Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 4, 531 – 552

Нелокальні формули розмноження розв'язків та умовна симетрія рівняння синус-Гордон

Микола І. Сєров, Людмила М. Блажко

(*Представлена А. М. Самойленко*)

Анотація. Одержано ланцюжок розв'язків солітонного типу рівняння синус-Гордон методами нелокальної та умовної симетрії.

2000 MSC. 37K35, 76M60.

Ключові слова та фрази. Квазілінійні хвильові рівняння, конформна алгебра, умовна симетрія, рівняння синус-Гордон.

1. Вступ

Розглянемо нелінійне хвильове рівняння

$$u_{00} - u_{11} + \sin u = 0, \tag{1.1}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, яке в літературі відоме як рівняння синус-Гордон (СГ). З геометричної точки зору рівняння синус-Гордон виникло в диференціальній геометрії наприкінці XIX століття і пов'язане із задачею побудови чебишевських сіток на поверхнях від'ємної кривизни [7]. В 1936 році вивченням розв'язків рівняння (1.1) займався німецький вчений Р. Штойрвальд, але результати його досліджень були відомі в той час лише небагатьом спеціалістам з геометрії [4, 19]. У фізиці рівняння СГ було застосоване в теорії дислокацій Я. Френкелем та Т. Конторовою [9]. Воно описує розповсюдження обертань, умовних або дійсних, у різних фізичних системах [8, 9].

Рівняння СГ є одним з найбільш відомих рівнянь теорії солітонів [4], розвиток якої бере початок із спостереження фізичного явища "solitary ware" (відокремленої хвилі) британським інженером Д. С. Расселом у 1834 році [1]. Однак його роботи на деякий час були забуті. Пізніше, в 1965 році в роботі Н. Забуського і М. Крускала [20] ця хвиля була названа солітоном.

Стаття надійшла в редакцію 2.03.2009

ISSN 1810 – 3200.

Сплеск інтересу до солітонів почався в другій половині XX століття одночасно в декількох галузях науки — нелінійній електродинаміці, фізиці твердого тіла, гідродинаміці, біофізиці та ін. Дослідження солітонів іще раз продемонструвало єдність нелінійних коливних (хвильових) процесів різної природи.

У даній роботі ми розглянемо деякі аспекти дослідження рівняння (1.1), а саме побудову розв'язків типу солітонних за допомогою ітеративної процедури нелокального розмноження розв'язків та зв'язок відомих і одержаних розв'язків з умовною симетрією даного рівняння.

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння синус-Гордон є алгебра Пуанкаре $AP(1,1)$, базисні елементи якої мають вигляд:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1. \tag{1.2}$$

Зауваження 1.1. Оператори алгебри (1.2) породжують скінченні перетворення

$$x_0' = \alpha x + \theta_0, \quad x_1' = \beta x + \theta_1, \quad u' = u, \tag{1.3}$$

де $\alpha x = \alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1, \beta x = \beta_0 x_0 - \beta_1 x_1; \alpha_\mu, \beta_\mu, \theta_\mu$ — довільні сталі, які задовольняють наступним умовам:

$$\alpha^2 = -\beta^2 = 1, \quad \alpha\beta = 0, \quad \alpha^2 = \alpha_0^2 - \alpha_1^2, \quad \alpha\beta = \alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1, \quad \mu = 0, 1.$$

Рівняння СГ (1.1) інваріантне також відносно так званих CPT перетворень

$$\begin{aligned} C: &\quad x_0 \to x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to -u, \\ P: &\quad x_0 \to x_0, \quad x_1 \to -x_1, \quad u \to u, \\ T: &\quad x_0 \to -x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to u \end{aligned} \tag{1.4}$$

та перетворень

$$x_0 \to x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to u + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Тому всі викладки в цій роботі будемо проводити з точністю до перетворень (1.3), (1.4), (1.5).

2. Нелокальні формули розмноження розв'язків

Наприкінці XIX століття Беклунд [7, 14] запропонував нелокальні перетворення вигляду:

$$\left(\frac{\overset{2}{u} + \overset{1}{u}}{2}\right)_y = \frac{1}{\lambda}\sin\frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{2}, \qquad \left(\frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{2}\right)_z = \lambda\sin\frac{\overset{2}{u} + \overset{1}{u}}{2} \tag{2.1}$$

для рівняння СГ (1.1), записаного в конусних змінних

$$u_{yz} = \sin u, \tag{2.2}$$

де

$$y = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad z = \frac{x_1 - x_0}{2}, \tag{2.3}$$

$\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ — два різні розв'язки рівняння (2.2), λ — довільна стала. Перетворення (2.1) зв'язують між собою два різні розв'язки рівняння СГ, вони є автоперетвореннями Беклунда (АПБ). Враховуючи те, що перетворення (2.1) задають неявний зв'язок між двома розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння (2.2), то їх важко використовувати для побудови точних розв'язків цього рівняння.

