_{n-k} \end{array}\right]T \\ &= T^{-1}\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & I_{n-k} \end{array}\right]T(\beta-\alpha) = \mathrm{O}(\ \mathrm{mod}\ (\beta-\alpha)). \end{aligned}$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $A \in M_n(\mathrm{R})$ — матриця з характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - A) = (\lambda-\alpha)^k(\lambda-\beta)^{n-k}$, де $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$, $\alpha\neq\beta$ і $1\le k<n$. Так як $A-\alpha I_n = \mathrm{O}(\ \mathrm{mod}\ (\beta-\alpha))$, то $A - I_n\alpha = (\beta-\alpha)P$, де $P \in M_n(\mathrm{R})$.

Оскільки $m(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ — мінімальний многочлен матриці A, то

$$m(A) = (\alpha I_n - A)(\beta I_n - A) = (\beta-\alpha)^2(P^2-P) = \mathrm{O}.$$

Із цієї рівності отримуємо, що P — ідемпотентна матриця. Оскільки матриця A допускає зображення у вигляді $A = I_n\alpha + (\beta-\alpha)P$, де P — діагоналізована матриця, то очевидно, що A перетворенням подібності зводиться до виду $\begin{bmatrix} \alpha I_k & 0 \\ 0 & \beta I_{n-k} \end{bmatrix}$. Теорему доведено. □

Наслідок 2.1. *Нехай $A \in M_n(\mathrm{R})$ — матриця з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, де $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ і $\alpha \neq \beta$. Якщо $(\alpha - \beta)$ — дільник одиниці в R, то матриця A діагоналізується.*

Наслідок 2.2. *Нехай $A \in M_n(\mathrm{R})$ — діагоналізована матриця з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, де $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ і $\alpha \neq \beta$. Тоді для матриці A існує єдина пара ідемпотентних матриць $P_\alpha, P_\beta \in M_n(\mathrm{R})$ таких, що*

а) $A = I_n\alpha + (\beta - \alpha)P_\beta$;

б) $A = I_n\beta + (\alpha - \beta)P_\alpha$;

в) $P_\alpha + P_\beta = I_n$;

г) $A = \alpha P_\alpha + \beta P_\beta$.

Доведення. Нехай $A \in M_n(\mathrm{R})$ — діагоналізована матриця з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, $\alpha \neq \beta$. Із доведення достатності теореми 2.1 випливає, що матриця A допускає зображення у вигляді

$$A = I_n\alpha + (\beta - \alpha)P_\beta, \tag{2.1}$$

де $P_\beta \in M_n(\mathrm{R})$ — ідемпотентна матриця. Очевидно, що $P_\alpha = I_n - P_\beta$ — ідемпотентна матриця. Так як $P_\beta = I_n - P_\alpha$, то рівність (2.1) перепишемо так

$$A = I_n\alpha + (\beta - \alpha)(I_n - P_\beta) = I_n\beta + (\alpha - \beta)P_\alpha.$$

Враховуючи те, що $P_\alpha + P_\beta = I_n$, тепер рівність (2.1) запишемо у вигляді

$$A = (P_\alpha + P_\beta)\alpha + (\beta - \alpha)P_\beta = \alpha P_\alpha + \beta P_\beta.$$

Припустимо, що для матриці A існує ще одна пара ідемпотентних матриць $\{Q_\alpha, Q_\beta\} \in M_n(\mathrm{R})$, яка відмінна від пари $\{P_\alpha, P_\beta\}$, для якої виконуються умови: $Q_\alpha + Q_\beta = I_n$ і $A = \alpha Q_\alpha + \beta Q_\beta$. Отже,

$$A = I_n\alpha + (\beta - \alpha)P_\beta = I_n\alpha + (\beta - \alpha)Q_\beta.$$

Так як $\alpha \neq \beta$, то з останньої рівності випливає $P_\beta = Q_\beta$. Аналогічно доводиться, що $P_\alpha = Q_\alpha$. Наслідок доведено. $\square$

3. Спільні власні вектори діагоналізованих матриць з мінімальними квадратичними многочленами

