Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 2, 176 – 196

К вопросу о мультипликаторах в L^1 и C

Михаил З. Двейрин

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В статье выясняется связь между теоремами о мультипликаторах Белинского–Двейрина–Маламуда и некоторыми другими ранее известными теоремами о мультипликаторах в пространствах L^1 и C. Показано, что теорема Белинского–Двейрина–Маламуда может быть получена из них. Приведены также соответствующие примеры мультипликаторов в пространствах L^1 и C, показывающие неравносильность сравниваемых теорем.

2010 MSC. 42A35, 42A48.

Ключевые слова и фразы. Мультипликатор, преобразование Фурье, суммируемость преобразования Фурье, пространство L^1, пространство C.

Введение

Хорошо известно (см. [2–4, 6, 13]), что теорема Михлина–Лизоркина о мультипликаторах в L^p, $1 < p < \infty$, играет существенную роль в теории дифференциальных операторов в L^p. В недавней работе [1] доказана теорема (см. ниже теорему 1.2) о мультипликаторах в шкале L^p при $p \in [1, \infty]$, которую можно рассматривать как аналог теоремы Михлина–Лизоркина [7, 11].

Эта теорема столь же удобна для применений в теории дифференциальных операторов, действующих в $C(\mathbb{R}^n)$ или $L^1(\mathbb{R}^n)$, сколь и теоремы Михлина и Лизоркина в применении к операторам, действующим в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1, \infty)$. Причина этого в том, что возникающие здесь мультипликаторы — это, как правило, рациональные функции вещественных переменных. Более того, теорема 1.2 уже нашла применения как к оценкам для систем дифференциальных мономов $\{D^\alpha\}_{\alpha \in A}$, так и для систем квазиэллиптических операторов, действующих в $L^1(\mathbb{R}^n)$ (см. [1]). Отметим также, что в недавней работе

Статья поступила в редакцию 13.08.2009
Считаю своим долгом выразить признательность М. М. Маламуду за полезные обсуждения.

ISSN 1810 – 3200.

(см. [9]) теорема 1.2 была использована для описания систем слабо коэрцитивных, но не эллиптических операторов в $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $C(\mathbb{R}^n)$.

С другой стороны, в ряде работ (см. [3,8,14,15] и литературу в [2]) получены результаты типа теоремы Бернштейна о суммируемости преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}\Phi$ функции Φ, которые сформулированы в других терминах. В связи с этим возникает вопрос о соотношении достаточных условий, полученных в работах разных авторов. В настоящей заметке приводится вывод теоремы 1.2 из некоторых ранее известных теорем и приведены примеры, показывающие их неравносильность (формулировки и соответствующие ссылки будут приведены далее после введения необходимых обозначений).

Обозначения

$\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей), $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$; $\mathbb{N}_\alpha$ ($\subset \{1, 2, \ldots, n\}$) — носитель мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ($\in \mathbb{Z}_+^n$), т. е. множество индексов $j \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\alpha_j > 0$. Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$; для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ полагают $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$.

1. Некоторые сведения о мультипликаторах в пространствах L^p

1.1. Мультипликаторы в L^p

Как обычно, преобразование Фурье $\mathcal{F}(\mu)$ ($\mathcal{F}(\phi)$) конечной борелевской меры $\mu(\in BV(\mathbb{R}^n))$ (функции $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$) определяется равенством

$$\begin{aligned} (\Phi(\mu))(x) &:= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} d\mu(t) \ \ (=: \hat{\mu}(x)), \\ (\Phi(\phi))(x) &:= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} \phi(t)\, dt, \end{aligned} \tag{1.1}$$

в котором $\langle t, x\rangle := t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$ — скалярное произведение векторов $t,\ x \in \mathbb{R}^n$. Преобразование Фурье расширяется на класс Шварца $\mathcal{S}'$ медленно растущих распределений (см. [3, 13]). Именно, для $\Phi \in \mathcal{S}'$ полагают

$$(\mathcal{F}\Phi)(\phi) := \hat{\Phi}(\phi) := \Phi(\hat{\phi}), \qquad \phi \in \mathcal{S},$$

где $\mathcal{S}$ — это класс Шварца основных функций.

Определение 1.1. *Пусть $\mathcal{S}$ — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} := \mathcal{F}f$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называют мультипликатором в L^p (или мультипликатором из L^p в L^p), если оператор свертки $f \to T_\Phi f =: \mathcal{F}^{-1}\Phi\mathcal{F}f$ отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Совокупность всех мультипликаторов из L^p в L^p обозначается $\mathcal{M}_p$. Хорошо известно ([6, 13]), что T_Φ — оператор свертки с обобщенной функцией $u \in S'$ медленного роста, $T_\Phi f = u * f$, и $\Phi = \hat{u}$. При каждом $p \in [1, \infty]$ пространство $\mathcal{M}_p$ является банаховой алгеброй, в которой норма элемента Φ определяется равенством $\|\Phi\|_{\mathcal{M}_p} := \|T_\Phi\|_{L^p \to L^p}$. Простое описание пространств $\mathcal{M}_p$ известно лишь при $p = 1, 2, \infty$. Так, алгебра $\mathcal{M}_2$ изометрически отождествляется с $L^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\|\Phi\|_{\mathcal{M}_2} = \|\Phi\|_{L^\infty}$, и, значит, $\mathcal{M}_2 \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Для остальных значений $p \in (1, \infty)$ известны лишь достаточные условия включения $\Phi \in \mathcal{M}_p$ (см. [4, 6, 13]). Одними из наиболее полезных и употребительных в теории дифференциальных операторов и в теории сингулярных интегральных уравнений являются теоремы Михлина [11] и Лизоркина [7] (см. также [3]). Приведем вторую из них.

Теорема 1.1 ([7]). *Пусть $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и непрерывна на множестве*

$$\mathbb{R}^n_* = \{x : x \in \mathbb{R}^n,\ x_i \neq 0,\ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

вместе с производными $D^\alpha\Phi$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_2 := \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$. Если

$$\sup\{|x^\alpha D^\alpha \Phi| :\ x \in \mathbb{R}^n_*,\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_2\} = A < \infty, \tag{1.2}$$

то $\Phi \in \mathcal{M}_p$ при $p \in (1, \infty)$ и $\|\Phi\|_{\mathcal{M}_p} \leq C_{p,n}A$, где константа $C_{p,n}$ не зависит от Φ.