За допомогою АПБ (2.1) у літературі побудовано деякі точні розв'язки рівняння (2.2), які одержали назву солітонних розв'язків. Односолітонні

$$u = 4 \arctan e^{\theta_1} \tag{2.4}$$

та двосолітонні

$$u = 4 \arctan \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \right), \tag{2.5}$$

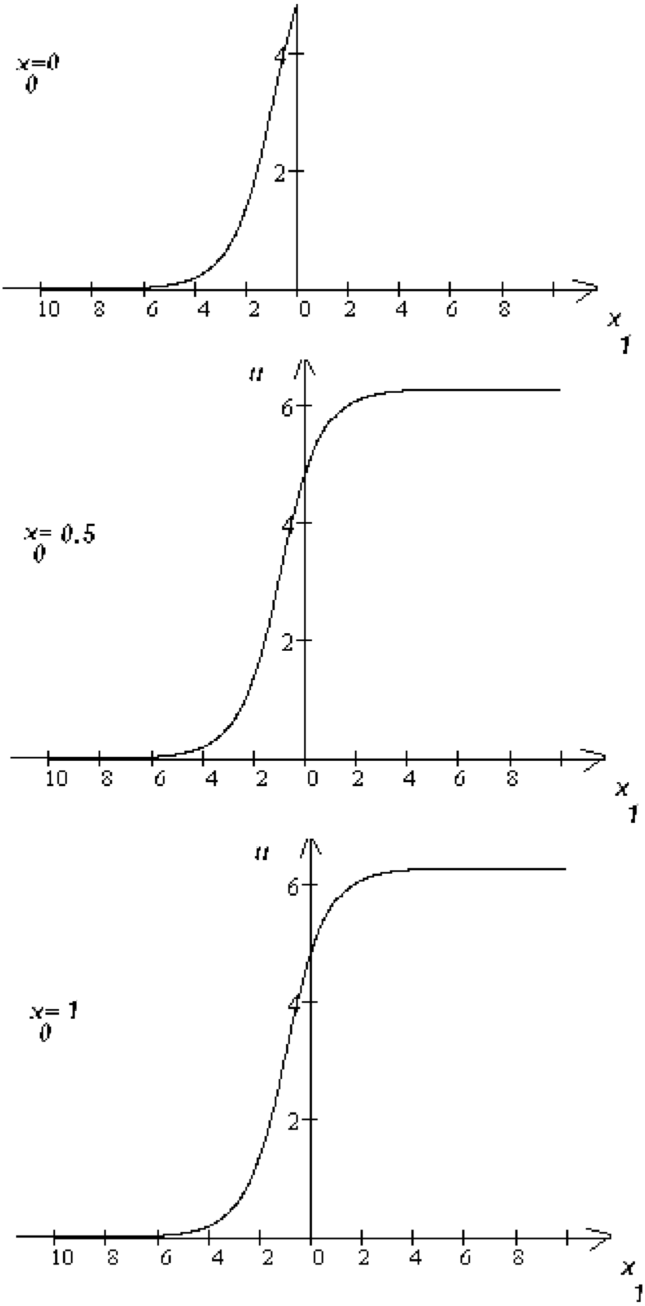
де $\theta_i = \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i} y + c_i$, λ_i, c_i — сталі, $i = 1, 2$, розв'язки даного рівняння [4, 5].

У роботі [15] побудована формула знаходження N-солітонних розв'язків рівняння СГ:

$$\begin{gathered}
\cos u(x_0, x_1) = 1 - 2\Big(\frac{\partial^2}{\partial {x_0}^2} - \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} \Big) \ln F, \\
F = \det(M_{ij}), \\
M_{ij} = 2(a_i + a_j)^{-1} \cosh \left[\frac{1}{2} (\theta_i + \theta_j) \right], \\
\theta_j = \gamma_j (x_0 - V_j x_1 - t_j), \\
a_j^2 = (1 - V_j)(1 + V_j)^{-1}, \\
\gamma_j^2 = (1 - V_j^2)^{-1},
\end{gathered} \tag{2.6}$$

де a_j, t_j — довільні параметри.

Для побудови солітонних розв'язків рівняння СГ може також використовуватись теорема Б'янкі про перестановочність [4].



Мал. 1: Графіки функції $u = 4\arctan e^{\theta_1}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.

Теорема Б'янкі. *Нехай* $\overset{0}{u}$ *є розв'язком рівняння СГ,* $\overset{1}{u}$ *— розв'язок, одержаний у результаті застосування перетворення Беклунда з використанням* $\overset{0}{u}$ *та параметра* λ_1*,* $\overset{2}{u}$ *— розв'язок, одержаний у результаті застосування перетворення Беклунда з використанням* $\overset{0}{u}$ *та параметра* λ_2*. Тоді новий розв'язок* $\overset{3}{u}$ *може бути одержаний іiз співвідношення*

$$\tan \frac{\overset{3}{u} - \overset{0}{u}}{4} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \tan \frac{\overset{1}{u} - \overset{2}{u}}{4}.$$

Ми пропонуємо дещо інший підхід до знаходження розв'язків рівняння СГ за допомогою АПБ (2.1).

Нехай для простоти $\lambda = 1$. Введемо функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$ за формулою:

$$\tau = \tan \frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{4}. \tag{2.7}$$

Це дає можливість записати зв'язок між розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння СГ в параметричному вигляді. Сформулюємо даний результат у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.1. *Якщо* $\overset{1}{u}$ *— розв'язок рівняння* (2.2)*, то його інший розв'язок* $\overset{2}{u}$ *знаходиться за формулою*

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4 \arctan \tau, \tag{2.8}$$

де $\tau = \tau(y, z)$ *— розв'язок системи диференціальних рівнянь*

$$\begin{aligned} \tau_y &= -\tfrac{1}{2}(\tau^2 + 1)\overset{1}{u}_y + \tau, \\ \tau_z &= -\tfrac{1}{2}(\tau^2 - 1)\sin \overset{1}{u} + \tau \cos \overset{1}{u}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Теорема (2.1) доводиться безпосередньою підстановкою формул (2.8), (2.9) у рівняння (2.2).

Таким чином, згідно даної теореми, побудову розв'язків рівняння СГ пропонується здійснювати в два етапи. Спочатку по відомому розв'язку $\overset{1}{u}$ потрібно знайти функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$, як розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.9), а потім за допомогою розв'язку $\overset{1}{u}$ і знайденому по ньому параметру τ за формулою (2.8) знаходимо $\overset{2}{u}$ — новий розв'язок рівняння СГ.