Кажуть, що матриці $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ мають спільний лівий власний вектор, якщо для них існує вектор $\bar{u} \in M_{1,n}(\mathrm{R})$ такий, що $\bar{u}A = \bar{u}\alpha$ і $\bar{u}B = \bar{u}\beta$, де $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$. Аналогічно вводиться поняття спільного правого власного вектора матриць A і B. Очевидно, якщо матриці A і B мають спільний лівий власний вектор, то вони мають спільний правий власний вектор. Надалі під терміном "спільний власний вектор" матриць A і B будемо розуміти, що A і B мають спільний лівий власний вектор. Зі сказаного вище випливає, що матриці A і B над областю R можуть мати спільний власний вектор, лише у випадку, коли їхні характеристичні многочлени $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ допускають зображення у вигляді $a(\lambda) = (\lambda - \alpha)c(\lambda)$ і $b(\lambda) = (\lambda - \beta)d(\lambda)$. Відзначимо, якщо ж $\mathrm{R} = \mathrm{F}$ — поле, то задача про наявність у матриць $A, B \in M_n(\mathrm{F})$ спільного власного вектора була розв'язана порівняно недавно [7] (див. також [8, 9]).

Використовуючи результати попереднього розділу вкажемо умови існування спільних власних векторів для діагоналізованих матриць над R з мінімальним квадратичним многочленом. Надалі через $\big[A, B\big]$ будемо позначати комутатор матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$, тобто $\big[A, B\big] = AB - BA$.

Теорема 3.1. *Ідемпотентні матриці $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ мають спільний власний вектор тоді і тільки тоді, коли комутатор $\big[A, B\big]$ — особлива матриця.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\bar{u} \in M_{1,n}(\mathrm{R})$ — спільний власний вектор матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$, тобто $\bar{u}A = \bar{u}\alpha$ і $\bar{u}B = \bar{u}\beta$, де $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$. Тоді

$$\begin{aligned}\bar{u}\big[A, B\big] &= \bar{u}(AB - BA) \\ &= \bar{u}AB - \bar{u}BA = \alpha\bar{u}B - \beta\bar{u}A \\ &= \bar{u}I_n(\alpha\beta - \beta\alpha) = O.\end{aligned}$$

Оскільки $\bar{u}$ — ненульовий вектор із $M_{1,n}(\mathrm{R})$, то з останньої рівності випливає, що комутатор $\big[A, B\big]$ — особлива матриця. Необхідність доведено.

Достатність. Якщо одна з матриць A або B є одиничною або нульовою, то очевидно, що матриці A і B мають спільний власний вектор.

Надалі вважатимемо, що $1 \le \operatorname{rank} A = k < n$ і $1 \le \operatorname{rank} B < n$. Оскільки A — ідемпотентна матриця, то для A існує матриця $T \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що

$$TAT^{-1} = D = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad TBT^{-1} = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

де $C_{11} \in M_k(\mathrm{R})$, $C_{12} \in M_{k,n-k}(\mathrm{R})$, $C_{21} \in M_{n-k,k}(\mathrm{R})$, $C_{22} \in M_{n-k}(\mathrm{R})$. Так як $B^2 = B$, то $C^2 = C$. З останньої рівності здобуваємо

$$C_{11}C_{11} + C_{12}C_{21} = C_{11}, \tag{3.1}$$

$$C_{11}C_{12} + C_{12}C_{22} = C_{12}, \tag{3.2}$$

$$C_{21}C_{11} + C_{22}C_{21} = C_{21}, \tag{3.3}$$

$$C_{21}C_{12} + C_{22}C_{22} = C_{22}. \tag{3.4}$$

Очевидно, що матриці A і B мають спільний власний вектор тоді і тільки тоді, коли матриці D і C мають спільний власний вектор. Враховуючи сказане вище отримуємо $\operatorname{rank}\big[A, B\big] = \operatorname{rank}\big[D, C\big] < n$. Крім цього, легко бачити, що

$$[D, C] = \begin{bmatrix} O & C_{12} \\ -C_{21} & O \end{bmatrix}.$$

Так як $\operatorname{rank}\big[D, C\big] < n$, то для матриці $[D, C]$ виконується принаймі одна з умов: $\operatorname{rank} C_{12} < k$ або $\operatorname{rank} C_{21} < n - k$.

А) Нехай $\operatorname{rank} C_{12} < k$. Тоді виконується одна з умов: $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} < k$ або $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} = k$.

Якщо $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} < k$, то існує ненульовий вектор $\bar{u} \in M_{1,k}(\mathrm{R})$ такий, що $\bar{u}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} = \bar{0}$ — нульовий вектор. Отже, вектор $\begin{bmatrix} \bar{u} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathrm{R})$ є спільним лівим власним вектором матриць D і C.