Теорема 1.1 доказана Лизоркиным [7]. Условия Михлина получаются заменой в (1.2) x^α на $|x|^{|\alpha|}$. Так как $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$, то теорема Лизоркина обобщает теорему Михлина [3, 11]. Обе теоремы выводятся из теоремы Марцинкевича о множителях (см. [13]).

1.2. Мультипликаторы в L^1 и L^∞

Хорошо известно ([13]), что $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty = B(\mathbb{R}^n) := \mathcal{F}\big(BV(\mathbb{R}^n)\big)$, где $BV(\mathbb{R}^n)$ — пространство конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$. Другими словами, $\Phi \in \mathcal{M}_1 = B(\mathbb{R}^n)$, если Φ является преобразованием Фурье меры $\mu \in BV(\mathbb{R}^n)$, т. е. допускает представление (1.1), при этом отображение $\mathcal{F} :\ BV(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}_1$ — изометрическое, т. е.

$$\|\mathcal{F}(\mu)\|_{\mathcal{M}_1} = \|\mathcal{F}(\mu)\|_{\mathcal{M}_\infty} = \|\mu\| := Var(\mu),$$

где $Var(\mu)$ — полная вариация меры μ.

1.3. Некоторые теоремы о мультипликаторах в L^1

В недавней работе [1] доказана следующая теорема о мультипликаторах в L^1 и, значит, — во всей шкале L^p, $p \in [1, \infty]$ (здесь она приводится в эквивалентной формулировке, более удобной для применений).

Теорема 1.2 ([1]). *Пусть $\Phi \in C(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1. *для всех мультииндексов $\alpha \in \mathbb{Z}_2^n$ существуют (классические) производные $D^\alpha \Phi$ и*
$$\lim_{|x_j| \to \infty} |D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \Phi(x_1, \dots, x_n)| = 0, \quad 1 \le j \le n;$$
2. *смешанная производная $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ существует и с некоторыми постоянными $\delta \in (0;1)$ и $A_\delta > 0$ удовлетворяет условию*
$$\prod_{j=1}^{n} |x_j|^{1-\delta} \left(1 + |x_j|^{2\delta}\right) |D_1 \cdots D_n \Phi(x_1, \dots, x_n)| \le A_\delta.$$

Тогда $\Phi \in M_1$ (и, значит, $\Phi \in M_p$ для $p \in [1;\infty]$) и верна оценка $\|\Phi\|_{M_1} \le C_1 A_\delta$ с некоторой постоянной C_1, не зависящей от Φ и δ. Иначе говоря,
$$\|T_\Phi f\|_{L_p} \le C_1 A_\delta \|f\|_{L_p}, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^n),\ p \in [1;\infty],$$
где C_1 не зависит от f, Φ.

Более того, из доказательства теоремы 1.2 вытекает, что $\mathcal{F}^{-1}\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, т.е. Φ является (классическим) преобразованием Фурье суммируемой функции.

Для формулировки следующей теоремы введем еще некоторые обозначения. Следуя [3], обозначим через $C_0 b_{2,1}^{\langle \mathbf{1}/2 \rangle} = C_0 b_{2,1}^{\langle \mathbf{1}/2 \rangle}(\mathbb{R}^n)$ пространство непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности и имеющих конечную норму
$$\|\Phi|\ C_0 b_{2,1}^{\langle \mathbf{1}/2 \rangle}\| = \|\Phi\|_{C_0(\mathbb{R}^n)} + \|\Phi|\ b_{2,1}^{\langle \mathbf{1}/2 \rangle}\|,$$
где $\| \cdot |\ b_{2,1}^{\langle \mathbf{1}/2 \rangle}\|$ — полунорма, определяемая равенством
$$\|\Phi|\ b_{2,1}^{\langle \mathbf{1}/2 \rangle}\| := \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \|\Delta_{t_1} \cdots \Delta_{t_n} \Phi(x_1, \dots, x_n)\|_{L_2} \frac{dt_1}{t_1^{3/2}} \cdots \frac{dt_n}{t_n^{3/2}}. \quad (1.3)$$

Здесь $\Delta_{t_i}\Phi(x_1,\dots,x_n) := \Phi(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+t_i,x_{i+1},\dots,x_n) - \Phi(x_1,\dots,x_n)$ — первая разность $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ по переменной x_i с шагом t_i.

Теорема 1.3. *Пусть $f \in C_0 b_{2,1}^{\langle \mathbf{1}/2\rangle}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{F}^{-1}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка*

$$\|\mathcal{F}^{-1}f\|_1 \le C\|f|b_{2,1}^{\langle \mathbf{1}/2\rangle}(\mathbb{R}^n)\|$$

с константой $C > 0$, не зависящей от f.

Теорема 1.4. *Если для любого $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\Phi(x) = \int\limits_{|x_j|\leqslant|u_j|<\infty} g(u)\,du, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname*{ess\,sup}_{|v_j|\leqslant|u_j|}|g(u)|\,dv < \infty,$$

то $\Phi \in A(\mathbb{R}^n)$ ($A(\mathbb{R}^n)$ — алгебра функций с абсолютно сходящимся интегралом Фурье).

Теорема 1.5. *Пусть $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, т.е. непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и стремится к нулю на бесконечности.*

1. *Если*

$$\sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{s_n=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n s_j}\,\|\Delta_{t_1}\dots\Delta_{t_n}f(x_1,\dots,x_n)\|_{L_2} < \infty,$$

где $t_j = \frac{\pi}{2^{s_j}}$ $(j = 1,\dots,n)$, то $f \in A(\mathbb{R}^n)$.

2. *Если $f = \hat{g}$ с $g \in L(\mathbb{R}^n)$ и при $|u_j| \ge |v_j|$, $\operatorname{sign} u_j = \operatorname{sign} v_j$ $(1 \le j \le n)$ выполняется неравенство $|g(u)| \le |g(v)|$, то ряд в пункте 1 теоремы сходится.*

Теоремы 1.4 и 1.5 получены Р. М. Тригубом и опубликованы в [14] в 1980 г. (см. также монографию [15]). Теорема 1.3 опубликована О. В. Бесовым в 1986г. и представляет собой непрерывный аналог теоремы Р. М. Тригуба 1.5. Более обстоятельное изложение истории вопроса можно найти в обзоре [18] и дополняющей его статье обзорного характера [16], содержащей также новые условия того, что Φ является преобразованием Фурье суммируемой функции.