На перший погляд формули (2.8), (2.9) спрощують знаходження розв'язку $\overset{2}{u}$, але, в той же час, для знаходження параметра τ потрібно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь (2.9), яка є системою рівнянь Ріккаті. Добре відомо, що немає загального методу розв'язування рівнянь Ріккаті. Тому щодо складності формули (2.8), (2.9), напевно, не поступаються формулам (2.1). Але нам вдалося помітити одну закономірність, яка дозволяє знаходити частинний розв'язок рівнянь Ріккаті (2.9) (див. лему нижче). Як відомо, наявність частинного розв'язку рівняння Ріккаті дозволяє звести його до рівняння Бернуллі, яке інтегрується в квадратурах.

Якщо для побудови розв'язків рівняння СГ формули (2.8), (2.9) використовувати послідовно декілька разів, то, в результаті, отримуємо рекурентні формули вигляду

$$\overset{n+1}{u} = \overset{n}{u} + 4\arctan \overset{n+1}{\tau}, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \overset{n+1}{\tau}_y &= -\frac{1}{2}\Big(\big(\overset{n+1}{\tau}\big)^2 + 1\Big)\overset{n}{u}_y + \overset{n+1}{\tau}, \\ \overset{n+1}{\tau}_z &= -\frac{1}{2}\Big(\big(\overset{n+1}{\tau}\big)^2 - 1\Big)\sin \overset{n}{u} + \overset{n+1}{\tau}\cos \overset{n}{u}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

де $\overset{n}{u}$ — розв'язок рівняння СГ на n-му кроці, $\overset{n+1}{u}$, $\overset{n+1}{\tau}$ — функції, які знайдені на $(n+1)$-му кроці. Ми помітили зв'язок між розв'язками системи рівнянь Ріккаті (2.11) на різних кроках. Сформулюємо цей зв'язок у вигляді наступного твердження.

Лема 2.1. *Якщо початковий розв'язок у формулах* (2.10), (2.11) *вибрати тривіальний розв'язок рівняня синус-Гордон* $\overset{0}{u} = 0$, *то для системи* (2.11) *справедлива формула*

$$\overset{n+1}{\tau}_0(y,z) = \overset{n}{\tau}_3(-y,-z), \tag{2.12}$$

де $\overset{n}{\tau}_3(y,z)$ *— загальний розв'язок системи* (2.11) *на n-му кроці при спеціальному виборі сталої інтегрування,* $\overset{n+1}{\tau}_0(y,z)$ *— частинний розв'язок системи* (2.11) *на* $(n+1)$*-му кроці,* $n = 1,2,3,4,5$.

Опишемо знаходження точних розв'язків рівняння (1.1).

1-крок. $n = 1$:

$$\overset{0}{u} = 0, \tag{2.13}$$

тоді

$$\overset{1}{u} = 4\arctan \overset{1}{\tau}, \tag{2.14}$$

де функціональний параметр $\overset{1}{\tau}$ є розв'язком наступної системи диференціальних рівнянь із відокремлюваними змінними

$$\begin{aligned} \overset{1}{\tau}_y &= \overset{1}{\tau}, \\ \overset{1}{\tau}_z &= \overset{1}{\tau}\ . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Розв'язавши (2.15), з точністю до перетворень (1.3), одержимо

$$\overset{1}{\tau} = e^{y+z}, \tag{2.16}$$

$$\overset{1}{u} = 4 \arctan e^{y+z}. \tag{2.17}$$

Цей розв'язок у літературі відомий як односолітонний розв'язок рівняння СГ [4].

2-крок. $n = 2$:

$$\overset{1}{u} = 4 \arctan e^{y+z}, \tag{2.18}$$

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4 \arctan \overset{2}{\tau}, \tag{2.19}$$

де параметр $\overset{2}{\tau}$ є розв'язком системи рівнянь Ріккаті наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\tau}_y &= M((\overset{2}{\tau})^2 + 1) + \overset{2}{\tau}, \\ \overset{2}{\tau}_z &= N((\overset{2}{\tau})^2 - 1) + L\,\overset{2}{\tau}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

де $M = -\frac{1}{\cosh(y+z)}$, $N = \frac{\sinh(y+z)}{\cosh^2(y+z)}$, $L = 2\tanh^2(y+z) - 1$. Використавши лему, маємо

$$\overset{2}{\tau}_0(y,z) = \overset{1}{\tau}_3(-y,-z) = e^{-(y+z)}. \tag{2.21}$$

Зробивши заміну:

$$\overset{2}{\tau} = w + e^{-(y+z)}, \tag{2.22}$$

де $w = w(y,z)$ — нова невідома функція, систему (2.20) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$\begin{aligned} \cosh(y+z)w_y &= (\sin(y+z) - 1)w - w^2, \\ \cosh^2(y+z)w_z &= (\sin^2(y+z) - 1)w + \sinh(y+z)w^2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Загальний розв'язок системи (2.23) має вигляд

$$w = \frac{2\cosh^2(y+z)}{e^{y+z}(y - z + c_2) - \cosh(y+z))}. \tag{2.24}$$

Отже, використавши (2.24), одержуємо, що

$$\overset{2}{\tau}= \frac{(y-z+c_2)e^{-(y+z)}+\cosh(y+z)}{y-z+c_2-e^{-(y+z)}\cosh(y+z)}, \tag{2.25}$$

де c_2 — стала інтегрування. Підставивши $\overset{2}{\tau}$, $\overset{1}{u}$, що задані формулами (2.25), (2.18) відповідно, у формулу (2.19), одержуємо

$$\overset{2}{u}= 4\arctan\frac{-(y-z+c_2)}{\cosh(y+z)}. \tag{2.26}$$

З точністю до перетворень (1.3) можна вважати $c_2 = 0$. Отже,

$$\overset{2}{\tau}= \frac{(y-z)e^{-(y+z)}+\cosh(y+z)}{y-z-e^{-(y+z)}\cosh(y+z)}, \tag{2.27}$$

$$\overset{2}{u}= 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}. \tag{2.28}$$

Зауважимо, що розв'язок (2.28) одержано в [3] із двосолітонного розв'язку (2.5), якщо в ньому перейти до границі при $\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1$.

