Український математичний вісник
Том 7 (**2010**), № 1, 49 – 72

О существовании обобщенного решения нелинейной эволюционной системы уравнений в неограниченной по времени области

Максим Нечепуренко, Галина Торган

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Рассмотрена смешанная задача с однородными краевыми условиями Дирихле и ненулевыми начальными условиями для одной нелинейной связной эволюционной системы уравнений в неограниченной по времени области. Получены условия существования обобщенного решения. Показано несуществование решения задачи при отрицательном начальном значении интеграла энергии.

2000 MSC. 35G30.

Ключевые слова и фразы. Смешанная задача, нелинейная система, неограниченная область.

1. Введение

В предлагаемой статье получены достаточные условия существования локального решения для одной нелинейной эволюционной системы второго порядка. Существование решения почти всюду указанной задачи получено в [10]. Подобные задачи в ограниченных областях рассматриваются в работах [1–3]. Так в [1] получены достаточные условия существования и единственности решения нелинейного волнового уравнения с термоупругой связностью. В [2] изучена смешанная задача для линейной связной системы с переменными коэффициентами, установлено показательное поведение решения задачи. Отдельный результат для эволюционной системы уравнений с интегральной нелинейностью получен в [3]. Асимптотическое поведение слабых решений полулинейной системы термоупругости изучено в [9] и показано несуществование решения при отрицательной начальной энергии.

Статья поступила в редакцию 22.06.2009

В работе [8], посвященной волновым уравнения с переменными коэффициентами, с помощью метода из [6] показана экспоненциальная устойчивость интеграла энергии, связанного со слабым решением. Для доказательства существования и единственности обобщенного решения рассматриваемой задачи мы используем методы Галеркина и компактности, а также идеи из [7].

Нелинейность вида $|v|^\rho v$ обычно возникает в релятивистской квантовой механике [11, 13] и рассматривалась многими авторами для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений.

2. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t=\tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $Q = \Omega \times (0,\infty)$. Рассмотрим в области Q смешанную задачу для системы уравнений с вещественнозначными коэффициентами

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i}(x,t))_{x_j} \\
+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\theta_{x_i}(x,t) + d(x,t)u_t(x,t) + a(x,t)u(x,t) \\
= c(x,t)|u(x,t)|^{p-2}u(x,t) + f_1(x,t), \quad (2.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_t - \sum_{i,j=1}^{n} (d_{ij}(x,t)\theta_{x_i}(x,t))_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}(b_i(x,t)u_t(x,t))_{x_i} \\
+ b(x,t)\theta(x,t) + g(x,t)|\theta(x,t)|^{q-2}\theta(x,t) = f_2(x,t) \quad (2.2)
\end{aligned}
$$

с начальными

$$
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.3)
$$

и краевыми условиями

$$
u\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0, \quad \theta\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0. \quad (2.4)
$$

Введем пространства:

$$
L^p(\Omega) = \left\{ u : \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty, \ p \in (1,\infty) \right\},
$$

$$H_0^1(\Omega)=\left\{u:\ u,u_{x_i}\in L^2(\Omega),\ u\big|_{\partial\Omega}=0,\ i\in\{1,\dots,n\}\right\},$$

с соответствующими нормами

$$\|u\|_p=\left(\int\limits_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p},\quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\|\nabla u\|_2=\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Будем предполагать, что для коэффициентов системы (2.1)–(2.2) выполняются следующие условия:

($\mathbf{H_1}$) $a_{ij},a_{ijt},a_{ijtt},a,a_t\in L^\infty(Q),\ D^1a_{ij}(\cdot,0)\in L^\infty(\Omega),\ i,j\in\{1,\dots,n\}$, где $D^\alpha u=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=|\alpha|,\ \alpha_i>0;$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant A_1\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2,\quad A_1>0,$$

для всех $\xi_i\in\mathbb{R}$ и почти всех $(x,t)\in Q$,

$$a(x,t)\geqslant A_0>0$$

почти для всех $(x,t)\in Q$,

$$a_{ij}(x,t)=a_{ji}(x,t)$$

почти для всех $(x,t)\in Q$ и всех $i,j\in\{1,\dots,n\}$;

($\mathbf{H_2}$) $b_i,b_{it},b,b_t\in L^\infty(Q),\ D^1b_i(\cdot,0)\in L^\infty(\Omega),\ i\in\{1,\dots,n\}$,

$$b(x,t)\geqslant B_0>0$$

почти для всех $(x,t)\in Q$;

($\mathbf{H_3}$) $c,c_t\in L^\infty(Q),\ c(x,t)\leqslant C_0,\ c_t(x,t)\leqslant\overline{C_0}$ почти для всех $(x,t)\in Q,\ C_0>0,\ \overline{C_0}>0;$

($\mathbf{H_4}$) $d_{ij},d_{ijt},d,d_t\in L^\infty(Q),\ D^1d_{ij}(\cdot,0)\in L^\infty(\Omega),\ i,j\in\{1,\dots,n\}$,

$$\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant D_1\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2,\quad D_1>0,$$

для всех $\xi_i\in\mathbb{R}$ и почти всех $(x,t)\in Q$,

$$d(x,t)\geqslant D_0>0$$

почти для всех $(x,t)\in Q$,

$$d_{ij}(x,t)=d_{ji}(x,t)$$

почти для всех $(x,t)\in Q$ и всех $i,j\in\{1,\dots,n\}$;

($\mathbf{H_5}$) $g, g_t \in L^\infty(Q)$, $g(x,t) \geqslant g_0 > 0$ почти для всех $(x,t) \in Q$.

Определение 2.1. *Пару функций* $u \in L^2((0,T_0), H_0^1(\Omega)) \cap L^p((0,T_0); L^p(\Omega))$, $\theta \in L^2((0,T_0), H_0^1(\Omega)) \cap L^p((0,T_0); L^p(\Omega))$ *таких, что* $u_t \in L^2((0,T_0); H_0^1(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty((0,T_0); L^2(\Omega))$, $\theta_t \in L^\infty((0,T_0); L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T_0); H_0^1(\Omega))$, $|\theta|^{q-2}|\theta_t|^2 \in L^1(Q_{T_0})$ *и* (u,θ) *удовлетворяют начальным условиям* (2.3) *и системе уравнений*

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[u_{tt}w + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}w_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\theta_{x_i}w + d(x,t)u_t w + a(x,t)uw - c(x,t)|u|^{p-2}uw - f_1(x,t)w \Big] dx = 0, \quad (2.5)$$

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[\theta_t v + \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\theta_{x_i}v_{x_j} - \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_t v_{x_i} + b(x,t)\theta v + g(x,t)|\theta|^{q-2}\theta v - f_2(x,t)v \Big] dx = 0, \quad t \in (0,T_0], \quad (2.6)$$

для всех $T_0 \in (0,T)$ *и всех* $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *будем называть локальным обобщенным решением задачи* (2.1)–(2.4). *Если* $T = \infty$, *то решение задачи будем называть глобальным.*