2. Вывод теоремы 1.2 из теоремы 1.3

Мы покажем, что теорема 1.2 может быть получена из теоремы 1.3 ([3, теорема 3]), ограничиваясь случаем $n = 2$. Для этого достаточно установить, что из условий, накладываемых на $\Phi(x_1,x_2)$ в теореме 1.2, следует, что

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \|\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(x_1,x_2)\|_{L_2}\,\frac{dt_1}{t_1^{3/2}}\frac{dt_2}{t_2^{3/2}}<\infty.$$

Введем функции $\Phi_{\pm}(x_1,x_2) := \Phi(x_1,-x_2)$, $\Phi_{\mp}(x_1,x_2) := \Phi(-x_1,x_2)$, $\Phi_{=}(x_1,x_2) := \Phi(-x_1,-x_2)$. Очевидно, что для них также выполнены условия теоремы 1.2. Положим

$$\phi(t_1,t_2) := \|\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(x_1,x_2)\|_{L_2}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2$$

$$=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty+\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^\infty+\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^0+\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_{-\infty}^0 =: I_1+I_2+I_3+I_4. \qquad (2.1)$$

Для доказательства теоремы 1.2 нам нужно оценить $\phi(t_1,t_2)$, для чего мы будем оценивать слагаемые в правой части равенства (2.1). Для удобства изложения приведем оценки некоторых вспомогательных интегралов в виде простых лемм.

Лемма 2.1. *Пусть* $t>0,\ x\in[0;t],\ \delta\in(0;1)$. *Тогда*

$$I := \int\limits_0^t \frac{du}{|u-x|^{1-\delta}\,(1+|u-x|^{2\delta})} \le \begin{cases} C(\delta), & t\ge 1;\\ C(\delta)t^\delta, & 0<t<1.\end{cases}$$

Доказательство.

$$I=\int\limits_{-x}^{t-x}\frac{du}{|u|^{1-\delta}(1+|u|^{2\delta})}\le\int\limits_{-t}^{t}\frac{du}{|u|^{1-\delta}(1+|u|^{2\delta})}.$$

При $t\ge 1$

$$I\le 2\int\limits_0^\infty\frac{du}{u^{1-\delta}(1+u^{2\delta})} =: C_1(\delta)<\infty.$$

Далее, $I \le 2\int_0^t u^{-1+\delta}du = 2\delta^{-1}t^\delta$ при $t\in(0,1)$. Полагая $C(\delta) = \min\left\{C_1(\delta),2\delta^{-1}\right\}$ и объединяя оценки, получим требуемое. □

Лемма 2.2. *Пусть* $t>0,\ x>0$ *и* $\delta\in(0;1)$. *Тогда*

$$I=:\int\limits_0^t\frac{du}{(u+x)^{1-\delta}(1+(u+x)^{2\delta})}\le\begin{cases}C(\delta)x^{-\delta}, & x\ge 1;\\ C(\delta), & 0<x<1.\end{cases}$$

Доказательство.

$$I = \int\limits_x^{x+t} \frac{du}{u^{1-\delta}(1+u^{2\delta})} < \int\limits_x^{x+t} \frac{du}{u^{1+\delta}} < \frac{1}{\delta} x^{-\delta}. \tag{2.2}$$

При $x \in (0;1)$

$$I \leq \int\limits_x^1 \frac{du}{u^{1-\delta}} + \int\limits_1^\infty \frac{du}{u^{1+\delta}} < \frac{2}{\delta}. \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) получаем требуемое. □

Лемма 2.3. *Пусть* $t \in (0;1]$, $\delta \in (0;1)$, $x \in [0;t]$. *Тогда*

$$\int\limits_0^t \frac{du}{|u-x|^{1-\delta}} \leq \frac{2}{\delta} t^\delta.$$

Лемма 2.4. *Пусть* $t > 0$, $\delta \in (0;1)$. *Тогда*

$$\int\limits_0^t \frac{dx}{(1+x)^\delta} \leq \begin{cases} C, & t \leq 1; \\ Ct^{1-\delta}, & t > 1. \end{cases}$$

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. 1. Оценим I_1, рассматривая отдельно случаи

(a) $t_1 \leq 1$, $t_2 \leq 1$;

(b) $t_1 \leq 1, t_2 \geq 1$;

(c) $t_1 \geq 1, t_2 \leq 1$;

(d) $t_1 \geq 1, t_2 \geq 1$.

(a) В этом случае мы получим

$$I_1 := \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(x_1,x_2)|^{1-\delta} \cdot |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(x_1,x_2)|^{1+\delta}\, dx_1\, dx_2$$

$$\leq \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left[\frac{4A_\delta}{(1+x_1)^\delta(1+x_2)^\delta}\right]^{1-\delta}$$

$$\times \left| \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \Phi''_{x_1x_2}(x_1+u_1, x_2+u_2)\,du_1\,du_2 \right|^{1+\delta} dx_1\,dx_2$$

$$\le (4A_\delta)^{1-\delta} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{((1+x_1)(1+x_2))^{\delta(1-\delta)}}$$

$$\times \left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \frac{A_\delta\,dt_1\,dt_2}{(x_1x_2)^{1-\delta}(1+x_1^{2\delta})(1+x_2^{2\delta})} \right)^{1+\delta} dx_1\,dx_2$$

$$= 4^{1-\delta}A_\delta^2(t_1t_2)^{1+\delta} \left(\int_0^\infty \frac{dx_1}{x_1^{1-\delta^2}(1+x_1)^{\delta-\delta^2}(1+x_1^{2\delta})^{1+\delta}} \right)^2$$

$$\le C_1A_\delta^2(t_1t_2)^{1+\delta}. \quad (2.4)$$

(b) Пусть $t_1 \le 1,\ t_2 \ge 1$. Тогда

$$I_1 = \int_0^\infty\int_0^\infty |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(x_1,x_2)|^{1-\delta}$$

$$\times \left| \int_0^{t_1} \left[\Phi'_{x_1}(x_1+u_1, x_2+t_2) - \Phi'_{x_1}(x_1+u_1, x_2)\right] du_1 \right|^{2\delta}$$

$$\times \left| \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \Phi''_{x_1x_2}(x_1+u_1, x_2+u_2)\,du_1\,du_2 \right|^{1-\delta} dx_1\,dx_2$$

$$\le \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(4A_\delta)^{1-\delta}}{((1+x_1)(1+x_2))^{\delta-\delta^2}} \frac{t_1^{2\delta}(2A_\delta)^{2\delta}}{\left(x_1^{1-\delta}(1+x_1^{2\delta})(1+x_2^{\delta})\right)^{2\delta}}$$