3-крок. $n = 3$:

$$\overset{2}{u}= 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}, \tag{2.29}$$

$$\overset{3}{u}=\overset{2}{u}+4\arctan\overset{3}{\tau}. \tag{2.30}$$

Система рівнянь Ріккаті для знаходження $\overset{3}{\tau}$ має вигляд

$$\begin{gathered}\overset{3}{\tau}_y= -\frac{2((y-z)\sinh(y+z)-\cosh(y+z))}{B}((\overset{3}{\tau})^2+1)+\overset{3}{\tau},\\ \overset{3}{\tau}_z= \frac{2(y-z)\cosh(y+z)A}{B^2}((\overset{3}{\tau})^2-1)+\frac{A^2-4(y-z)^2\cosh^2(y+z)}{B^2}\overset{3}{\tau},\end{gathered} \tag{2.31}$$

де $A = \cosh^2(y+z)-(y-z)^2$, $B = \cosh^2(y+z)+(y-z)^2$.

Використавши лему, маємо

$$\overset{3}{\tau}_0(y,z) =\overset{2}{\tau}_3(-y,-z) = \frac{(y-z)e^{y+z}-\cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)}. \tag{2.32}$$

Зробивши заміну

$$\overset{3}{\tau}= w+\frac{(y-z)e^{y+z}-\cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)}, \tag{2.33}$$

де $w = w(y,z)$ — нова невідома функція, систему (2.31) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$w_y = \frac{\beta B - 4\alpha C}{\beta B} w - \frac{2C}{B} w^2,$$
$$w_z = \frac{4(y-z)\alpha A\cosh(y+z) + \beta(A^2 - 4(y-z)^2)\cosh^2(y+z)}{\beta B^2} w + \frac{2(y-z)A\cosh(y+z)}{B^2} w^2, \tag{2.34}$$

де $\alpha = (y-z)e^{y+z} - \cosh(y+z)$, $\beta = y - z + e^{y+z}\cosh(y+z)$, $C = (y-z)\sinh(y+z) - \cosh(y+z)$. Розв'язавши (2.34), одержуємо

$$\overset{3}{\tau} = \frac{-2B^2 + \alpha K}{\beta K}, \tag{2.35}$$

$$\overset{3}{u} = 4\arctan e^{-y-z}\frac{P+B}{P-B}, \tag{2.36}$$

де

$$K = (y - z + e^{y+z}\cosh(y+z))((y-z)^2 e^{-(y+z)} - 2(y-z)\cosh(y+z) + f) - 4e^{y+z}\cosh^4(y+z),$$

$$f = \cosh(y+z)(e^{2(y+z)} + 2) + (y + z + c)e^{-(y+z)},$$

$$P = c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z).$$

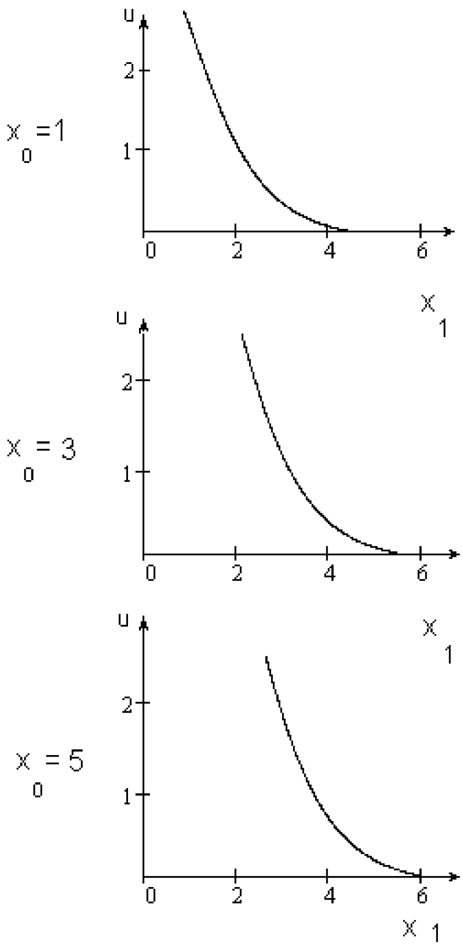
Випишемо ланцюжок розв'язків рівняння синус-Гордон (2.2), одержаного в результаті застосування рекурентних формул (2.10), (2.11):

$$0 \to 4\arctan e^{y+z} \to 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)} \to$$
$$4\arctan\left(\frac{e^{-(y+z)}(c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z)}{c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z) - \cosh^2(y+z) - (y-z)^2} + \frac{\cosh^2(y+z) + (y-z)^2)}{c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z) - \cosh^2(y+z) - (y-z)^2}\right).$$

Таким чином, враховуючи зв'язок (2.3) між змінними y, z і x_0, x_1, одержаний нами ланцюжок розв'язків для рівняння СГ (1.1) має вигляд

