Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 1, 39 – 48

О замыкании первой группы Григорчука

Юрий Г. Леонов

(*Представлена И. В. Протасовым*)

Аннотация. В работе рассматривается замыкание (в естественной топологии) известной периодической самоподобной группы. Указывается конечно-порожденная группа с таким же замыканием, не изоморфная группе Григорчука.

2000 MSC. 20F50, 20E08, 20F65.

Ключевые слова и фразы. Автоморфизм дерева, группа Григорчука, замыкание в группе автоморфизмов дерева.

Первая группа Григорчука Gr, построенная в работе [1] является одной из наиболее известных конечно-порожденных бесконечных 2-групп. Построение этой группы позволило ответить на ряд известных проблем (проблема Милнора о групповом росте и т.п.). Большинство ее свойств хорошо изучены в последние годы (см., например, [2, 3]), однако в то же время остается большое число нерешенных проблем, связанных с данной группой.

В данной работе мы рассматриваем замыкание $\overline{Gr}$ группы Gr в естественной топологии в группе автоморфизмов бинарного дерева. Впервые такое замыкание было описано Р. И. Григорчуком ([3]). Недавно в работе [4] было также описано замыкание первой группы Григорчука другими методами. Мы укажем еще один способ явного описания замыкания группы Gr. Это дает нам возможность построить конечно-порожденную не периодическую группу G, замыкание которой совпадает с замыканием группы Григорчука $\overline{Gr}$.

Статья поступила в редакцию 15.06.2009

ISSN 1810 – 3200.

1. Группа Григорчука Gr и базовая конечная группа L

Пусть $X = \{0, 1\}$. Группу Григорчука удобно интерпретировать как группу преобразований множества неограниченных последовательностей X^ω над алфавитом из множества X. А именно, для любой последовательности $\alpha = \alpha_0\alpha_1, \ldots \in X^\omega$ определим преобразование a по правилу $a(\alpha) = \bar{\alpha}_0\alpha_1, \ldots$, где $\bar{t} = 1-t$, $t \in X$. Пусть $\bar{\alpha} = \alpha_1\alpha_2, \ldots$ — сдвиг влево последовательности α. Определим также преобразования b, c, d по правилу: для любых $\alpha \in X^\omega$ полагаем

$$b(\alpha) = \begin{cases} 0a(\bar{\alpha}), & \alpha_0 = 0 \\ 1c(\bar{\alpha}), & \alpha_0 = 1 \end{cases},$$

$$c(\alpha) = \begin{cases} 0a(\bar{\alpha}), & \alpha_0 = 0 \\ 1d(\bar{\alpha}), & \alpha_0 = 1 \end{cases},$$

$$d(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \alpha_0 = 0 \\ 1b(\bar{\alpha}), & \alpha_0 = 1 \end{cases}.$$

Группа Gr [1] порождается элементами a, b, c, d с операцией суперпозиции преобразований. Очевидно $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = 1$. Вообще говоря, группа Григорчука Gr является подгруппой группы автоморфизмов $Aut\, T_2$ дерева T_2, то есть ее элементы действуют на регулярном корневом бесконечном дереве T_2 (от каждой вершины вниз исходит ровно 2 ребра). Таким образом, элемент a переставляет два поддерева первого уровня между собой. Остальные порождающие определяются рекуррентно следующим образом: $b = (a, c)$, $c = (a, d)$, $d = (e, b)$, где e — нейтральный элемент группы, а (g_0, g_1) означает действие элемента g_i на поддерево с номером корневой вершины i.

Группа Григорчука является самоподобной группой. Это значит, множество сужений действия ее элементов на любое поддерево образует саму группу Gr. Пусть v — некоторая вершина дерева T_2. Множество вершин дерева задается множеством конечных последовательностей X^* алфавита X. Будем считать, что для вершины v левый и правый непосредственный потомок это, соответственно, вершины $v0$ и $v1$. Для элемента $g \in Gr$ сужение его действия на поддерево с корнем v обозначим $g|_v$ и назовем проекцией элемента g вдоль пути v. Ясно, что $g|_v \in Gr$. Факт перестановки между собой поддеревьев с вершинами $v0$ и $v1$ элементом g, можно отметить элементом $g\{v\} \in \mathbb{Z}_2$. Если g переставляет эти поддеревья между собой, то положим $g\{v\} = 1$ и, если не переставляет, то положим $g\{v\} = 0$. Так,

$a\{\varnothing\} = 1$, $b\{\varnothing\} = 0$, где $\varnothing$ — корень дерева T_2. Отметим, что если $g_1, g_2 \in AutT_2$, то $(g_1g_2)|_v = g_1|_{v'}\, g_2|_v$, где вершина $v' = g_2v$ — образ действия автоморфизма g_2 на вершину v.