$$\times \frac{(t_1t_2)^{1-\delta}\cdot A_\delta^{1-\delta}}{\left((x_1x_2)^{1-\delta}(1+x_1^{2\delta})(1+x_2^{2\delta})\right)^{1-\delta}}\,dx_1\,dx_2$$

$$\le C_2(\delta)A_\delta^2 t_1^{1+\delta}t_2^{1-\delta}. \quad (2.5)$$

(c) В случае $t_1 \ge 1,\ t_2 \le 1$ требуемая оценка вытекает из (2.5) после переобозначения переменных t_1 и t_2

$$I_1 \le C_2(\delta)A_\delta^2 t_1^{1-\delta}t_2^{1+\delta}. \quad (2.6)$$

(d) Пусть $t_1 \ge 1,\ t_2 \ge 1$. Тогда записывая I_1 в виде

$$I_1 = \int_0^\infty\int_0^\infty |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(x_1,x_2)|^{1+\delta}$$

$$\times \left| \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \Phi''_{x_1x_2}(x_1+u_1, x_2+u_2)\, du_1\, du_2 \right|^{1-\delta} dx_1\, dx_2 \quad (2.7)$$

и повторяя рассуждения, использованные на шаге (a), придем к оценке

$$I_1 \le 4^{1+\delta} A_\delta^2 (t_1t_2)^{1-\delta} \left(\int_0^\infty \frac{dx_1}{(1+x_1)^{\delta+\delta^2} x_1^{(1-\delta)^2} (1+x_1^{2\delta})^{1-\delta}} \right)^2 \le C_3(\delta) A_\delta^2 (t_1t_2)^{1-\delta}. \quad (2.8)$$

2. Оценим I_2. Предварительно заметим, что I_2 можно представить в виде

$$I_2 = \int_0^\infty\int_0^\infty |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi_{\mp}(x_1,x_2)|^2\, dx_1\, dx_2 + \int_0^{t_1} dx_1 \int_0^\infty |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(-x_1,x_2)|^2\, dx_2 =: I_{21} + I_{22}. \quad (2.9)$$

Интеграл I_{21} представляет собой I_1, записанный для функции $\Phi_{\mp}(x_1,x_2)$. Следовательно, для I_1 также справедливы оценки (2.4)–(2.8). Остается оценить I_{22}.

(a) В этом случае

$$I_{22} = \int_0^{t_1} dx_1 \int_0^\infty |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(-x_1,x_2)|^{1-\delta} |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(-x_1,x_2)|^{1+\delta}\, dx_2$$

$$\le A_\delta^{1-\delta} \int_0^{t_1} dx_1 \int_0^\infty \Bigg(\frac{1}{(1+|t_1-x_1|)^\delta (1+t_2+x_2)^\delta} + \frac{1}{(1+|t_1-x_1|)^\delta (1+x_2)^\delta} + \frac{1}{(1+x_1)^\delta (1+t_2+x_2)^\delta}$$

$$+ \frac{1}{(1+x_1)^\delta (1+x_2)^\delta} \Bigg)^{1-\delta} \left| \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \Phi''_{u_1u_2}(u_1-x_1, u_2+x_2)\, du_1\, du_2 \right|^{1+\delta}$$

$$\le A_\delta^2 \int_0^{t_1} dx_1 \int_0^\infty \left(\frac{2}{(1+|t_1-x_1|)^\delta (1+t_2+x_2)} + \frac{2}{(1+x_1)^\delta (1+x_2)^\delta} \right)^{1-\delta}$$

$$\times\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\frac{1}{|u_1-x_1|^{1-\delta}(u_2+x_2)^{1-\delta}(1+|x_1-u_1|^{2\delta})}\frac{du_1du_2}{(1+u_2+x_2)^{2\delta}}\right)^{1+\delta}dx_2$$

$$\le 2^{1-\delta}A_\delta^2\int_0^{t_1}\left(\frac{1}{(1+|t_1-x_1|)^\delta}+\frac{1}{1+(x_1)^\delta}\right)\left(\int_0^{t_1}\frac{du_1}{|u_1-x_1|^{1-\delta}}\right)^{1+\delta}dx_1$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x_2)^{\delta-\delta^2}(1+x_2^{2\delta})^{1+\delta}x_2^{1-\delta^2}}\,t_2^{1+\delta}\,dx_2\le CA_\delta^2(t_1t_2)^{1+\delta}. \quad (2.10)$$

(b) Пусть теперь $t_1\le 1,\ t_2\ge 1$. Тогда

$$I_{22}\le A_\delta^{1-\delta}\int_0^{t_1}dx_1\int_0^{\infty}\left|\int_0^{t_1}\left(\Phi'_u(u-x_1,x_2+t_2)-\Phi'_u(u-x_1,x_2)\,du\right)\right|^{2\delta}$$

$$\times\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}|\Phi''_{u_1u_2}(u_1-x_1,u_2+x_2)|\,du_1\,du_2\right)^{1-\delta}dx_2$$

$$\le A_\delta^2\int_0^{t_1}dx_1\int_0^{\infty}\left(\int_0^{t_1}\left(\frac{1}{|u_1-x_1|^{1-\delta}(1+|u-x_1|^{2\delta})(1+t_2+x_2)^\delta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \frac{1}{|u_1-x_1|^{1-\delta}(1+|u-x_1|^{2\delta})(1+x_2)^\delta}\right)du\right)^{2\delta}$$

$$\times\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\frac{1}{|u_1-x_1|^{1-\delta}(u_2+x_2)^{1-\delta}(1+|u_1-x_1|^{2\delta})}\right.$$

$$\left.\times\ \frac{du_1du_2}{(1+(u_2+x_2)^{2\delta})}\right)^{1-\delta}dx_2$$

$$\le A_\delta^2\int_0^{t_1}dx_1\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x_2)^{2\delta^2}}\left(\int_0^{t_1}\frac{2du}{|u-x_1|^{1-\delta}}\right)^{2\delta}$$

$$\times\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\frac{du_1du_2}{|u_1-x_1|^{1-\delta}x_2^{1-\delta}(1+x_2^{2\delta})}\right)^{1-\delta}dx_2$$

$$\le CA_\delta^2t_1^{1+\delta+\delta^2}t_2^{1-\delta}\le CA_\delta^2t_1^{1+\delta}t_2^{1-\delta}. \quad (2.11)$$