3. Существование решения задачи

Теорема 3.1. *Пусть для коэффициентов системы* (2.1)–(2.2) *выполняются условия* ($\mathbf{H_1}$)–($\mathbf{H_5}$) *и, кроме того,* f_1, f_{1t}, f_2, $f_{2t} \in L^2(Q)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^{2(p-1)}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega)$, $2 < p \leqslant \frac{2n}{n-2}$ *при* $n > 2$ *и* $p > 2$ *при* $n \in \{1,2\}$, $q > 2$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (2.1)–(2.4) *в области* Q_T $(0 < T < \infty)$, *зависящее от начальных данных и коэффициентов системы.*

Доказательство. Для доказательства существования решения используем метод Галеркина. Поскольку пространство $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^{2(p-1)}(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega)$ — сепарабельное банахово, то в нем существует такое счетное множество $\{\omega^k\}$, что любое конечное количество элементов данного множества линейно независимо и замыкание его линейной оболочки в $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^{2(p-1)}(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega)$ совпадает с этим пространством. Без потери общности, можем считать, что $\{\omega^k\}$

ортонормирована в $L^2(\Omega)$. Рассмотрим последовательности функций

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\omega^k(x), \quad \theta^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N} d_k^N(t)\omega^k(x), \quad N\in\mathbb{N},$$

где $c_1^N, c_2^N, \dots, c_N^N, d_1^N, d_2^N, \dots, d_N^N$ — решения следующей задачи Коши:

$$\int_\Omega \Big[u_{tt}^N\omega^k + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i}^N\omega_{x_j}^k + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\theta_{x_i}^N\omega^k + d(x,t)u_t^N\omega^k \\ + a(x,t)u^N\omega^k - c(x,t)|u^N|^{p-2}u^N\omega^k - f_1(x,t)\omega^k \Big] dx = 0, \quad (3.1)$$

$$\int_\Omega \Big[\theta_t^N\omega^k + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t)\theta_{x_i}^N\omega_{x_j}^k - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_t^N\omega_{x_i}^k + b(x,t)\theta^N\omega^k \\ + g(x,t)|\theta|^{q-2}\theta\omega^k - f_2(x,t)\omega^k \Big] dx = 0, \quad t\in[0,T], \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & c_k^N(0) = u_{0,k}^N, \quad c_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N, \quad d_k^N(0) = \theta_{0,k}^N, \quad k\in\{1,\dots,N\}, \\ & u_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0,k}^N\omega^k(x), \quad \|u_0^N - u_0\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2(p-1)}(\Omega)} \to 0, \\ & u_1^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}^N\omega^k(x), \quad \|u_1^N - u_1\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0, \qquad (3.3) \\ & \theta_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \theta_{0,k}^N\omega^k(x), \quad \|\theta_0^N - \theta_0\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2(q-1)}(\Omega)} \to 0 \end{aligned}$$

при $N\to\infty$.

На основании теоремы Каратеодори ([15, с. 54]) существует абсолютно непрерывное решение задачи (3.1)–(3.3), определенное на промежутке $[0,t_N)$ и такое, что $c_{1t}^N, c_{2t}^N, \dots, c_{Nt}^N$ абсолютно непрерывны на $(0,t_N)$. Из оценок, полученных ниже, вытекает, что $t_N = T$, где положительное число T зависит от начальных данных задачи и коэффициентов системы.

Умножим каждое из равенств системы (3.1)–(3.2) соответственно на c_{kt}^N и d_k^N. Полученные равенства просуммируем по k от 1 до N, проинтегрируем по промежутку $[0,\tau]$, где $\tau\in(0,T)$, и сложим. После выполнения этих операций получим равенство

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{tx_j}^N + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\theta_{x_i}^N u_t^N + d(x,t)|u_t^N|^2$$

$$+ a(x,t)u^N u_t^N - c(x,t)|u^N|^{p-2}u^N u_t^N - f_1(x,t)u_t^N + \theta_t^N\theta^N$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\theta_{x_i}^N\theta_{x_j}^N - \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_t^N\theta_{x_i}^N + b(x,t)|\theta^N|^2$$

$$+ g(x,t)|\theta^N|^q - f_2(x,t)\theta^N\Big]\,dx\,dt = 0. \quad (3.4)$$

Преобразуем и оценим каждый член равенства (3.4) отдельно. Нетрудно видеть, что

$$J_1 := \int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^N u_t^N\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t^N|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_1^N|^2\,dx,$$

$$J_2 := \int\limits_{Q_\tau} \theta_t^N\theta^N\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\theta^N|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|\theta_0^N|^2\,dx.$$

Используя условия теоремы и начальные условия (2.3), будем иметь оценки

$$J_3 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{tx_j}^N\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{x_j}^N\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{x_j}^N\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x,t)u_{x_i}^N u_{x_j}^N\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{A_1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\,dx - \frac{A_2+1}{4}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\,dx$$

$$-\frac{A_3+1}{4}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\,dx\,dt,$$

где $A_2 = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x,t)|^2$, $A_3 = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum_{i,j=1}^n |a_{ijt}(x,t)|^2$;

$$J_4 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\theta_{x_i}^N\theta_{x_j}^N\,dx\,dt \geqslant D_1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}^N|^2\,dx\,dt;$$

$$J_5 := \int\limits_{Q_\tau} d(x,t)|u_t^N|^2\,dx\,dt \geqslant D_0\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^2\,dx\,dt;$$

$$J_6 := \int\limits_{Q_\tau} b(x,t)|\theta^N|^2\,dx\,dt \geqslant B_0 \int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^2\,dx\,dt;$$

$$J_7 := \int\limits_{Q_\tau} a(x,t)u^N u_t^N\,dx\,dt \geqslant -\frac{A_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2\,dx\,dt - \frac{A_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2\,dx\,dt;$$

$$J_8 := \int\limits_{Q_\tau} g(x,t)|\theta^N|^q\,dx\,dt \geqslant g_0 \int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^q\,dx\,dt;$$

$$J_9 := \int\limits_{Q_\tau} c(x,t)|u^N|^{p-2}u^N u_t^N\,dx\,dt$$

$$\leqslant \frac{C_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2\,dx\,dt + \frac{C_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^{2(p-1)}\,dx\,dt;$$

$$J_{10} := \int\limits_{Q_\tau} f_1(x,t)u_t^N\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |f_1(x,t)|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2\,dx\,dt;$$

$$J_{11} := \int\limits_{Q_\tau} f_2(x,t)\theta^N\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |f_2(x,t)|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^2\,dx\,dt.$$

На основании теоремы вложения ([4, с. 47]) почти для всех $t \in (0,\tau)$

$$\int\limits_{\Omega_t} |u^N|^{2(p-1)}\,dx \leqslant \mu_1 \Bigg(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2\,dx \Bigg)^{p-1},$$

причем $p \leqslant \frac{2(n-1)}{n-2}$ для $n > 2$ и $p > 2$ для $n \in \{1,2\}$, где μ_1 — некоторая положительная константа, которая не зависит от функций u^N. Также справедливо неравенство