В работе [5] указана конечная группа, которую в некотором смысле можно считать базовой для группы Григорчука. Группа L является расширением группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ посредством $\mathbb{Z}_2$. Ее элементы удобно представлять в виде четверки $(\varepsilon, (j_0, j_1), \tau)$ элементов кольца $\mathbb{Z}_2$ с групповой операцией умножения по правилу:

$$(\varepsilon, (j_0, j_1), \tau)\cdot(\varepsilon', (j_0', j_1'), \tau') = (\varepsilon+\varepsilon', (j_0+j_0', j_1+j_1'), \tau+\tau'+\varepsilon\cdot(j_0+j_0')).$$

Отображение $\chi : Gr \to L$, заданное на порождающих a, b, c группы Григорчука по правилу

$$\chi(a) = (1, (0, 0), 0), \quad \chi(b) = (0, (1, 1), 0), \quad \chi(c) = (0, (1, 0), 0),$$

продолжается до гомоморфизма этих групп.

Пусть $g \in Gr$ представлен в виде слова в системе порождающих $\{a, b, c, d\}$. Канонический вид элемента в этом случае следующий $g = (a)x_1ax_2a\cdots x_n(a)$ (в начале и в конце слова могут быть элементы a). Согласно работе [5], определим гомоморфизм $I : Gr \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ по правилу $I(b) = (1, 1)$, $I(c) = (1, 0)$, $I(g) = I(x_1x_2\ldots x_n)$. Если $I(g) = (z_0, z_1)$, то обозначим $I(g)_0 = z_0$, $I(g)_1 = z_1$.

Это дает нам возможность получить значение $\chi(g) = (\varepsilon, (j_0, j_1), \tau)$ в замкнутом виде:

$$\varepsilon = g\{\varnothing\}, \quad (j_0, j_1) = I(g), \quad \tau = I(g|_0)_1.$$

Основным результатом, связывающим конечную группу L и группу Григорчука, является следующий:

Теорема 1.1 ([5]). Пусть $g \in Aut\,T_2$, $g|_i = g_i \in Gr$, $\chi(g_i) = (\varepsilon_i, (j_{0i}, j_{1i}), \tau_i)$, $i = 0, 1$. Тогда $g \in Gr$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:

$$\varepsilon_i = j_{0\bar{i}} + j_{1\bar{i}},\ \tau_0 + \tau_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1, \tag{1.1}$$

для $i \in X$ и $\bar{i} = 1 - i$.

Пусть X^n — множество последовательностей длины n алфавита X. Будем считать $X^0 = \{\varnothing\}$. В группе $Aut\,T_2$ естественным образом определяется топология (метрика Бера) с расстоянием dist между элементами $x, y \in Aut\,T_2$, определенным следующим образом:

$$\operatorname{dist}(x, y) = 2^{-n},$$

где
$$n = \sup\{m\,;\, x(v) = y(v),\ \text{для всех } v \in X^l, 0 \le l \le m\}.$$

Пусть $\overline{Gr}$ — подгруппа группы $Aut\,T_2$, полученная в результате замыкания группы Григорчука относительно топологии, описанной выше. Применяя теорему 1.1 для проекций $g|_i$ и далее по индукции, мы можем определить является ли автоморфизм g дерева T_2 элементом группы $\overline{Gr}$. Ниже мы получим замкнутое описание элементов группы $\overline{Gr}$.