(c) При $t_1\ge 1,\ t_2\le 1$ мы имеем

$$I_{22} = \int_0^{t_1} dx_1 \int_0^{\infty} |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(-x_1,x_2)|^{1-\delta}$$
$$\times \left| \int_0^{t_2} \big(\Phi'_{x_2}(t_1-x_1,u_2+x_2) - \Phi'_{x_2}(-x_1,u_2+x_2)\big)\, du_2 \right|^{2\delta}$$
$$\times \left| \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \Phi''_{u_1u_2}(u_1-x_1,u_2+x_2)\, du_1\, du_2 \right|^{1-\delta} dx_2$$
$$\le A_\delta^2 \int_0^{t_1}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x_2)^{\delta-\delta^2}} \left(\frac{2}{(1+|t_1-x_1|)^\delta} + \frac{2}{(1+x_1)^\delta} \right)^{1-\delta}$$
$$\times \left(\int_0^{t_2} \frac{1}{x_2^{1-\delta}(1+x_2^{2\delta})} \left(\frac{1}{(1+|t_1-x_1|)^\delta} + \frac{1}{(1+x_1)^\delta} \right) du_2 \right)^{2\delta}$$
$$\times \left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \frac{du_1du_2}{x_2^{1-\delta}(1+x_2^{2\delta})|u_1-x_1|^{1-\delta}(1+|u_1-x_1|^{2\delta})} \right)^{1-\delta} dx_2$$
$$\le CA_\delta^2 t_1^{1-\delta} t_2^{1+\delta}. \quad (2.12)$$

(d) В оставшемся случае $t_1 \ge 1,\ t_2 \ge 1$ имеем

$$I_{22} \le \int_0^{t_1} dx_1 \int_0^{\infty} |\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(-x_1,x_2)|^{1+\delta}$$
$$\times \left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} |\Phi''_{u_1u_2}(u_1-x_1,u_2+x_2)|\, du_1\, du_2 \right)^{1-\delta} dx_2$$
$$\le A_\delta^2 \int_0^{t_1}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x_2)^{\delta+\delta^2}} \left(\frac{2}{(1+|t_1-x_1|)^\delta} + \frac{2}{(1+x_1)^\delta} \right)^{1+\delta}$$
$$\times \left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \frac{du_1du_2}{|u_1-x_1|^{1-\delta}(1+|u_1-x_1|^{2\delta})x_2^{1-\delta}(1+x_2^{2\delta})} \right)^{1-\delta} dx_2$$
$$\le CA_\delta^2 t_1^{1-\delta} t_2^{1-\delta}. \quad (2.13)$$

Из оценок (2.10)–(2.13) и равенства (2.9) следует, что для I_2 выполняются неравенства (2.4)–(2.8).

3. Ввиду соображений симметрии эти неравенства справедливы также для I_3.

4. Для оценки интеграла I_4 предварительно преобразуем его.

$$I_4 = \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0} \left|\Delta_{t_1}\Delta_{t_2}\Phi(x_1,x_2)\right|^2\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\Big|\Phi_=(x_1-t_1,x_2-t_2)-\Phi_=(x_1-t_1,x_2)$$

$$-\Phi_=(x_1,x_2-t_2)+\Phi_=(x_1,x_2)\Big|^2\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int\limits_{t_1}^{\infty}\int\limits_{t_2}^{\infty} + \int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{t_2}^{\infty} + \int\limits_{t_1}^{\infty}\int\limits_{0}^{t_2} + \int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{0}^{t_2} =: I_{41}+I_{42}+I_{43}+I_{44}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_{41} = \int\limits_{0}^{\infty} dx_1 \int\limits_{0}^{\infty} |\Phi_=(x_1,x_2)-\Phi_=(x_1,x_2+t_2)$$
$$-\Phi_=(x_1+t_1,x_2)+\Phi_=(x_1+t_1,x_2+t_2)|^2\, dx_2. \quad (2.14)$$

Из (2.1) и (2.14) видим, что I_{41} есть интеграл I_1, записанный для функции $\Phi_=(x_1,x_2)$ и для него также справедливы оценки (2.4)–(2.8).

Рассмотрим интеграл

$$I_{42} := \int\limits_{0}^{t_1} dx_1 \int\limits_{0}^{\infty} |\Phi_\pm(t_1-x_1,x_2)-\Phi_\pm(t_1-x_1,t_2+x_2)$$
$$-\Phi_\pm(-x_1,x_2)+\Phi_\pm(-x_1,t_2+x_2)|^2\, dx_2. \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) совпадает с интегралом I_{22}, записанным для функции $\Phi_\pm(x_1,x_2)$ и, следовательно, для I_{42} справедливы оценки (2.4)–(2.8). Они также справедливы для интеграла I_{43}, получающегося из I_{42} переобозначением переменных x_1 и x_2.

Перейдем к оценке I_{44}.

(a) Пусть $t_1 \le 1,\ t_2 \le 1$. Тогда

$$I_{44} = \int\limits_{0}^{t_1} dx_1 \int\limits_{0}^{t_2} \left|\int\limits_{0}^{t_1} du_1 \int\limits_{0}^{t_2} \Phi''_{u_1u_2}(u_1-x_1,u_2-x_2)\, du_2\right|^2 dx_2$$

$$\le A_\delta^2 \int\limits_{0}^{t_1} dx_1 \int\limits_{0}^{t_2} \Bigg(\int\limits_{0}^{t_1} \frac{du_1}{|u_1-x_1|^{1-\delta}(1+|u_1-x_1|^{2\delta})}$$

$$\times \int_0^{t_2} \frac{du_2}{|u_2-x_2|^{1-\delta}(1+|u_2-x_2|^{2\delta})}\Bigg)^2 dx_2 \le CA_\delta^2(t_1t_2)^{1+\delta}.$$

(b) При $t_1 \le 1,\ t_2 \ge 1$ получаем

$$I_{44} = \int_0^{t_1} dx_1$$

$$\times \int_0^{t_2} \left| \int_0^{t_1} \left(\Phi'_{u_1}(u_1-x_1, t_2-x_2) - \Phi'_{u_1}(u_1-x_1, -x_2)\right) du_1 \right|^2 dx_2$$

$$\le 2A_\delta^2 \int_0^{t_1} dx_1 \int_0^{t_2} \left(\frac{2}{(1+|t_2-x_2|)^{2\delta}} + \frac{2}{(1+x_2)^{2\delta}}\right)$$

$$\times \left(\int_0^{t_1} \frac{du_1}{|u_1-x_1|^{1-\delta}}\right)^2 dx_2 \le CA_\delta^2 t_1^{1+\delta} t_2^{1-\delta}. \quad (2.16)$$

(c) Случай $t_1 \ge 1,\ t_2 \le 1$ следует из оценки (2.16) переобозначением переменных.