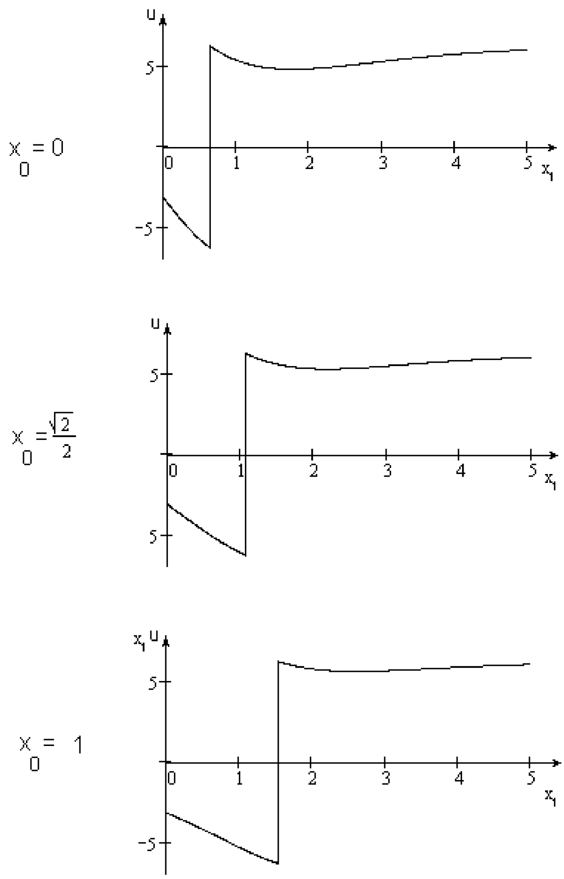
$$0 \to 4\arctan e^{x_1} \to 4\arctan\frac{-x_0}{\cosh x_1}$$
$$\to 4\arctan e^{-x_1}\frac{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2}.$$

Побудуємо графіки розв'язків $\overset{2}{u}$ і $\overset{3}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.



Мал. 2: Графіки функції $\overset{2}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.

Оскільки побудовані графіки одержаних розв'язків $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$ зберігають форму єдиної хвилі з ростом часової змінної x_0, то можна припустити, що ці розв'язки є розв'язками солітонного типу рівняння синус-Гордон.



Мал. 3: Графіки функції $\overset{3}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.

Зауваження 2.1. З кожним наступним кроком процедури розмноження розв'язків рівняння СГ, запропонованої в теоремі (2.1), різко зростає громіздкість перетворень даного алгоритму. Тому було природньо наступні кроки доручити ЕОМ.

За допомогою програми Maple нам вдалося проробити ще два кроки вказаного алгоритму. В результаті одержали наступні розв'язки

$$\overset{4}{u} = 4\arctan\frac{(\frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0 + c_4)\cosh x_1 - 2x_0x_1\sinh x_1}{\frac{1}{3}x_0^4 - c_4x_0 + x_1^2 + \cosh^2 x_1}, \tag{2.37}$$

$$\overset{5}{u} = 4\arctan e^{x_1}\frac{(\cosh^2 x_1 + A - B)e^{2x_1} + C + D}{\cosh^2 x_1 + A + B + (C - D)e^{2x_1}}, \tag{2.38}$$

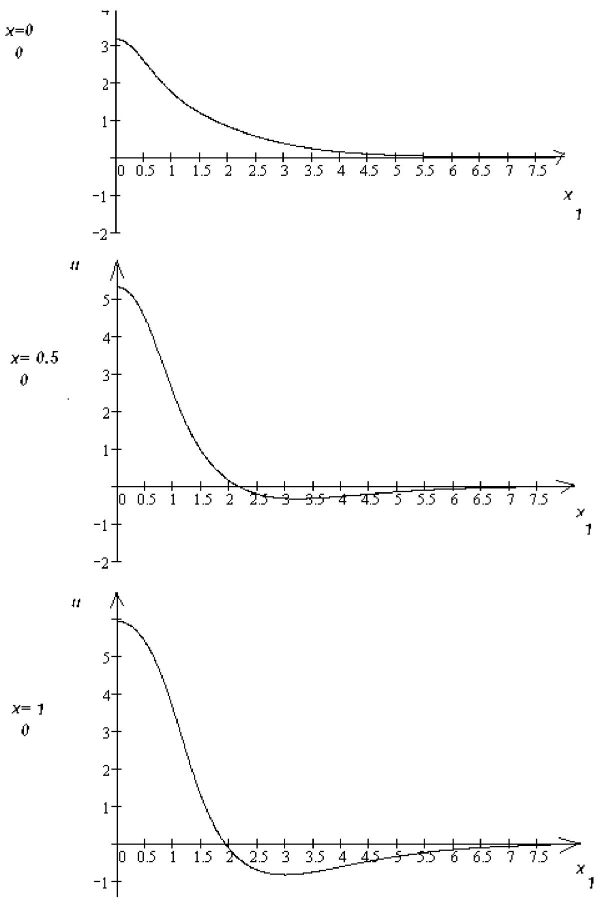
де

$$A = \frac{1}{9}x_0^6 + \frac{1}{6}x_0^4 + \frac{3}{2}x_0^2 + x_0^2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + 2c_5x_1,$$