Для натурального n рассмотрим группу автоморфизмов первых n уровней дерева T_2, то есть группу автоморфизмов конечного дерева $T_{2,n}$. Эта группа является силовской 2-подгруппой симметрической группы степени 2^n и изоморфна группе Калужнина $P_{2,n}$, которую можно построить по индукции при помощи сплетений. А именно, множество этих групп определяется рекуррентно следующим образом. Положим
$$P_{2,0} = \mathbb{Z}_2, P_{2,n} = P_{2,n-1} \wr \mathbb{Z}_2,\ \text{при } n > 0.$$

Согласно [6], каждый элемент группы Калужнина $y \in P_{2,n}$ можно представить в виде таблицы
$$y = [y_{0,1}, y_{1,1} + y_{1,2}t_1, \dots, y_{n,1} + y_{n,2}t_1 + \dots + y_{n,2^n}t_1 \cdots t_n].$$

Здесь на k месте ($k = 0, 1, \dots, n$) в таблице стоят многочлены $y_k(t_1, \dots, t_k)$, которые являются представителями минимальной степени классов смежности кольца многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_k]$ по модулю идеала, порожденного многочленами вида $t_1^2 - t_1, \dots, t_k^2 - t_k$. Такие многочлены называются редуцированными. Операция произведения в таблицах определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}&[y_0, y_1(t_1), y_2(t_1,t_2), \dots] \cdot [z_0, z_1(t_1), z_2(t_1,t_2), \dots] \\ &\qquad = [y_0 + z_0, y_1(t_1) + z_1(t_1 + y_0), y_2(t_1,t_2) \\ &\qquad\qquad + z_2(t_1 + y_0, t_2 + y_1(t_1)), \dots].\end{aligned}$$

Пусть $\psi_n : Aut\,T_2 \to P_{2,n}$ — естественный мономорфизм из группы автоморфизмов регулярного дерева в группу автоморфизмов первых n уровней дерева. Обозначим
$$a_n = \psi_n(a), \quad b_n = \psi_n(b), \quad c_n = \psi_n(c), \quad d_n = \psi_n(d).$$

Рассмотрим группу $Gr_n = \langle a_n, b_n, c_n, d_n \rangle$. Нетрудно получить интерпретацию ее порождающих элементов в терминах таблиц [5]. Имеем
$$a_n = [1, 0, 0, \dots],$$

$$z = [0, C(z,1)(t_1+1), C(z,2)t_1(t_2+1), \ldots, C(z,n)t_1t_2\ldots t_{n-1}(t_n+1)],$$

где

$$C(b,i) = \begin{cases} 0, & i \equiv 0 \mod 3 \\ 1, & i \not\equiv 0 \mod 3 \end{cases},$$

$$C(c,i) = \begin{cases} 0, & i \equiv 2 \mod 3 \\ 1, & i \not\equiv 2 \mod 3 \end{cases}.$$

Рассмотрим группу $R = \langle [0,1,t_2], [0,0,t_1] \rangle$, $R \trianglelefteq P_{2,2}$.

Лемма 1.1. Отображение

$$\rho : (\varepsilon, (j_0, j_1), \tau) \mapsto [\varepsilon, j_1t_1 + j_1, \tau t_2 + j_2t_1t_2]R$$

является изоморфизмом группы L в фактор-группу $P_{2,2}/R$.

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

Рассмотрим

$$y = [y_0, y_{1,0} + y_{1,1}t_1, y_{2,0} + y_{2,1}t_1 + y_{2,2}t_2 + y_{2,3}t_1t_2] \in P_{2,2}.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\hat{\rho} : P_{2,2} \to L$, действующий по правилу:

$$\hat{\rho} :\ y \ \mapsto (y_0, (y_{1,1}, y_{2,3}), y_{1,0} + y_{1,1} + y_{2,2}), \tag{1.2}$$

который является односторонним обратным. В этом случае элемент y лежит в смежном классе $\rho(\hat{\rho}(y))$.

Отметим, что указанный изоморфизм ρ согласуется с представлением образов порождающих группы Григорчука в группе L в терминах таблиц. А именно,

$$\rho(\chi(a)) = [1,0,0]R, \quad \rho(\chi(b)) = [0, t_1+1, t_1(t_2+1)]R,$$

$$\rho(\chi(c)) = [0, t_1+1, 0]R.$$

Пусть $\hat{\psi}_n : P_{2,n} \to Aut\, T_{2,n}$ — изоморфизм групп, определенный следующим образом. Для $y = [y_0, y_1(t_1), \ldots, y_n(t_1, \ldots, t_n)] \in P_{2,n}$ выбираем $g = \hat{\psi}_n(y)$ путем расстановки преобразований поддеревьев элементом g для каждой вершины конечного дерева $T_{2,n}$: $g\{\varnothing\} = y_0$ и $g\{v\} = y_i(v_1, \ldots, v_i)$, где $v \in X^i$, $v = v_1v_2\cdots v_i$, для $i = 1, \ldots, n$. Корректность этого выбора основывается на теории таблиц Калужнина.