(d) В случае $t_1 \ge 1,\ t_2 \ge 1$

$$I_{44} \le A_\delta^2 \int_0^{t_1} dx_1$$

$$\times \int_0^{t_2} \left| \frac{1}{(1+|x_1-t_1|)^\delta (1+|x_2-t_2|)^\delta} + \frac{1}{(1+|x_1-t_1|)^\delta (1+x_2)^\delta} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1+x_1)^\delta (1+|x_2-t_2|)^\delta} + \frac{1}{(1+x_1)^\delta (1+x_2)^\delta} \right|^2 dx_2$$

$$\le 4A_\delta^2 \int_0^{t_1} \frac{dx_1}{(1+x_1)^{2\delta}} \int_0^{t_2} \frac{dx_2}{(1+x_2)^{2\delta}} \le CA_\delta^2 t_1^{1-\delta} t_2^{1-\delta}. \quad (2.17)$$

Таким образом, мы получили, что для $\phi(t_1,t_2)$ верны оценки

$$\phi(t_1,t_2) \le C \begin{cases} (t_1t_2)^{1+\delta}, & 0 < t_1,\ t_2 \le 1; \\ t_1^{1+\delta} t_2^{1-\delta}, & t_1 \le 1,\ t_2 \ge 1; \\ t_1^{1-\delta} t_2^{1+\delta}, & t_1 \ge 1,\ t_2 \le 1; \\ (t_1t_2)^{1-\delta}, & t_1, t_2 \ge 1 \end{cases}$$

с постоянной C, не зависящей от t_1 и t_2, из которых вытекает сходимость интеграла в (1.3) и справедливость теоремы 1.2 $\square$

Замечание 2.1. Теорема 1.2, вообще говоря, не следует из соответствующей теоремы П. И. Лизоркина [8] о мультипликаторах, т.к. в ([8]) от функции Φ требуется, чтобы $\Phi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, что не предполагается в условии теоремы 1.2. Однако она может быть легко распространена и на функции Φ, рассматриваемые в теореме 1.2 (в этом случае ее утверждение очень близко к утверждению теоремы 1.3) и тогда теорема 1.2 может быть получена из теоремы П. И. Лизоркина аналогично вышеизложенному.

3. Вывод теоремы 1.2 из теоремы 1.4

С согласия Р. М. Тригуба приведем изложение принадлежащего ему доказательства того, что теорема 1.2 может быть получена из его теоремы 1.4 о мультипликаторах ([14, теорема 4], [15, с. 208]).

Доказательство. Ограничимся случаем $n = 2$. Пусть сперва функция $\Phi := \Phi(x, y)$ четна по x и y . Тогда в условиях теоремы 1.2 ее можно представить в виде

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{|x|}^{\infty} \int\limits_{|y|}^{\infty} \Phi''_{uv}(u, v)\, du\, dv.$$

Из теоремы 1.4 в этом случае следует, что $\Phi(x, y) \in A(\mathbb{R}^2)$. Теперь рассмотрим общую ситуацию. Любую функцию $\Phi(x, y)$ можно представить в виде суммы четырех функций $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$, каждая из которых будет четной или нечетной по переменным x и y по отдельности. Поэтому достаточно показать принадлежность $A(\mathbb{R}^2)$ каждой из функций Φ_i. Очевидно, что функции Φ_i можно выбрать удовлетворяющими условию теоремы 1.2. Случай, когда Φ_i четна, следует из предшествующих рассуждений. Покажем, как убедиться в принадлежности $A(\mathbb{R}^2)$ функции Φ_i, если она является нечетной по одной или обоим переменным. Пусть, например, $\Phi_1(x, y)$ нечетна по x и четна относительно y . Возьмем достаточно малое положительное ε, $\varepsilon < \delta$ (где δ из условия теоремы 1.2) и рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x|^\varepsilon \operatorname{sgn} x, & |x| \le 1; \\ |x|^{-\varepsilon} \operatorname{sgn} x, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $f_\varepsilon \in A(\mathbb{R})$ и, следовательно, является преобразованием Фурье конечной борелевской плоской меры. Функция

$\Phi_1(x,y)/f_\varepsilon(x)$ является четной по x и y и удовлетворяет условию теоремы 1.4. Ввиду приведенного в начале доказательства рассуждения она принадлежит $A(\mathbb{R}^2)$. Представляя Φ_1 в виде $\Phi_1 = (\Phi_1/f_\varepsilon)\cdot f_\varepsilon$ видим, что $\Phi_1 \in A(\mathbb{R}^2) \subset B(\mathbb{R}^2)$, так как произведение функций из A и B принадлежит A. Рассуждения для остальных ситуаций с четностью и нечетностью функций Φ_i аналогичны. □

Замечание 3.1. Теорема 1.2 также может быть получена и из результатов И. Р. Лифлянда [17].

4. Некоторые примеры мультипликаторов в $L_1(\mathbb{R}^n)$

В этой части статьи приводятся примеры мультипликаторов, удовлетворяющих условиям теорем 1.3 и 1.4, но не удовлетворяющих условиям теоремы 1.2. Тем самым доказана неравносильность этих теорем.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x_1,x_2) = \frac{1}{(1+\ln(1+x_1^2))(1+\ln(1+x_2^2))}.$$

Очевидно, Φ не удовлетворяет условиям теоремы 1.2, т.к. не выполнено условие 1. Убедимся, что Φ удовлетворяет условиям теоремы Р. М. Тригуба 1.4.

$$\Phi''_{x_1x_2}(x_1,x_2) = \frac{4x_1x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)(1+\ln(1+x_1^2))^2(1+\ln(1+x_2^2))^2}.$$

Положим

$$\varphi(x) = \frac{2x}{(1+x^2)(1+\ln(1+x^2))^2}.$$

Отметим некоторые простые свойства $\varphi(x)$:

1. $|\varphi(x)|$ — четная функция;
2. $\varphi(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$;
3. $|\varphi(x)| \le 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$;
4. $\varphi(x)$ монотонно убывает к нулю при $x \ge 1$.