Нехай $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} = k$. Оскільки $\operatorname{rank} C_{12} < k$, то існує ненульовий вектор $\bar{u} \in M_{1,k}(\mathrm{R})$ такий, що $\bar{u}C_{12} = \bar{0}$ і $\bar{u}C_{11} \ne \bar{0}$. Враховуючи рівність (3.1), здобуваємо, що $(\bar{u}C_{11})\, C_{11} = \bar{u}C_{11}$. На підставі рівності (3.2) отримуємо $(\bar{u}C_{11})\, C_{12} = \bar{0}$. Отже, вектор $\begin{bmatrix} \bar{u}C_{11} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathrm{R})$ є спільним лівим власним вектором матриць D і C.

Б) Нехай $\operatorname{rank} C_{21} < n - k$. Тоді виконується одна з умов: $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} < n - k$ або $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = n - k$. Якщо $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} < n - k$, то для матриці $\begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ існує ненульовий вектор $\bar{u} \in M_{1,n-k}(\mathrm{R})$ такий, що $\bar{u}\begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = O$. Отже, вектор $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \bar{u} \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathrm{R})$ є спільним лівим власним вектором матриць D і C.

Нехай $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = n-k$. Тоді існує ненульовий вектор $\bar{u} \in M_{1,n-k}(\mathrm{R})$ такий, що $\bar{u}C_{21} = \bar{0}$ і $\bar{u}C_{22} \neq O$. На підставі рівності (3.4), здобуваємо $(\bar{u}C_{22})\,C_{22} = \bar{u}C_{22}$. Враховуючи рівність (3.3) отримуємо $(\bar{u}C_{22})\,C_{21} = \bar{0}$. Отже, вектор $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \bar{u}C_{22} \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathrm{R})$ є спільним лівим власним вектором матриць D і C. Теорему доведено. □

Наслідок 3.1. *Нехай $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ — діагоналізовані матриці з мінімальними многочленами $m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$ та $m_B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)$, відповідно, де $\alpha_i, \beta_i \in \mathrm{R}$ і $\alpha_1 \neq \alpha_2$ та $\beta_1 \neq \beta_2$. Матриці A і B мають спільний власний вектор тоді і тільки тоді, коли комутатор $\big[A, B\big]$ — особлива матриця.*

Доведення. Оскільки $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ — діагоналізовані матриці з мінімальними многочленами $m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$ та $m_B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)$, відповідно, то згідно наслідку 2.2 для матриць A і B існують ідемпотентні матриці $P, Q \in M_n(\mathrm{R})$ такі, що

$$A = I_n\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)P \quad \text{і} \quad B = I_n\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)Q.$$

Отже, матриці A і B мають спільний власний вектор тоді і тільки тоді, коли ідемпотентні матриці P і Q мають спільний власний вектор. Оскільки $(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) \neq 0$, то легко перевірити, що $\operatorname{rank}\big[A, B\big] = \operatorname{rank}\big[P, Q\big]$. Наслідок доведено. □

Література

[1] R. B. Richter and W. P. Wardlaw, *Diagonalization over commutative rings* // Amer. Math. Monthly, **97** (1990), N 3, 223–227.

[2] V. Prokip, *On similarity of matrices over commutative rings* // Linear Algebra and Appl., **399** (2005), 225–233.

[3] A. Steger, *Diagonability of idempotent matrices* // Pacific Journal of Math., **19**, (1966), N 3, 535–542.

[4] П. Кон, *Свободные кольца и их связи*, М.: Мир, 1975, 422 с.

[5] В. М. Бондаренко, *Классификация линейных операторов с минимальным полиномом $f(t) = (t - a)(t - b)$, $a \neq b$, действующих в фильтрованном векторном пространстве* // Нелінійні коливання, **3** (2000), N 1, 31–35.

[6] M. Newman, *Integer Matrices*, Acad. Press, New York, 1972, 226 p.

[7] D. Shemesh, *Common eigenvectors of two matrices* // Linear Algebra and Appl., **62** (1984), 11–18.

[8] A. George and Kh. D. Ikramov, *Common invariant subspaces of two matrices* // Linear Algebra and Appl., **287** (1999), 171–179.

[9] M. Tsatsomeros, *A criterion for the existence of common invariant subspaces of matrices* // Linear Algebra and Appl., **322** (2001), 51–59.

Відомості про авторів

Володимир М. Прокіп

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України,
вул. Наукова 3б,
Львів, 79060
Україна
E-Mail: vprokip@mail.ru