Лемма 1.2. Пусть $y \in R$. Тогда действие автоморфизма $g = \hat{\psi}_2(y) \in Aut\, T_{2,2}$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$g\{1\} + g\{00\} + g\{01\} = g\{0\} + g\{10\} + g\{11\} = 0 \in \mathbb{Z}_2.$$

Доказательство. Группа R порядка 8 определена своими порождающими $[0,1,t_2]$ и $[0,0,t_1]$. Отсюда следует, что общий вид элемента этой группы следующий: $y=[0,A,At_2+Bt_1+C]$, $A,B,C\in\mathbb{Z}_2$. Утверждение леммы проверяется непосредственно применением отображения $\hat{\psi}_2$. $\square$

Из леммы 1.2 следуют условия на элемент замыкания группы Григорчука $\overline{Gr}$, как на автоморфизм дерева T_2.

Теорема 1.2. Пусть $g\in Aut\,T_2$. Тогда $g\in\overline{Gr}$ в том и только в том случае, если для каждой вершины дерева T_2, имеющей код $v\in X^*$, для $i\in X$, $\bar{i}=1-i$ выполняются равенства в кольце $\mathbb{Z}_2$:

$$g\{v\bar{i}\}=g\{vi0\}+g\{vi1\}+g\{vi00\}+g\{vi01\}+g\{vi10\}+g\{vi11\} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}g\{v0\}\cdot g\{v1\}=g\{v01\}+g\{v000\}+g\{v001\}\\ +g\{v11\}+g\{v100\}+g\{v101\}.\end{aligned} \quad (1.4)$$

Доказательство. Пусть $y=[y_0,y_{1,0}+y_{1,1}t_1,y_{2,0}+y_{2,1}t_1+y_{2,2}t_2+y_{2,3}t_1t_2]\in P_{2,2}$. Рассмотрим $(\varepsilon,(j_0,j_1),\tau)=\hat{\rho}(y)\in L$ и $\hat{y}=\hat{\psi}_2(y)\in Aut\,T_2$. Согласно сказанному выше об отображении $\hat{\psi}_2$, элемент $\hat{y}$ имеет следующие действия на дереве:

$$\hat{y}\{0\}=y_{1,0},\ \hat{y}\{1\}=y_{1,0}+y_{1,1},\ \hat{y}\{00\}=y_{2,0},\ \hat{y}\{01\}=y_{2,0}+y_{2,2},$$

$$\hat{y}\{10\}=y_{2,0}+y_{2,1},\ \hat{y}\{11\}=y_{2,0}+y_{2,1}+y_{2,2}+y_{2,3}.$$

Отсюда, и из (1.2) получаем

$$\hat{y}\{1\}+\hat{y}\{00\}+\hat{y}\{01\}=y_{1,0}+y_{1,1}+y_{2,2}=\tau, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}\hat{y}\{0\}+\hat{y}\{1\}+\hat{y}\{00\}+\hat{y}\{01\}+\hat{y}\{10\}+\hat{y}\{11\}\\ =y_{1,1}+y_{2,3}=j_0+j_1.\end{aligned} \quad (1.6)$$

Пусть $g\in\overline{Gr}$. Покажем выполнение условий теоремы.

Зафиксируем вершину дерева $v\in X^n$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Рассмотрим элементы $h_i=g|_{vi}\in\overline{Gr}$, $i\in X$ и их конечные образы $\hat{h}_i=\hat{\psi}_2(\psi_2(h_i))\in Aut\,T_{2,2}$ (элемент $\psi_2(h_i)$ принадлежит $P_{2,2}$). Из определения замыкания группы Григорчука следует, что найдется $\tilde{g}\in Gr$, с таким же действием на первые $n+2$ уровня дерева, как и у элемента g. Обозначим $\tilde{g}_i=\tilde{g}|_{vi}$. Элементы $\psi_2(h_i)$ и $\psi_2(\tilde{g}_i)$ равны в группе $P_{2,2}$. Поэтому, можно рассмотреть образ $\hat{\rho}$ этих элементов и воспользоваться теоремой 1.1. Заметим, что $\hat{h}_i\{i_1\}=g\{vii_1\}$, $\hat{h}_i\{i_1i_2\}=g\{vii_1i_2\}$,

$i_1, i_2 \in X$. Применяя (1.5) и (1.6), получаем требуемые в теореме соотношения.