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2\,dx\,dt \leqslant 2\tau \int\limits_{\Omega_0} |u_0^N|^2\,dx + \tau^2 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2\,dx\,dt, \quad \tau \in (0,T].$$

Учитывая полученные оценки интегралов $J_1 - J_{11}$, от равенства (3.4) придем к неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[\frac{1}{2}|u_t^N|^2 + \frac{1}{2}|\theta^N|^2 + \frac{A_1}{2}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 \right] dx$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[D_1\sum_{i=1}^n|\theta^N_{x_i}|^2+\Big(D_0-\frac{A_0}{2}-\frac{C_0}{2}-\frac{A_0\tau^2}{2}-\frac{1}{2}\Big)|u^N_t|^2$$

$$+\Big(B_0-\frac{1}{2}\Big)|\theta^N|^2+g_0|\theta^N|^q\Big]\,dx\,dt\leqslant\int\limits_{Q_\tau}\frac{A_3+1}{4}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2\,dx\,dt$$

$$+\int\limits_{\Omega_0}\Big[\frac{1}{2}|u^N_t|^2+A_0\tau|u^N|^2+\frac{1}{2}|\theta^N|^2+\frac{A_2+1}{4}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2\Big]\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\big[|f_1(x,t)|^2+|f_2(x,t)|^2\big]\,dx\,dt$$

$$+\frac{C_0\mu_1}{2}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2\,dx\Big)^{p-1}dt.$$

Используя в последнем неравенстве лемму Гронуолла–Беллмана, легко получить оценку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^N_t|^2+|\theta^N|^2+\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2\Big]\,dx$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^n|\theta^N_{x_i}|^2+|u^N_t|^2+|\theta^N|^2+|\theta^N|^q\Big]\,dx\,dt$$

$$\leqslant\mu_2(\tau)\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2\,dx\Big)^{p-1}dt+\mu_3(\tau),\quad(3.5)$$

где $\mu_2(\tau)$, $\mu_3(\tau)$ — положительные константы, которые зависят от коэффициентов системы, начальных данных, свободных членов и τ. Кроме того, $\lim_{\tau\to0}\mu_2(\tau)=\mu_2^0<\infty$, $\lim_{\tau\to0}\mu_3(\tau)=\mu_3^0<\infty$ и μ_2, μ_3 монотонно растут.

Используя лемму Бихари ([5, с. 110]), из (3.5) получим оценку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^N_t|^2+|\theta^N|^2+\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2\Big]\,dx$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^n|\theta^N_{x_i}|^2+|u^N_t|^2+|\theta^N|^2+|\theta^N|^q\Big]\,dx\,dt$$

$$\leqslant\frac{\mu_4(\tau)}{[1-(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_3\tau]^{1/(p-2)}},$$

где $\mu_4(\tau) > 0$ для $\tau \in (0, T]$.

Пусть $\tau \in (0, T_1]$, где T_1 — решение неравенства $1 - (p-2) \times \mu_2^{p-2}(\tau)\mu_3(\tau) > 0$, тогда

$$\begin{gathered} \|u_t^N\|_{L^\infty((0,T_1);L^2(\Omega))} \leqslant \mu_5, \quad \|u^N\|_{L^\infty((0,T_1);H_0^1(\Omega))} \leqslant \mu_5, \quad \mu_5 > 0, \\ \|\theta^N\|_{L^\infty((0,T_1);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T_1);H_0^1(\Omega)) \cap L^q((0,T_1);L^q(\Omega))} \leqslant \mu_5. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Продифференцируем равенства системы (3.1)–(3.2) по t, потом умножим каждое из полученных равенств на c_{ktt}^N и d_{kt}^N соответственно, просуммируем их по k от 1 до N, проинтегрируем по промежутку $[0, \tau]$, где $\tau \in (0, T_1)$, и сложим. В результате получим

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_\tau} \Big[& u_{ttt}^N u_{tt}^N + \sum_{i,j=1}^n (a_{ijt}(x,t) u_{x_i}^N + a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^N) u_{tx_j}^N \\ & + \sum_{i=1}^n (b_{it}(x,t)\theta_{x_i}^N u_{tt}^N - b_{ij}(x,t)\theta_{tx_i}^N u_{tt}^N) \\ & + d_t(x,t) u_t^N u_{tt}^N + d(x,t)|u_{tt}^N|^2 + (a_t(x,t)u^N + a(x,t)u_t^N) u_{tt}^N \\ & - c_t(x,t)|u^N|^{p-2} u^N u_{tt}^N - c(x,t)(p-1)|u^N|^{p-2} u_t^N u_{tt}^N + \theta_{tt}^N \theta_t^N \\ & + \sum_{i,j=1}^n (d_{ijt}(x,t)\theta_{x_i}^N + d_{ij}(x,t)\theta_{tx_i}^N)\theta_{tx_j}^N + b(x,t)|\theta_t^N|^2 \\ & + b_t(x,t)\theta^N\theta_t^N - \sum_{i=1}^n (b_{it}(x,t)u_t^N + b_i(x,t)u_{tt}^N)\theta_{tx_i}^N \\ & + (q-1)g(x,t)|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2 + g_t(x,t)|\theta^N|^{q-2}\theta^N\theta_t^N \\ & - f_{1t}(x,t)u_{tt}^N - f_{2t}(x,t)\theta_t^N \Big]\, dx\, dt = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Снова преобразуем и оценим слагаемые равенства (3.7). Учитывая условия теоремы, будем иметь

$$\begin{aligned} J_{12} := \int\limits_{Q_\tau} \Big[& u_{ttt}^N u_{tt}^N + \theta_{tt}^N \theta_t^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^N u_{ttx_j}^N \\ & + \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\theta_{tx_i}^N \theta_{tx_j}^N + d(x,t)|u_{tt}^N|^2 + a(x,t)u_t^N u_{tt}^N \\ & + b(x,t)|\theta_t^N|^2 - f_{1t}(x,t)u_{tt}^N - f_{2t}(x,t)\theta_t^N \Big]\, dx\, dt \end{aligned}$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_\tau} \left[\frac{1}{2}|u_{tt}^N|^2 + \frac{1}{2}|\theta_t^N|^2 + \frac{A_1}{2}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2\right] dx$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[|u_{tt}^N|^2\Big(D_0 - \frac{A_0}{2} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{A_0}{2}|u_t^N|^2 - \frac{A_3+1}{4}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2\right.$$

$$\left. + D_1\sum_{i=1}^n |\theta_{tx_i}^N|^2 + \Big(B_0 - \frac{1}{2}\Big)|\theta_t^N|^2 - \frac{1}{2}\big(|f_{1t}(x,t)|^2 + |f_{2t}(x,t)|^2\big)\right] dx\,dt$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2}|u_{tt}^N|^2 + \frac{1}{2}|\theta_t^N|^2 + \frac{A_2+1}{4}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2\right] dx;$$

$$J_{13} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x,t) u_{x_i}^N u_{ttx_j}^N \,dx\,dt = \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x,t) u_{x_i}^N u_{tx_j}^N \,dx$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x,t) u_{x_i}^N u_{tx_j}^N \,dx\,dt - \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x,t) u_{tx_i}^N u_{tx_j}^N \,dx\,dt$$

$$- \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ijtt}(x,t) u_{x_i}^N u_{tx_j}^N \,dx\,dt \geqslant -\frac{A_3}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2\,dx$$

$$- \frac{\delta_3}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^N\,dx - \frac{A_3}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2\,dx\,dt$$

$$- \Big(\frac{A_3}{2} + \frac{1}{2}\Big)\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2\,dx\,dt - \frac{A_4}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2\,dx\,dt,$$