$$B = \frac{1}{3}x_0^4 x_1 + 2x_0^2(x_1 + c_5) - x_1(x_1^2 + 1) + c_5,$$

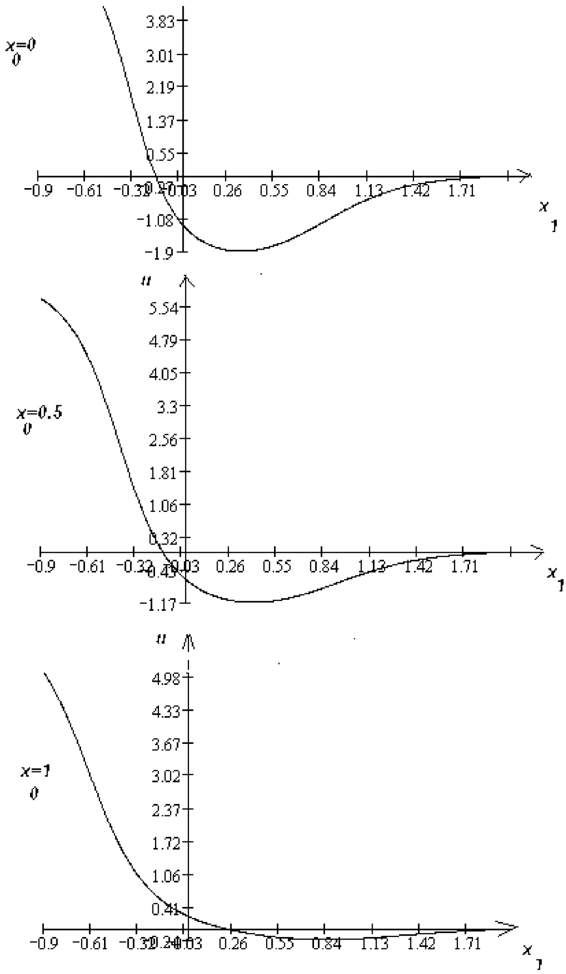
$$C = \frac{1}{6}x_0^4 + \frac{3}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}x_1^2, \quad D = (x_0^2 + 1)x_1 - c_5.$$

Побудуємо графіки розв'язків $\overset{4}{u}$ і $\overset{5}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.



Мал. 4: Графіки функції $\overset{4}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.

Проаналізувавши графіки одержаних розв'язків та їх проекцій, ми бачимо, що всі вони мають вигляд хвилі, що не змінює свою форму зі зміною часу. У зв'язку з цим можна зробити висновок, що знайдені нами розв'язки $\overset{2}{u}$ — $\overset{5}{u}$, як і $\overset{1}{u}$, є розв'язками солітонного типу рівняння синус-Гордон.



Мал. 5: Графіки функції $\overset{5}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.

3. Умовна інваріантність одновимірного рівняння синус-Гордон

Проаналізуємо, чи можна знайдені в попередньому пункті розв'язки отримати за допомогою лієвської симетрії рівняння СГ. Розв'язок

$$\overset{1}{u} = 4 \arctan e^{x_1} \tag{3.1}$$

є інваріантним відносно алгебри (1.2). Умова інваріантності розв'язку

$$\Phi(x_0, x_1, u) = u - 4 \arctan e^{x_1} = 0 \tag{3.2}$$

відносно оператора

$$X = c_0\partial_0 + c_1\partial_1 + k(x_1\partial_0 + x_0\partial_1)$$

має вигляд

$$X\Phi|_{\Phi=0} = 0, \tag{3.3}$$

тобто

$$X\Phi = -4(c_1 + kx_0)\frac{e^{x_1}}{1 + e^{2x_1}} = 0,$$

звідки $c_1 = k = 0$, $X = \partial_0$. Отже, розв'язок $\overset{1}{u}$, що має вигляд (3.1) можна отримати за допомогою лієвської симетрії. Розв'язки

$$\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-x_0}{\cosh x_1} \tag{3.4}$$

і

$$\overset{3}{u} = 4\arctan e^{-x_1}\frac{x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2} \tag{3.5}$$

не можна отримати з лієвської симетрії, оскільки умова (3.3) для них виконується лише при $c_0 = c_1 = k = 0$. Дослідимо, чи можна отримати дані розв'язки із умовної симетрії (поняття умовної симетрії введено в [11]). Узагальнимо розв'язок $\overset{2}{u}$ наступним чином

$$u = 4\arctan\frac{\varphi(x_0)}{\cosh x_1}, \tag{3.6}$$

де $\varphi(x_0)$ — довільна гладка функція. Формулу (3.6) можна розглядати як анзац, побудований за деяким диференціальним оператором першого порядку, який ми запишемо у вигляді

$$Q = A\partial_0 + B\partial_1 + C\partial_u, \tag{3.7}$$

де $A = A(x_0, x_1, u)$, $B = B(x_0, x_1, u)$, $C = C(x_0, x_1, u)$ — довільні гладкі функції. З умови (3.3) інваріантності розв'язку (3.6) відносно оператора Q одержимо $\Phi(I_0, I_1) = 0$, або $I_1 = \varphi(I_0)$, де

$$I_0 = x_0, \quad I_1 = \cosh x_1 \tan\frac{u}{4}. \tag{3.8}$$

Внаслідок того, що I_0, I_1 є інваріантами оператора Q, то

$$\begin{aligned} QI_0 &= 0,\\ QI_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Розв'язком системи (3.9) є функції

$$A = 0, \quad C = -2B\tanh x_1 \sin\frac{u}{2}. \tag{3.10}$$

Отже, $Q = B(\partial_1 - 2\tanh x_1 \sin\frac{u}{2}\partial_u)$. Нехай $B = 1$, тоді один із операторів, що породжує анзац (3.6), має вигляд

$$Q = \partial_1 - 2\tanh x_1 \sin\frac{u}{2}\partial_u. \tag{3.11}$$

Розв'язок (3.1) узагальнимо наступним чином

$$u = 4\arctan(e^{x_1}\varphi(x_0)). \tag{3.12}$$

Не важко переконатися, що анзац (3.12) породжується оператором

$$Q = \partial_1 + 2\sin\frac{u}{2}\partial_u. \tag{3.13}$$

Анзац

$$u = 4\arctan e^{-x_1}\frac{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + \varphi^2(x_0)}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - \varphi^2(x_0)}, \tag{3.14}$$

який узагальнює розв'язок $\overset{3}{u}$, породжується оператором

$$Q = \partial_1 + \eta\partial_u, \tag{3.15}$$

де

$$\eta = -2\Big(\sin\frac{u}{2} - 2\cosh x_1 \frac{\cos\frac{u}{2} + \sinh x_1 \sin\frac{u}{2}}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1}\Big). \tag{3.16}$$

Оператори (3.11), (3.13), (3.15) є операторами умовної симетрії рівняння СГ. Це випливає із наступної теореми.