   Действительно, при $x \ge 1$ имеем

$$2\cdot\Big(\frac{1}{\varphi(x)}\Big)' = \Big[\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)(1+\ln(1+x^2))^2$$

$$+\frac{x^2+1}{x}\cdot 2(1+\ln(1+x^2))\frac{2x}{1+x^2}\Big]$$
$$=(1+\ln(1+x^2))\Big[\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)(1+\ln(1+x^2))+4\Big]>0.$$

5. $|\Phi''_{x_1x_2}(x_1,x_2)|=|\varphi(x_1)||\varphi(x_2)|$.

Покажем, что функция $g(u_1,u_2):=\Phi''_{u_1,u_2}(u_1,u_2)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.4.

$$\int\limits_{|x_1|}^{\infty}du_1\int\limits_{|x_2|}^{\infty}g(u_1,u_2)\,du_2=\int\limits_{|x_1|}^{\infty}du_1\int\limits_{|x_2|}^{\infty}\varphi(u_1)\varphi(u_2)\,du_2$$
$$=\int\limits_{|x_1|}^{\infty}\frac{2u_1du_1}{(1+u_1^2)(1+\ln(1+u_1^2))^2}\int\limits_{|x_2|}^{\infty}\frac{2u_2du_2}{(1+u_2^2)(1+\ln(1+u_2^2))^2}$$
$$=\frac{1}{1+\ln(1+u_1^2)}\Big|_{|x_1|}^{\infty}\frac{1}{1+\ln(1+u_2^2)}\Big|_{|x_2|}^{\infty}$$
$$=\frac{1}{(1+\ln(1+x_1^2))(1+\ln(1+x_2^2))}=\Phi(x_1,x_2).$$

Таким образом, условие представимости Φ в виде

$$\Phi(x_1,x_2)=\int\limits_{|x_1|}^{\infty}du_1\int\limits_{|x_2|}^{\infty}g(u_1,u_2)\,du_2$$

выполнено.

Убедимся, что выполнено и второе условие теоремы 1.4.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\operatorname*{ess\,sup}_{|u_i|\ge|v_i|}|g(u_1,u_2)|\,dv_1\,dv_2<\infty.$$

Действительно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\operatorname*{ess\,sup}_{|u_i|\ge|v_i|}|g(u_1,u_2)|\,dv_1\,dv_2=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\operatorname*{ess\,sup}_{|u_i|\ge|v_i|}|\Phi_{u_1u_2}(u_1,u_2)|\,dv_1\,dv_2$$
$$=4\int\limits_0^{\infty}dv_1\int\limits_0^{\infty}\operatorname*{ess\,sup}_{|u_i|\ge v_i}|\varphi(u_1)\varphi(u_2)|\,dv_2=4\bigg(\int\limits_0^{\infty}\operatorname*{ess\,sup}_{|u|\ge v}|\varphi(u)|\,dv\bigg)^2$$
$$=4\bigg(\int\limits_0^{1}\operatorname*{ess\,sup}_{u\ge v}|\varphi(u)|\,dv+\int\limits_1^{\infty}\operatorname*{ess\,sup}_{u\ge v}|\varphi(u)|\,dv\bigg)^2$$

$$\le 4\left(\int\limits_0^1 1\cdot dv + \int\limits_0^\infty \varphi(v)\,dv\right)^2 = 4\Big(1+\frac{1}{1+\ln 2}\Big)^2 < \infty.$$

Таким образом, функция $\Phi(x_1, x_2)$ представляет собой мультипликатор, удовлетворяющий условиям теоремы Р. М. Тригуба 1.4 и неудовлетворяющий условиям теоремы 1.2 из [1]. Отметим также, что подобный пример легко обобщить, заменив множители в знаменателе функции $\Phi(x_1, x_2)$ на множители вида

$$(1+\ln\ln\cdots\ln(c+x^2))$$

с произвольным натуральным количеством операций логарифмирования и подходящей положительной постоянной c.

Теперь приведем подобный пример мультипликатора, удовлетворяющего условиям теоремы 1.3 и неудовлетворяющего условиям теоремы 1.2. Полагая

$$n=1, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{1+\ln(1+x^2)},$$

имеем

$$\|\Phi(x+1)-\Phi(x)\|^2 = \|\triangle_t \Phi(x)\|^2$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{1+\ln(1+(x+t)^2)} - \frac{1}{1+\ln(1+x^2)}\right|^2 dx$$

$$= \int\limits_0^\infty + \int\limits_{-\infty}^0 =: \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2, \quad t>0.$$

Оценим I_1.

(a) При $t \in (0;1]$ имеем:

$$\mathrm{I}_1 = \int\limits_0^\infty \ln^2\frac{1+(x+t)^2}{1+x^2}\,\frac{dx}{(1+\ln(1+(x+t)^2))^2(1+\ln(1+x^2))^2}$$

$$\le \int\limits_0^\infty \ln^2\left(1+\frac{2x+t}{1+x^2}\,t\right)\frac{dx}{(1+\ln(1+x^2))^4}$$

$$\le \int\limits_0^\infty \frac{(2x+t)^2}{(1+x^2)^2}\,t^2\,dx \le t^2\int\limits_0^\infty \frac{4x^2+4x+1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\le t^2\int\limits_0^\infty \frac{6x^2+3}{(1+x^2)^2}\,dx \le 6t^2\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 3\pi t^2.$$

(b) При $t > 1$ имеем:

$$\mathrm{I}_1 \le \int\limits_0^t \ln^2 \frac{1+(x+t)^2}{1+x^2} \frac{dx}{(1+\ln(1+(x+t)^2))^2(1+\ln(1+x^2))^2}$$
$$+ \int\limits_t^\infty \left(\frac{2x+t}{1+x^2}\right)^2 \frac{t^2\,dx}{(1+\ln(1+x^2))^4}$$
$$\le \frac{1}{(1+\ln(1+t^2))^2} \int\limits_0^t \ln^2 \frac{1+4t^2}{1+x^2} \frac{dx}{(1+\ln(1+x^2))^2}$$
$$+ 9t^2 \int\limits_t^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+\ln(1+x^2))^4} =: \mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{12}.$$

Применяя правило Лопиталя, нетрудно убедиться, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{I}_{11}\ln^4 t}{t} = \frac{\ln^2 4}{16} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{1}{2},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{I}_{12}\ln^4 t}{t} = \frac{9}{16},$$

следовательно, при $t > 1$ имеет место неравенство

$$\mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{12} \le C\frac{t}{\ln^4 t}$$

с некоторой постоянной $C > 0$.