где $A_3 = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum_{i,j=1}^n |a_{ijtt}(x,t)|^2,\ \delta_3 > 0$;

$$J_{14} := \int\limits_{Q_\tau} a_t(x,t) u^N u_{tt}^N\,dx\,dt$$

$$\geqslant -\frac{A_5}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2\,dx\,dt$$

$$\geqslant -A_5\tau\int\limits_{\Omega_0} |u^N|^2 dx - \frac{A_5\tau^2}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2\,dx\,dt,$$

где $A_5 = \operatorname{ess\,sup}_Q |a_t(x,t)|^2$;

$$J_{15} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} b_{it} \theta^N_{tx_i} u^N_t \, dx\, dt$$
$$\geqslant -\frac{\delta_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |\theta^N_{tx_i}|^2 \, dx\, dt - \frac{B_1}{2\delta_1} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 \, dx\, dt;$$

$$J_{16} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} b_{it} \theta^N_{x_i} u^N_{tt} \, dx\, dt \geqslant -\frac{B_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |\theta^N_{x_i}|^2 \, dx\, dt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_{tt}|^2 \, dx\, dt,$$

где $B_1 = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum_{i=1}^n |b_{it}(x,t)|^2$, $\delta_1 > 0$;

$$J_{17} := \int\limits_{Q_\tau} b_t(x,t) \theta^N \theta^N_t \, dx\, dt \geqslant -\frac{B_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^2 \, dx\, dt - \frac{B_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^N_t|^2 \, dx\, dt,$$

где $B_2 = \operatorname{ess\,sup}_Q |b_t(x,t)|^2$;

$$J_{18} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} d_{ijt}(x,t) \theta^N_{x_i} \theta^N_{tx_j} \, dx\, dt$$
$$\geqslant -\frac{D_1}{2\delta_2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |\theta^N_{x_i}|^2 \, dx\, dt - \frac{\delta_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |\theta^N_{tx_i}|^2 \, dx\, dt,$$

где $D_1 = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum_{i,j=1}^n |d_{ijt}(x,t)|^2$, $\delta_2 > 0$;

$$J_{19} := \int\limits_{Q_\tau} d_t(x,t) u^N_t u^N_{tt} \, dx\, dt \geqslant -\frac{D_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 \, dx\, dt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_{tt}|^2 \, dx\, dt,$$

где $D_2 = \operatorname{ess\,sup}_Q |d_t(x,t)|^2$;

$$J_{20} := \int\limits_{Q_\tau} (p-1) c(x,t) |u^N|^{p-2} u^N_t u^N_{tt} \, dx\, dt$$
$$\leqslant \frac{C_0(p-1)}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_{tt}|^2 \, dx\, dt + \frac{C_0(p-1)}{p} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^p \, dx\, dt$$
$$+ \frac{C_0(p-1)(p-2)}{2p} \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^{2p} \, dx\, dt;$$

$$J_{21} := \int\limits_{Q_\tau} c_t |u^N|^{p-2} u^N u^N_{tt}\, dx\, dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_{tt}|^2\, dx\, dt + \frac{C_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^{2(p-1)}\, dx\, dt;$$

$$J_{22} := \int\limits_{Q_\tau} (q-1) g |\theta^N|^{q-2} |\theta^N_t|^2\, dx\, dt \geqslant g_0(q-1) \int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^{q-2} |\theta^N_t|^2\, dx\, dt;$$

$$J_{23} := \int\limits_{Q_\tau} g_t(x,t) |\theta^N|^{q-2} \theta^N \theta^N_t\, dx\, dt$$

$$\geqslant -\frac{\delta_4}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^{q-2} |\theta^N_t|^2\, dx\, dt - \frac{g_1}{2\delta_4} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^q\, dx\, dt,$$

где $\delta_4 > 0,\ g_1 = \operatorname{ess\,sup}_Q |g_t(x,t)|^2$.

Согласно теореме вложения ([4, с. 47])

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^p\, dx\, dt \leqslant \mu_6 \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2\, dx \right)^{p/2} dt,$$

если $p \leqslant \frac{2n}{n-2}$ и $n > 2$ ($p \geqslant 2$ при $n \in \{1, 2\}$), и

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^{2p}\, dx\, dt \leqslant \mu_7 \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^2\, dx \right)^p dt$$

при $\tau \in [0, T_1]$ и $\frac{n-2}{2n} \leqslant \frac{1}{p}$, если $n > 2$; $\mu_6 > 0$, $\mu_7 > 0$. Учитывая оценки интегралов $J_{12} - J_{23}$, из равенства (3.7) получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[\frac{1}{2} |u^N_{tt}|^2 + \frac{1}{2} |\theta^N_t|^2 + \Big(\frac{A_1}{2} - \frac{\delta_3}{2} \Big) \sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 \right] dx$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[\Big(g_0(q-1) - \frac{\delta_4}{2} \Big) |\theta^N|^{q-2} |\theta^N_t|^2 + \sum_{i=1}^n |\theta^N_{tx_i}|^2 \Big(D_1 - \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_2}{2} \Big) \right] dx\, dt$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^2 \frac{A_3}{2\delta_3}\, dx + \int\limits_{Q_\tau} \left[\sum_{i=1}^n |u^N_{tx_i}|^2 \Big(\frac{A_3+1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{A_3+1}{2} \Big) \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+|u_{tt}^N|^2\Big(-D_0+\frac{A_0}{2}+\frac{C_0(p-1)}{2}+\frac{5}{2}\Big)\\
&+|u_t^N|^2\Big(\frac{A_0+A_5\tau^2+D_2}{2}+\frac{B_1}{2\delta_1}\Big)+\frac{\overline{A_0}}{2}|u^N|^2+|\theta_t^N|^2\Big(\frac{B_2+1}{2}-B_0\Big)\\
&+\frac{B_2}{2}|\theta^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\frac{A_4}{2}+\Big(\frac{B_1}{2}+\frac{D_1}{2\delta_2}\Big)\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}^N|^2\\
&+\frac{g_1}{2\delta_4}|\theta^N|^q+\frac{1}{2}\big(|f_{1t}(x,t)|^2+|f_{2t}(x,t)|^2\big)\Big]\,dx\,dt\\
&+\int\limits_{\Omega_0}\Big[\frac{1}{2}|u_{tt}^N|^2+\frac{1}{2}|\theta_t^N|^2+\frac{A_3}{2}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\\
&+\Big(\frac{1}{2}+\frac{A_2+1}{4}\Big)\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2+A_5\tau|u^N|^2\Big]\,dx\\
&+\frac{C_0(p-1)\mu_6}{p}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\,dx\Big)^{p/2}dt\\
&+\frac{\mu_7C_0(p-1)(p-2)}{2p}\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\,dx\Bigg)^p dt\\
&+\frac{\overline{C_0}\mu_1}{2}\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\,dx\Bigg)^{p-1}dt, \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

где $\tau\in[0,T_1]$.