Теорема 3.1. *Рівняння* (1.1) *інваріантне відносно оператора*

$$Q = \partial_1 + \eta(x_1, u)\partial_u \tag{3.17}$$

при додаткових умовах

$$u_0^2 - u_1^2 + \Phi(x_1, u) = 0, \tag{3.18}$$

$$Qu = u_1 - \eta = 0, \tag{3.19}$$

де

$$\Phi = \frac{1}{\eta_{uu}}T, \quad \eta_{uu} \neq 0, \tag{3.20}$$

$$T = \eta\cos u - \eta_u \sin u - 2\eta\eta_{1u} - \eta_{11}, \tag{3.21}$$

$$\Phi_1 + \eta\Phi_u - 2\eta_u\Phi - 2\eta\eta_1 = 0. \tag{3.22}$$

Доведення. Для доведення теореми використаємо означення умовної інваріантності [11], згідно якого необхідно довести, що

$$\tilde{Q}S = f^1 S + f^2 S_1 + f^3 S_2, \quad \tilde{Q}S_1 = f^4 S + f^5 S_1 + f^6 S_2, \tag{3.23}$$

де f^i — деякі неперервно-диференційовані функції, $i = \overline{1,6}$, $\tilde{Q}$ — продовження оператора Q. В нашому випадку

$$\begin{gathered} S = \Box u + \sin u, \\ S_1 = u_0^2 - u_1^2 + \Phi, \\ S_2 = Qu = u_1 - \eta. \end{gathered}$$

Подіявши оператором $\tilde{Q}$ на S та S_1, одержимо

$$\begin{aligned} \tilde{Q}S &= \eta_u S + \eta_{uu} S_1 + 2\eta_{1u} S_2 \\ &\qquad -(\eta_{uu}\Phi - \eta\cos u + \eta_u \sin u + 2\eta\eta_{1u} + \eta_{11}), \\ \tilde{Q}S_1 &= -2\eta_u S_1 - 2\eta_1 S_2 + (\Phi_1 + \eta\Phi_u - 2\eta_u\Phi - 2\eta\eta_1). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Звідки

$$\begin{gathered} \eta_{uu}\Phi - \eta\cos u + \eta_u \sin u + 2\eta\eta_{1u} + \eta_{11} = 0, \\ \Phi_1 + \eta\Phi_u - 2\eta_u\Phi - 2\eta\eta_1 = 0. \end{gathered}$$

Будемо вважати, що $\eta_{uu} \neq 0$, так як у протилежному випадку оператор (3.17) буде оператором лієвської симетрії рівняння (1.1). В результаті отримаємо формули (3.20)–(3.22).

Теорему (3.1) доведено. □

Зауваження 3.1. Неважко переконатися, що оператори (3.11), (3.13), (3.15) задовольняють умовам теореми (3.1), і тому є операторами умовної інваріантності рівняння (1.1).

Знайдені оператори Q задовольняють умові

$$\eta_{uu} = -\frac{1}{4}\eta, \tag{3.25}$$

тобто

$$\eta = C_1(x_1)\cos\frac{u}{2} + C_2(x_1)\sin\frac{u}{2}, \tag{3.26}$$

звідки, враховуючи (3.20)–(3.22), одержимо:

$$\begin{aligned} \ddot{C}_1 &= \Big(\frac{\vec{C}^2}{2} + k\Big)C_1, \\ \ddot{C}_2 &= \Big(\frac{\vec{C}^2}{2} + k - 1\Big)C_2 \end{aligned} \tag{3.27}$$

при умові $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

Нехай

$$C_2 = C_1 \sinh x_1 - 2. \tag{3.28}$$

Тоді (3.27) зводиться до рівняння Ріккаті

$$\dot{C}_1 = -\frac{1}{2} C_1^2 \cosh x_1 + C_1 \tanh x_1 - \frac{k+1}{\cosh x_1}. \tag{3.29}$$

Якщо $k = -1$, то (3.29) — рівняння Бернуллі. Його загальний розв'язок приводить до операторів (3.15), (3.16).

Якщо $k \neq -1$. Частинний розв'язок (3.29) шукаємо у вигляді

$$C_1 = \frac{a}{\sinh x_1}, \quad a = \mathrm{const}. \tag{3.30}$$

Після підстановки (3.30) в (3.29) одержимо

$$-\frac{a \cosh x_1}{\sinh^2 x_1} = -\frac{a^2 \cosh x_1}{2 \sinh^2 x_1} + \frac{a}{\cosh x_1} - \frac{k+1}{\cosh x_1}. \tag{3.31}$$

Рівність (3.31) можлива лише при $a = 2, \quad k = 1$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (3.29) має вигляд

$$C_1 = \frac{2(x_1 + C)}{(x_1 + C) \sinh x_1 - \cosh x_1}, \quad c = \mathrm{const}. \tag{3.32}$$

Тоді з (3.28) при умові (3.32) знаходимо

$$C_2 = \frac{2 \cosh x_1}{(x_1 + C) \sinh x_1 - \cosh x_1}. \tag{3.33}$$

Отже, ми одержали новий оператор:

$$Q = \partial_1 + 2 \frac{(x_1 + C) \cos \frac{u}{2} + \cosh x_1 \sin \frac{u}{2}}{(x_1 + C) \sinh x_1 - \cosh x_1} \partial_u. \tag{3.34}$$