Для оценки I_2 мы его предварительно преобразуем:

$$\mathrm{I}_2 = \int\limits_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{1+\ln(1+(x+t)^2)} - \frac{1}{1+\ln(1+x^2)}\right]^2 dx$$
$$= \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{1+\ln(1+(t-x)^2)} - \frac{1}{1+\ln(1+x^2)}\right]^2 dx = \int\limits_t^\infty + \int\limits_0^t$$
$$= \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{1+\ln(1+x^2)} - \frac{1}{1+\ln(1+(x+t)^2)}\right]^2 dx$$
$$+ \int\limits_0^t \left[\frac{1}{1+\ln(1+(t-x)^2)} - \frac{1}{1+\ln(1+x^2)}\right]^2 dx =: \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3.$$

Для I_1 оценки уже получены выше. Оценим I_3 при $t \in (0;1]$:

$$\mathrm{I}_3 = \int\limits_0^t \ln^2 \frac{1+(x-t)^2}{1+x^2} \, \frac{dx}{(1+\ln(1+(t-x)^2))^2(1+\ln(1+x^2))^2}$$

$$\leq \int\limits_0^t \ln^2 \frac{1+(x-t)^2}{1+x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \ln^2 \frac{1+(t-x)^2}{1+x^2}\,dx$$

$$+ \int\limits_{\frac{t}{2}}^t \ln^2 \frac{1+x^2}{1+(t-x)^2}\,dx \leq \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \ln^2(1+t^2)\,dx$$

$$+ \int\limits_{\frac{t}{2}}^t \ln^2(1+t^2)\,dx = t\ln^2(1+t^2) \leq t^5. \quad (4.1)$$

Оценим I_3 при $t > 1$:

$$\mathrm{I}_3 = \int\limits_0^t \ln^2 \frac{1+(x-t)^2}{1+x^2} \, \frac{dx}{(1+\ln(1+(t-x)^2))^2(1+\ln(1+x^2))^2}$$

$$= 2\int\limits_{\frac{t}{2}}^t \ln^2 \frac{1+(x-t)^2}{1+x^2} \, \frac{dx}{(1+\ln(1+(t-x)^2))^2(1+\ln(1+x^2))^2}$$

$$\leq \frac{2}{(1+\ln(1+\frac{t^2}{4}))^2} \int\limits_{\frac{t}{2}}^t \ln^2 \frac{1+(t-x)^2}{1+x^2} \, \frac{dx}{(1+\ln(1+(t-x)^2))^2}$$

$$\leq \frac{2}{(1+\ln(1+\frac{t^2}{4}))^2} \int\limits_{\frac{t}{2}}^t \ln^2 \frac{1+t^2}{1+(t-x)^2} \, \frac{dx}{(1+\ln(1+(t-x)^2))^2}$$

$$= \frac{2}{(1+\ln(1+\frac{t^2}{4}))^2} \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \ln^2 \frac{1+t^2}{1+x^2} \, \frac{dx}{(1+\ln(1+x^2))^2}.$$

Поскольку выражение, стоящее в правой части неравенства (обозначим его $\mathrm{I}_4 =: \mathrm{I}_4(\cdot)$), равно удвоенному значению рассмотренного выше выражения $\mathrm{I}_{11} =: \mathrm{I}_{11}(\cdot)$ в точке $\frac{t}{2}$, то для него при $t \geq 1$ также верна оценка

$$\mathrm{I}_4 \leq C\frac{t}{\ln^4 t}$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Из полученных оценок следует, что

$$\|\Phi(x+t) - \Phi(x)\| \le C \begin{cases} \frac{t}{\ln^4 t}, & t \in (0;1]; \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Следовательно, функция $\Phi(x) = \frac{1}{1+\ln(1+x^2)}$ представляет собой мультипликатор, для которого выполнено условие теоремы 1.3

$$\int\limits_0^\infty \frac{\|\Delta_t \Phi(x)\|_{L_2}}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt < \infty$$

в отличие от условия теоремы 1.2 из работы [1].

Литература

[1] E. S. Belinsky, M. Z. Dvejrin, M. M. Malamud, *Multipliers in L_1 and Estimates for systems of differential operators* // Russian Journ. Math. Physics, **12** (2005), N 1, 6–16.

[2] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Киев: Наукова думка, 1965, 798 с.

[3] О. В. Бесов, *К теореме Хермандера о мультипликаторах Фурье* // Труды МИАН СССР. **173** (1986), 3–13.

[4] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, М.: Наука, 1996, 480 с.

[5] Л. Р. Волевич, *Локальные свойства решений квазиэллиптических систем* // Матем. сб., **59 (101)** (1962), 3–52.

[6] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p-space* // Acta Math., **104** (1960), 93–140.

[7] П. И. Лизоркин, *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p(E_n)$. Теоремы вложения* // Матем. сб., **60 (102)** (1963), 325–353.

[8] П. И. Лизоркин, *Предельные случаи теорем о $\mathcal{F}L_p$ мультипликаторах* // Труды МИАН СССР, **173** (1986), 164–180.

[9] Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд, *Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева* // Матем. сб., **199:11** (2008), 75–112.

[10] М. М. Маламуд, *Оценки для систем минимальных и максимальных операторов в $L_p(\Omega)$* // Труды Моск. Матем. Об-ва, **56** (1995), 206–261.

[11] С. Г. Михлин, *О мультипликаторах интегралов Фурье* // ДАН СССР, **109** (1956) N 4, 701–703.

[12] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, М.: Мир, 1973, 342 с.

[13] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, М.: Мир, 1974, 332 с.

[14] Р. М. Тригуб, *Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость интегралов Фурье и приближение полиномами функций на торе* // Изв. АН СССР, сер. матем., **44** (1980), N 6, 1378–1409.

[15] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston MA; London, 2004, 585 p.

[16] E. Liflyand, R. Trigub, *Known and new results on absolute convergence of Fourier integrals* // CRM, preprint num. 859, June 2009, 29 p.

[17] E. R. Liflyand, *On asymtotics of Fourier transform for functions of certain classes* // Analysis Math., **19** (1993), N 2, 151–168.

[18] S. G. Samko, G. S. Kostetskaya, *Absolute integrability of Fourier integrals* // Вестник РУДН, сер. Математика, (1994), N 1, 138–168.

Сведения об авторах

Михаил Захарович Двейрин
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская 24,
Донецк 83055,
Украина
E-Mail: `strannik35@telenet.dn.ua`