Выберем $A_1>\delta_3,\ 2D_1>\delta_1+\delta_2,\ 2g_0(q-1)>\delta_4$, тогда подынтегральное выражение левой части последнего неравенства будет положительным.

Оценим $\int_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2\,dx,\ \int_{\Omega_0}|\theta_t^N|^2\,dx$. Умножим первые уравнения (3.1) на $c_{ktt}^N(0)$, а уравнения (3.2) на $d_{kt}^N(0)$, полученные равенства просуммируем по k от 1 до N и сложим. После выполнения этих действий, получим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_{tt}^N|^2+|\theta_t^N|^2-\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x,0)u_{0x_i}^N)_{x_j}u_{tt}^N\\
&-\sum_{i,j=1}^n(d_{ij}(x,0)\theta_{0x_i}^N)_{x_j}\theta_t^N-\sum_{i=1}^n(b_i(x,0)u_1^N)_{x_i}\theta_t^N+\sum_{i=1}^n b_i(x,0)v_{x_i}^Nu_{tt}^N\\
&+d(x,0)u_t^Nu_{tt}^N+a(x,t)u^Nu_{tt}^N-c(x,0)|u_0^N|^{p-2}u_0^Nu_{tt}^N+b(x,0)\theta^N\theta_t^N
\end{aligned}
$$

$$+ g(x,0)|\theta_0^N|^{q-2}\theta_0^N\theta_t^N - f_1(x,0)u_{tt}^N - f_2(x,0)\theta_t^N\Big]\,dx = 0.$$

Оценив слагаемые последнего равенства, имеем

$$\int\limits_{\Omega_0}\Big[(1-3\delta)|u_{tt}^N|^2 + \Big(1-\frac{5\delta}{2}\Big)|\theta_t^N|^2\Big]\,dx$$
$$\leqslant \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\Omega_0}\Bigg(\sum_{i,j=1}^n\big[(a_{ij}(x,0)u_{0x_i}^N)_{x_j}\big]^2 + [f_1(x,0)]^2 + [f_1(x,0)]^2$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n\big[(d_{ij}(x,0)v_{0x_i}^N)_{x_j}\big]^2 + \sum_{i=1}^n\big[(b_i(x,0)u_1^N)_{x_i}\big]^2$$
$$+ \sum_{i=1}^n\big[b_i(x,0)v_{0x_i}^N\big]^2\big[g(x,0)|v_0^N|^{q-2}v_0^N\big]^2 + \big[c(x,0)|u_0^N|^{p-2}u_0^N\big]^2$$
$$+ \big[a(x,0)u_0^N\big]^2 + \big[d(x,0)u_1^N\big]^2 + \big[b(x,0)v_0^N\big]^2\Bigg)dx,$$

где $0 < \delta < \frac{1}{3}$.

Принимая во внимание условия на u_0, u_1 и коэффициенты системы (2.1)–(2.2), будем иметь оценку

$$\int\limits_{\Omega_0}\big[|u_{tt}^N|^2 + |\theta_t^N|^2\big]\,dx \leqslant \mu_8,$$

причем μ_8 — некоторая положительная константа, которая не зависит от N.

Применяя лемму Гронуолла–Беллмана к неравенству (3.8), получим

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_{tt}^N|^2 + |\theta_t^N|^2 + \sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\Big]\,dx$$
$$+ \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^n|\theta_{tx_i}^N|^2 + |\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2\Big]\,dx\,dt$$
$$\leqslant \mu_9(\tau) + \mu_{10}(\tau)\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^2\,dx\Bigg)^{p/2}dt,$$

для $\tau \in [0, T_1]$.

Если к последнему неравенству применим лемму Бихари ([5, с. 110]), то:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u_{tt}^N|^2 + |\theta_t^N|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^N|^2 \right] dx + \int\limits_{Q_\tau} \left[\sum_{i=1}^{n} |\theta_{tx_i}^N|^2 + |\theta^N|^{q-2} |\theta_t^N|^2 \right] dx\, dt \leqslant \frac{\mu_{11}(\tau)}{\left[1 - (p/2 - 1)\, \mu_9(\tau)^{p/2-1} \mu_{10}(\tau)\tau\right]^{\frac{1}{p/2-1}}},$$

где $\mu_9(\tau), \mu_{10}(\tau), \mu_{11}(\tau) > 0$, для $\tau \in [0, T_2]$, T_2 — решение неравенства $1 - (p/2 - 1)\mu_9^{p/2-1}(\tau)\mu_{10}(\tau)\tau > 0$. Отсюда,

$$\begin{aligned} &\|u_t^N\|_{L^\infty((0,T_2);H_0^1(\Omega))} \leqslant \mu_{12}, \qquad \|u_{tt}^N\|_{L^\infty((0,T_2);L^2(\Omega))} \leqslant \mu_{12}, \\ &\|\theta_t^N\|_{L^2((0,T_2);H_0^1(\Omega))} \leqslant \mu_{12}, \qquad \||\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2\|_{L^1(Q_{T_2})} \leqslant \mu_{12}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

причем положительная константа μ_{12} не зависит от N.

Выберем $T = \min\{T_1, T_2\}$, тогда на основании (3.6), (3.9) существуют подпоследовательности $\{u^{N_k}\} \subset \{u^N\}$, $\{\theta^{N_k}\} \subset \{\theta^N\}$ такие, что

$$\begin{aligned} &u^{N_k} \to u \ \ast\text{-слабо в} \ \ L^\infty((0,T_0); H_0^1(\Omega)), \\ &u_t^{N_k} \to u_t \ \ast\text{-слабо в} \ \ L^\infty((0,T_0); H_0^1(\Omega)), \\ &u_{tt}^{N_k} \to u_{tt} \ \ast\text{-слабо в} \ \ L^\infty((0,T_0); L^2(\Omega)), \\ &\theta^{N_k} \to \theta \ \ast\text{-слабо в} \ L^\infty((0,T_0); L^2(\Omega)), \\ &\theta^{N_k} \to \theta \ \text{слабо в} \ L^2((0,T_0); L^2(\Omega)) \cap L^q((0,T_0); L^q(\Omega)), \\ &\theta_t^{N_k} \to \theta_t \ \ast\text{-слабо в} \ L^\infty((0,T_0); L^2(\Omega)), \\ &\theta_t^{N_k} \to \theta_t \ \text{слабо в} \ L^2((0,T_0); H_0^1(\Omega)) \ \text{при} \ N_k \to \infty; \ T_0 \in (0,T). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \left| |u^N|^{p-2} u^N \right|^{p'} dx\, dt \leqslant \mu_{13}, \quad \mu_{13} > 0.$$