Обратно, пусть для элемента $g \in Aut\,T_2$ и для любой вершины $v \in X^m$, $m \le n+2$ выполняются соотношения (1.3) и (1.4). Как и в случае необходимости, рассмотрим элементы $h_i = g|_{vi} \in \overline{Gr}$ и образы $\hat\rho(\psi_2(h_i))$, $i \in X$. Соотношения нашей теоремы повторяют условия достаточности теоремы 1.1. Следовательно, существует элемент группы Григорчука $\tilde g$ с условиями равенства $\hat\rho(\psi_2(g|_v)) = \chi(\tilde g|_v)$. Так как из условия $\chi(g|_v) = (\varepsilon, (j_0, j_1), \tau)$ следует $g\{v\} = \varepsilon$, то мы получаем совпадение действий элементов g и $\tilde g$ на дереве до уровня n включительно. Следовательно, $g \in \overline{Gr}$. □

2. Самоподобная группа W и ее свойства

Рассмотрим рекуррентно заданные элементы x, u, z, w, q группы $Aut\,T_2$. Имеем,

$$z = (q, x)1, \quad x = (r, z), \quad r = (u, z), \quad u = (x, e), \quad q = (z, r),$$

где 1 означает, что элемент переставляет местами два поддерева первого уровня. По построению группа $W = \langle z, x, r, u, q\rangle$ является самоподобной. Ниже мы выясним некоторые ее свойства. Пусть $\overline{W}$ — замыкание группы W в группе $Aut\,T_2$.

Лемма 2.1. Группа $\overline{W}$ является подгруппой группы $\overline{Gr}$.

Доказательство. Покажем, что порождающие элементы группы W удовлетворяют условию теоремы 1.2. Из рекуррентного построения этих элементов следует, что достаточно показать выполнение этого условия для вершины $v = \varnothing$.

Таким образом, если $g \in \{x, u, z, w, q\}$, то будем требовать выполнение равенств в кольце $\mathbb{Z}_2$:

$$g\{0\} = g\{10\} + g\{11\} + g\{100\} + g\{101\} + g\{110\} + g\{111\},$$

$$g\{1\} = g\{00\} + g\{01\} + g\{000\} + g\{001\} + g\{010\} + g\{011\},$$

$$g\{0\} \cdot g\{1\} = g\{01\} + g\{000\} + g\{001\} + g\{11\} + g\{100\} + g\{101\}.$$

Эти равенства на порождающих проверяются непосредственно. Например, согласно определению элемента z,

$$z\{\varnothing\} = z\{00\} = z\{11\} = z\{011\} = z\{101\} = 1,$$

а для остальных вершин $v \in X^l$, $1 \le l \le 3$ выполняется $z\{v\} = 0$.

Условия (1.3) и (1.4) теоремы 1.2 являются критерием для элементов группы Григорчука, поэтому они замкнуты относительно групповой операции. Следовательно, если этим условиям удовлетворяют порождающие элементы группы, то им удовлетворяет любой элемент группы. Отсюда следует утверждение леммы. □

Рассмотрим множество элементов группы W, порожденных множеством элементов $\{z, x, r, u, q\}$ с положительными степенями. Это множество является полугруппой W^+ относительно групповой операции группы W.

Лемма 2.2. Полугруппа W^+ не имеет кручения.

Доказательство. Утверждение леммы следует из того факта, что любой элемент $g \in W^+$, представленный словом графической длины > 0 над порождающими элементами, отличен от нейтрального элемента. Пусть

$$St_1W = \{g \in W\ ;\ g\{\varnothing\} = 0\}$$

множество элементов группы W, не переставляющих поддеревья первого уровня между собой. Отметим, что любой элемент $g \notin St_1W$ тогда и только тогда, когда сумма степеней порождающего z, входящего в запись этого слова, является нечетным числом.

Пусть элемент $g \in W^+$ представлен в виде слова от порождающих группы W. Графической длиной этого слова назовем сумму степеней всех порождающих элементов в данном слове. Покажем по индукции по графической длине слова, что для любого $g \in W^+$ найдется вершина дерева $v \in X^*$, для которой слово (проекция) $g|_v \notin St_1W$.