Следовательно,

$$|u^{N_k}|^{p-2} u^{N_k} \to \chi_0 \ \text{слабо в} \ L^{p'}(Q_{T_0}).$$

Отметим, что последовательность $\{u^N\}$ ограничена в $L^2((0,T_0);$ $H_0^1(\Omega))$, а последовательность $\{u_t^N\}$ ограничена в $L^2((0,T_0);L^2(\Omega))$. Поскольку $H_0^2(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ компактно при $p\in[2,\frac{2n}{n-2})$, $n>2$, то на основании теоремы 5.1 из [7, с. 70] можем считать, что

$$u^{N_k}\to u \ \text{ сильно в } \ L^p((0,T_0);L^p(\Omega))$$

и почти всюду в Q_{T_0}. Соответственно $\chi_0=|u|^{p-2}u$ почти всюду в Q_{T_0}.

Введем оператор

$$A: L^q((0,T_0);L^q(\Omega))\to L^{q'}((0,T_0);L^{q'}(\Omega)),$$

определенный для любых $w,\theta\in L^q((0,T_0);L^q(\Omega))$ формулой

$$\langle A(\theta),w\rangle_{(0,T_0)}=\int\limits_{Q_{T_0}} g(x,t)|\theta|^{q-2}\theta w\,dx\,dt,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(0,T_0)}$ — скалярное произведение между элементами пространства $L^{q'}((0,T_0);L^{q'}(\Omega))$ и $L^q((0,T_0);L^q(\Omega))$.

Кроме того,

$$\int\limits_{Q_{T_0}} \left||\theta^N|^{q-2}\theta^N\right|^{q'}\,dx\,dt\leqslant\mu_{14},\quad \mu_{14}>0.$$

Поэтому

$$\|A(\theta^{N_k})\|_{L^{q'}((0,T_0);L^{q'}(\Omega))}\leqslant\mu_{14}$$

и без ограничения общности можем считать, что

$$A(\theta^{N_k})\to\chi_1 \quad \text{слабо в } \ L^{q'}(Q_{T_0}) \ \text{ при } \ N_k\to\infty.$$

Нетрудно получить равенства

$$\int\limits_{Q_{T_0}}\Big[u_{tt}\tilde\eta+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}\tilde\eta_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\theta_{x_i}\tilde\eta+d(x,t)u_t\tilde\eta$$
$$+a(x,t)u\tilde\eta-c(x,t)|u|^{p-2}u\tilde\eta-f_1(x,t)\tilde\eta\Big]\,dx\,dt=0, \quad (3.10)$$

$$\int\limits_{Q_{T_0}}\Big[\theta_t\eta+\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\theta_{x_i}\eta_{x_j}-\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_t\eta_{x_i}$$

$$+ b(x,t)\theta\eta - f_1(x,t)\eta\Bigg]\,dx\,dt + \langle \chi_1, \eta\rangle_{(0,T_0)} = 0, \quad (3.11)$$

которые выполняются для произвольных $\tilde\eta \in L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q_{T_0})$, $\eta \in L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega)) \cap L^q(Q_{T_0})$, $\tau \in (0,T_0]$, $T_0 \in (0,T)$.

Используя метод монотонности, докажем, что $\chi_1 = A(\theta)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
0 \leqslant y_k &= \langle A(\theta^{N_k}) - A(w), \theta^{N_k} - w\rangle_{(0,T_0)} \\
&= \langle A(\theta^{N_k}), \theta^{N_k}\rangle_{(0,T_0)} - \langle A(w), \theta^{N_k} - w\rangle_{(0,T_0)} - \langle A(\theta^{N_k}), w\rangle_{(0,T_0)} \\
&= \int\limits_{Q_{T_0}} \Bigg[-\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t)\theta^{N_k}_{x_i}\theta^{N_k}_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_t^{N_k}\theta^{N_k}_{x_i} \\
&\qquad - b(x,t)|\theta^{N_k}|^2 - f_2(x,t)\theta^{N_k}\Bigg]\,dx\,dt \\
&\qquad\qquad - \langle A(\theta^{N_k}), w\rangle_{(0,T_0)} - \langle A(w), \theta^{N_k} - w\rangle_{(0,T_0)}.
\end{aligned}$$

Перейдем в этом неравенстве к верхнему пределу при $N_k \to \infty$. Используя лемму 5.3 из [4, с. 20], получим

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int\limits_{Q_{T_0}} \Bigg[&-\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t)\theta_{x_i}\theta_{x_j} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_t\theta_{x_i} - b(x,t)|\theta|^2 - f_2(x,t)\theta\Bigg]\,dx\,dt \\
&\qquad - \langle \chi_1, w\rangle_{(0,T_0)} - \langle A(w), \theta - w\rangle_{(0,T_0)}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

В (3.11), приняв $\eta = \theta$, получим равенство

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_{T_0}} \Bigg[&\theta_t\theta + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t)\theta_{x_i}\theta_{x_j} + b(x,t)\theta^2 \\
&- \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_t\theta_{x_i} - f_2(x,t)\theta\Bigg]\,dx\,dt + \langle \chi_1, \theta\rangle_{(0,T_0)} = 0. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Складывая (3.12) и (3.13), будем иметь неравенство

$$\langle \chi_1 - A(w), \theta - w\rangle_{(0,T_0)} \geqslant 0.$$

Приняв $\theta - w = \lambda\omega,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0,\ \omega \in L^q((0,T_0);L^q(\Omega))$, получим

$$\langle \chi_1 - A(\theta - \lambda\omega), \lambda\omega\rangle_{(0,T_0)} \geqslant 0.$$

Так как $\lambda > 0$, то разделим полученное неравенство на λ. Соответственно при $\lambda \to 0$, принимая во внимание полунепрерывность оператора A, получим

$$\langle \chi_1 - A(\theta), \omega \rangle_{(0,T_0)} \geqslant 0.$$

Поскольку ω произвольное, можем выбрать ω, как положительным, так и отрицательным. Соответственно

$$\chi_1 = A(\theta) \quad \text{в} \quad Q_{T_0}.$$

Принимая во внимание произвольность T_0 в $(0, T)$, утверждение верно и в Q_T.

Из равенств (3.11), (3.10), в частности, вытекает, что функции u, θ удовлетворяют уравнения (2.1), (2.2) в смысле распределений. Тогда из уравнений (2.1), (2.2) нетрудно получить интегральные равенства (2.5), (2.6).

Осталось показать выполнение начальных условий. Из полученных оценок вытекает, что $u : [0, T_0] \to H_0^1(\Omega)$ непрерывная функция и $u^{N_k}(\cdot, 0) \to u(\cdot, 0)$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, и поскольку $u^{N_k}(\cdot, 0) = u_0^{N_k}(\cdot) \to u_0(\cdot)$ в $H_0^1(\Omega)$, то $u(x, 0) = u_0(x)$. Принимая во внимание факт, что $u_{tt} \in L^\infty((0, T_0); L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2((0, T_0); H_0^1(\Omega))$, тогда $u_t : [0, T_0] \to L^2(\Omega)$ — непрерывная функция. Имеем, что $u_t^{N_k}(\cdot, 0) \to u_t(\cdot, 0)$ слабо в $L^2(\Omega)$, и поскольку $u_t^{N_k}(\cdot, 0) = u_1^{N_k}(\cdot) \to u_1(\cdot)$ в $L^2(\Omega)$, следовательно $u_t(x, 0) = u_1(x)$. Аналогично показываем, что $\theta(x, 0) = \theta_0(x)$. Значит, выполняются начальные условия,что и завершает доказательство теоремы. □

4. Частный случай

Предположим теперь, что коэффициенты системы (2.1)–(2.2) не зависят от t, а $f_1(x, t) = f_2(x, t) \equiv 0$ почти для всех $(x, t) \in Q$. Рассмотрим функционал

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + a(x) u^2 + \theta^2 \right] dx - \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega_\tau} c(x) |u|^p \, dx. \tag{4.1}$$

Нам понадобится следующая

Лемма 4.1. *Пусть для коэффициентов системы* (2.1)–(2.2) *выполняются условия* ($\mathbf{H_1}$)–($\mathbf{H_5}$), *и, кроме того,* $E(t) = -\lambda < 0$ *для всех* $t > 0$, *где* $\lambda > 0$. *Тогда* $E'(t) \leqslant 0$.

Доказательство. Продифференцируем (4.1) по t

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left[u_{tt}u_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} u_{tx_j} + a(x) u u_t + \theta\theta_t - c(x)|u|^{p-2} u u_t \right] dx.$$

Принимая во внимание (2.5)–(2.6), будем иметь

$$\begin{aligned} E'(t) = -\int\limits_{\Omega_\tau} \Bigg[& \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i} u_t + d(x)u_t^2 + b(x)\theta^2 \\ & + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x)\theta_{x_i}\theta_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i} u_t + g(x)|\theta|^q \Bigg] dx \\ = -\int\limits_{\Omega_\tau} & \left[d(x)u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x)\theta_{x_i}\theta_{x_j} + b(x)\theta^2 + g(x)|\theta|^q \right] dx \leqslant 0. \end{aligned}$$

□

Соответственно, $E(t) \leqslant E(0) < 0$. Заметим, что лемма верна и при $E(0) \leqslant 0$.

Теорема 4.1. *Пусть для коэффициентов системы* (2.1)–(2.2) *выполняются условия* $(\mathbf{H_1})$–$(\mathbf{H_5})$, *и, кроме того,* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^{2(p-1)}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega)$, $E(0) = -\lambda < 0$, $2 < p \leqslant \dfrac{n}{n-2}$ *при* $n > 2$ *и* $p > 2$ *при* $n \in \{1, 2\}$, $q > 2$. *Тогда не существует глобального обобщенного решения задачи* (2.1)–(2.4).

Доказательство. Предположим, что существует глобальное обобщенное решение (u, θ) задачи (2.1)–(2.4).

Введем функции

$$H(t) = -E(t), \quad L(t) = [H(t)]^{1-\alpha} + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} u u_t \, dx + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega_t} d(x)|u|^2 \, dx,$$

где $\varepsilon > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим

$$L'(t) = (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[u_t^2 + u u_{tt} + d(x) u u_t \right] dx.$$

На основании равенства (2.5) при $w = u$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_{tt}u+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\theta_{x_i}u+d(x)uu_t$$
$$+a(x)u^2-c(x)|u|^p\Big]\,dx=0.$$

Поэтому

$$L'(t)=(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+m\varepsilon H(t)$$
$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_t^2-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\theta_{x_i}u-a(x)u^2+c(x)|u|^p\Big]\,dx$$
$$-\frac{m\varepsilon}{p}\int\limits_{\Omega_t}c(x)|u|^p\,dx+\frac{m\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+a(x)u^2+\theta^2\Big]\,dx$$
$$=(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\Big(1+\frac{m}{2}\Big)\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}u_t^2\,dx$$
$$+\Big(\frac{m}{2}-1\Big)\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+a(x)u^2\Big]\,dx$$
$$+\frac{m\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}|\theta|^2\,dx-\varepsilon\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\theta_{x_i}u\,dx$$
$$+\varepsilon\Big(1-\frac{m}{p}\Big)\int\limits_{\Omega_t}c(x)|u|^p\,dx+m\varepsilon H(t)$$

при $2<m<p$.

Преобразуем и оценим слагаемые последнего равенства:

$$J_{24}:=-\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\theta_{x_i}udx\geqslant-\frac{B_3}{2\delta_5}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|\theta_{x_i}|^2\,dx-\frac{\delta_5}{2}\int\limits_{\Omega_t}u^2\,dx,$$

где $\delta_5>0,\ B_3=\operatorname{ess\,sup}_Q\sum_{i=1}^{n}|b_i(x)|^2$;

$$J_{25}:=(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)$$
$$\geqslant(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\nu_0\int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{i=1}^{n}|\theta_{x_i}|^2+|u_t|^2+|\theta|^q\Big]\,dx.$$

Выберем $\delta_5=\delta_6H^{\alpha}(t),\ \delta_6>0$ и оценим

$$
\begin{aligned}
J_{26} := H^{\alpha}(t)\int\limits_{\Omega_t}|u|^2\,dx \leqslant \mu_{15}\Big(\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx\Big)^{\alpha}\int\limits_{\Omega_t}|u|^2\,dx \\
\leqslant \mu_{16}\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx + \mu_{17}\Big(\int\limits_{\Omega_t}|u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
\leqslant \mu_{18}\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx + \mu_{19}\Big(\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p(1-\alpha)}}.
\end{aligned}
$$

Если $\int_{\Omega_t}|u|^p\,dx \geqslant 1$, тогда

$$
\Big(\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p(1-\alpha)}} \leqslant \int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx
$$

при $\alpha \leqslant \frac{p-2}{p}$. Если $\int_{\Omega_t}|u|^p\,dx < 1$, тогда на основании теоремы вложения Соболева имеем

$$
\Big(\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p(1-\alpha)}} \leqslant \Big(\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p}} \leqslant \mu_{17}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx
$$

при $p \leqslant \frac{2n}{n-2}$, если $n > 2$, и $p > 2$ при $n \in \{1,2\}$. Отсюда,

$$
J_{26} \leqslant \mu_{18}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2 + |u|^p\Big]\,dx.
$$