База индукции очевидна. Предполагая верность утверждения индукции для слов графической длины $< n$, рассмотрим слово $g \in W^+$ длины n. Так как слово имеет в своей записи порождающие только в положительных степенях, то графическая длина слова на проекции может уменьшиться если, и только если, в записи слова g есть порождающий u. Если в записи слова g нет u, но есть r, то порождающий u встретится в записи слова на одной из проекций g (в силу положительности степеней порождающих, сокращения вида $u \cdot u^{-1}$ невозможны). При этом длина слова на проекции не изменится. Если в графической записи слова g нет ни u, ни r, но есть x или q, то аналогично рассуждаем для одной из проекций слова g, которая обязана содержать в своей записи порождающий r. Если же в записи слова g нет и этих порождающих, то тогда $g = z^n$. В этом случае можно рассмотреть проекцию $g|_0 = qx\ldots$, удовлетворяющую нашим рассуждениям. Таким образом, для любого слова $g \in W^+$ найдется вершина уровня ≤ 3, проекция вдоль которой является словом, содержащим в своей графической записи порождающий u. Не ограничивая общности, пусть g — такое слово. Тогда, либо $g|_0$, либо $g|_1$ слово меньшей длины. Мы можем воспользоваться индукцией для слова меньшей длины, за исключением случая $g = u^n$, при котором слово меньшей длины (это $g|_1$) оказывается пустым словом. Но тогда $g|_0 = x^n$, $g|_{01} = (x^n)|_1 = z^n$. Если n — нечетное, то $z^n \notin St_1 W$ и таким образом слово g неединичное. Если n — четное, то $g|_{010} = (z^n)|_0 = (qx)^{n/2}$, $g|_{0100} = (qx)^{n/2}|_0 = (zr)^{n/2}$. Аналогично, если $n/2$ нечетное, то последнее слово неединичное. В противном случае, рассмотрим следующую проекцию: $g|_{01001} = (zr)^{n/2}|_1 = (xuqz)^{n/4}$. Мы получили слово, содержащее u, не являющееся степенью u и, либо $n/4$ — нечетное число и, как и выше, работает индукция, либо $n/4$ — четное и слово $g|_{010011} = (xuqz)^{n/4}|_1 = (zrxrxzq)^{n/8}$ имеет длину $< n$, и можно воспользоваться предположением индукции.

Таким образом, любое не пустое слово, записанное порождающими группы W с положительными степенями, имеет проекцию, отличную от нейтрального элемента группы. Следовательно, это слово само не является нейтральным элементом группы. Те же рассуждения подходят и для любой его (положительной) степени. А значит, порядок этого элемента не ограничен. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим группу $\tilde{W} = \langle z, x, r, u, q, a, b, c, d \rangle$, порожденную порождающими группы W и группы Григорчука. Учитывая лемму 2.1, пополнение этой группы совпадает с пополнением группы Григорчука, а благодаря лемме 2.2, эта группа не изоморфна группе Григорчука.

При изучении группы W возникает ряд вопросов, которые мы сформулируем в следующем виде:

Гипотеза. Группа W не имеет кручения.

Вопрос. Совпадает ли замыкание группы W с замыканием группы Григорчука?

Литература

[1] Р. И. Григорчук, *К проблеме Бернсайда о периодических группах* // Функц. анализ и его прилож., **14** (1980), вып. 1, 53–54.

[2] Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский, *Автоматы, динамические системы и группы* // Тр. Матем. Инс-та им. В. А. Стеклова, **231** (2000), 134–214.

[3] R. Grigorchuk, *Solved and unsolved problems around one group* // Progress in Math., **248** (2005), 117–218.

[4] G. Arzhantseva, P. de la Harpe, D. Kahrobaei, Z. Sunic, *The true prosoluble completion of a group: Examples and open problems* // Geom. Dedicata, **124** (2007), 5–26.

[5] Ю. Г. Леонов, *Проблема сопряженности в одном классе* 2*-групп* // Матем. заметки, **54** (1998), вып. 4, 573–583.

[6] Л. А. Калужнин, *La structure des p-groupes de sylow des groupes symetriques finis* // Ann. Ec. Normale, **3(65)** (1948), 239–276.

Сведения об авторах

Юрий Г. Леонов

Одесская национальная академия связи
им. А. С. Попова
ул. Кузнечная 1,
65000, Одесса
Украина
E-Mail: `leonov_yu@yahoo.com`