Учитывая полученные оценки интегралов J_{24}–J_{25}, будем иметь

$$
\begin{aligned}
L'(t) \geqslant (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\Big(\nu_0 - \frac{\varepsilon B_3}{\delta_6}\Big)\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|\theta_{x_i}|^2\,dx \\
+ m\varepsilon H(t) + \varepsilon\Big(1+\frac{m}{2}\Big)\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t|^2\,dx \\
+ \varepsilon\Big(\frac{m}{2} - 1 - \frac{\delta_{18}\delta_6}{A_1}\Big)\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx + \varepsilon\Big(\frac{m}{2}-1\Big)\int\limits_{\Omega_\tau}a(x)|u|^2\,dx \\
+ \varepsilon\Big(1 - \frac{m}{p} - \frac{\delta_6\mu_{18}}{C_0}\Big)\int\limits_{\Omega_\tau}c(x)|u|^p\,dx + \frac{m\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\theta|^2\,dx
\end{aligned}
$$

$$\geqslant \mu_{19}\left[H(t)+\int\limits_{\Omega_t}\left[u_t^2+u^2+|\theta|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2+|u|^p\right]dx\right]$$
$$\geqslant \mu_{19}\big[H(t)+\|u_t\|^2+\|D^1u\|^2+\|u\|_p^p+\|u\|^2+\|\theta\|^2\big]$$

при $\varepsilon<\frac{\nu_0\delta_6}{B_2}$, $\delta_6<\min\left\{\frac{A_1(m-2)}{2\mu_{18}};\frac{C_0(p-m)}{p\mu_{18}}\right\}$.

Рассмотрим

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant\mu_{20}\left(H(t)+\varepsilon_1\left|\int\limits_{\Omega_t}uu_t\,dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}+\varepsilon_1\left|\int\limits_{\Omega_t}d(x)|u|^2\,dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right),\quad \varepsilon_1=\varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Оценим слагаемые этого неравенства

$$I_{27}:=\left|\int\limits_{\Omega_t}uu_t\,dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant\mu_{21}\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p(1-\alpha)}}\left(\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$$
$$\leqslant\mu_{22}\left[\int\limits_{\Omega_t}u_t^2\,dx+\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{(1-2\alpha)p}}\right]$$
$$=\mu_{22}(\|u(\cdot,t)\|_p^s+\|u_t(\cdot,t)\|_2^2),$$

где $s=\frac{2}{1-2\alpha}$, $2\leqslant s\leqslant p$, $\alpha\leqslant\frac{p-2}{2p}$;

$$I_{28}:=\left|\int\limits_{\Omega_t}d(x)|u|^2\,dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant\mu_{23}\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p(1-\alpha)}}=\mu_{23}\|u(\cdot,t)\|_p^{s_1},$$

где $s_1=\frac{2}{1-\alpha}$, $2\leqslant s_1\leqslant p$, $\alpha\leqslant\frac{p-2}{p}$. Если $\|u(\cdot,t)\|_p\leqslant1$, то на основании теоремы вложения Соболева $\|u(\cdot,t)\|_p^s\leqslant\|u(\cdot,t)\|_p^2\leqslant\mu_{24}\|D^1u(\cdot,t)\|_2^2$, если $p\leqslant\frac{2n}{n-2}$ при $n>2$ и $p>2$ при $n\in\{1,2\}$. Если $\|u(\cdot,t)\|_p>1$, то $\|u(\cdot,t)\|_p^s\leqslant\|u(\cdot,t)\|_p^p$.

Следовательно,

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant\mu_{24}\big[H(t)+\varepsilon_1\mu_{25}\big(\|u_t(\cdot,t)\|_2^2+\|D^1u(\cdot,t)\|_2^2+\|u(\cdot,t)\|_p^p+\|u(\cdot,t)\|_2^2+\|\theta(\cdot,t)\|_2^2\big)\big].$$

Отсюда,

$$L'(t)\geqslant\mu_{26}[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}.\tag{4.2}$$

Поскольку $H(0) = \lambda > 0,\ H'(t) \geqslant 0$, можем выбрать ε таким, что

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} u_0 u_1\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega_t} d(x) u_0^2\, dx \geqslant \frac{\lambda}{2}.$$

Обозначим $\gamma = \frac{1}{1-\alpha},\ \gamma > 1$. Проинтегрируем обе части неравенства (4.2) от 0 до t и получим

$$L^{\gamma-1}(t) \geqslant \frac{1}{L^{1-\gamma}(0) - \mu_{26}(\gamma-1)t}.$$

Соответственно, существует такое T_0, что $L(t) \to +\infty$ при $t \to T_0 - 0$, а $\lim_{t\to T_0-0} H(t) = +\infty$. Но, поскольку,

$$H(t) \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega_t} c(x)|u|^p\, dx,$$

то

$$\lim_{t\to T_0-0} \int\limits_{\Omega_t} |u|^p\, dx = +\infty.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Литература

[1] R. F. Apolaya, H. R. Clark, A. J. Feitosa, *On a nonlinear coupled system with internal damping* // Electronic Journal of Differential Equations, **2000** (2000), N 64, 1–17.

[2] H. R. Clark, L. P. San Gil Jutuca, M. M. Miranda, *On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients* // Electronic Journal of Differential Equations, **1998** (1998), N 04, 1–20.

[3] M. R. Clark, O. A. Lima, *On a mixed problem for a coupled nonlinear system* // Electronic Journal of Differential Equations, **1997** (1997), N 06, 1–11.

[4] Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные дифференциальные уравнения*, М., 1978, 336 с.

[5] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, М., 1967, 472 с.

[6] V. Komornik, E. Zuazua, *A direct method for boundary stabilization of the wave equation* // J. Math. Pure et Appl., **69** (1990), 33–54.

[7] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М., 1972.

[8] L. A. Medeiros, M. M. Miranda, *On a boundary value problem for wave equations: Existence, uniqueness-asymptotic behavior* // Revista de Matematicas Aplicadas, Univerdidade de Chile, **17** (1996), 47–73.

[9] S. A. Messaoudi, *A blowup result in a multidimensional semilinear thermoelastic system* // Electronic Journal of Differential Equations, **2001** (2001), N 30, 1–9.

[10] M. O. Nechepurenko, *The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in a bounded domain* // Visnyk Lvivskogo Univ. Ser. Mech-Math., **67** (2007), 207–223.

[11] L. I. Schiff, *Non-linear meson theory of nuclear forces* // J. Physic. Rev., (1951), N 84, 1–9.

[12] H. W. Scott, *Exponential energy decay in linear thermoelastic rod* // Journal of Math. Analysis and Applications, **167** (1992), 429–442.

[13] I. E. Segal, *The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction* // Bull. Soc. Math. France, (1963), N 91, 129–135.

[14] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, М.: Наука, 1988, 336 с.

[15] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1958, 474 с.

Сведения об авторах

Максим Нечепуренко, Галина Торган

кафедра математической экономики
и эконометрии,
механико-математический факультет,
Львовский национальный университет
им. Ивана Франко,
79000, Львов
Украина
E-Mail: m.nechepurenko@mfc.in.ua,
torgan_g@yahoo.com