Щоб побудувати анзац за оператором (3.34) необхідно розв'язати рівняння

$$\frac{d(\frac{u}{2})}{dx_1} = \frac{(x_1 + C) \cos \frac{u}{2} + \cosh x_1 \sin \frac{u}{2}}{(x_1 + C) \sinh x_1 - \cosh x_1}, \tag{3.35}$$

яке заміною

$$w = \tan \frac{u}{4} \tag{3.36}$$

зводиться до рівняння Ріккаті

$$w' = \frac{1}{2} \frac{(x_1 + C)(1 - w^2) + 2w \cosh x_1}{(x_1 + C) \sinh x_1 - \cosh x_1}. \tag{3.37}$$

4. Умовна інваріантність багатовимірного рівняння синус-Гордон

Розглянемо багатовимірне рівняння СГ

$$\Box u + \sin u = 0, \tag{4.1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Аналогічно, як і для одновимірного рівняння СГ, доводиться наступне твердження.

Теорема 4.1. *Рівняння* (4.1) *інваріантне відносно оператора*

$$Q = \partial_n + \eta(x_n, u)\partial_u \tag{4.2}$$

при додаткових умовах

$$u_\mu u^\mu + \Phi(x_n, u) = 0, \tag{4.3}$$

$$Qu = u_n - \eta = 0, \tag{4.4}$$

де

$$\Phi = \frac{1}{\eta_{uu}} T, \quad \eta_{uu} \neq 0, \tag{4.5}$$

$$T = \eta \cos u - \eta_u \sin u - 2\eta\eta_{nu} - \eta_{nn}, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{\eta_{uu}^2}(\eta_{nuu} + \eta\eta_{uuu} + 2\eta_u\eta_{uu})T - \frac{1}{\eta_{uu}}(T_n + \eta T_u) + 2\eta\eta_n = 0. \tag{4.7}$$

Зауваження 4.1. За допомогою прямої перевірки можна переконатися, що оператори

$$Q = \partial_n + 2\sin\frac{u}{2}\partial_u, \tag{4.8}$$

$$Q = \partial_n - 2\tanh x_n \sin\frac{u}{2}\partial_u, \tag{4.9}$$

$$\begin{gathered} Q = \partial_n + \eta\partial_u, \\ \eta = -2\Big(\sin\frac{u}{2} - 2\cosh x_n \frac{\cos\frac{u}{2} + \sinh x_n \sin\frac{u}{2}}{c + x_n + \cosh x_n \sinh x_n}\Big) \end{gathered} \tag{4.10}$$

задовольняють умови теореми (4.1), тобто є операторами умовної симетрії рівняння (4.1).

Оператору (4.8) відповідає анзац

$$u = 4\arctan(e^{x_n}\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})), \tag{4.11}$$

який редукує рівняння (4.1) до системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\Box\varphi = 0, \\ &\varphi_s\varphi^s = 0, s = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Оператору (4.9) відповідає анзац

$$u = 4\arctan\frac{\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})}{\cosh x_n}, \qquad (4.13)$$

який редукує рівняння (4.1) до системи рівнянь

$$\begin{aligned}&\Box\varphi = 0,\\ &\varphi_s\varphi^s - 1 = 0, s = \overline{0, n-1}.\end{aligned} \qquad (4.14)$$

Оператору (4.10) відповідає анзац

$$u = 4\arctan e^{-x_n}\frac{c + x_n + \cosh x_n \sinh x_n + \cosh^2 x_n + \varphi^2}{c + x_n + \cosh x_n \sinh x_n - \cosh^2 x_n - \varphi^2}, \qquad (4.15)$$

де $\varphi = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Анзац (4.15) редукує рівняння (4.1) також до системи рівнянь (4.14).

Узагальнимо анзаци (4.11), (4.13) наступним чином

$$u = 4\arctan\varphi\psi, \qquad (4.16)$$

де $\varphi = \varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})$, $\psi = \psi(x_n)$ — невідомі функції. Підставивши (4.16) у рівняння (4.1), одержимо

$$\varphi^2\Box\varphi - 2\varphi\varphi_s\varphi^s - \varphi^3 + \frac{1}{\psi^2}(\Box\varphi + \varphi) - \frac{\ddot\psi}{\psi^3}\varphi + (2\frac{\dot\psi^2}{\psi^2} - \frac{\ddot\psi}{\psi})\varphi^3 = 0, \qquad (4.17)$$

де $s = \overline{0, n-1}$. Врахувавши, що функції ϕ, ψ залежать від різних аргументів, з рівняння (4.17) отримуємо два суттєво різні випадки:

$$\begin{gathered}\ddot\psi - 2\lambda_1\psi^3 = 0,\\ \psi\ddot\psi - 2\dot\psi^2 + 2\lambda_2 = 0,\\ S_3 - 2\lambda_1\varphi = 0,\\ S_4 + 2\lambda_2\varphi^3 = 0;\end{gathered} \qquad (4.18)$$

$$\begin{gathered}\ddot\psi - 2\lambda_1\psi = 0,\\ \psi\ddot\psi - 2\dot\psi^2 + 2\lambda_2\psi^2 = 0,\\ S_3 + 2\lambda_2\varphi^3 = 0,\\ S_4 - 2\lambda_1\varphi = 0,\end{gathered} \qquad (4.19)$$

де λ_1, λ_2 — довільні сталі, $S_3 = \varphi^2\Box\varphi - 2\varphi\varphi_s\varphi^s - \varphi^3$, $S_4 = \Box\varphi + \varphi$. Розглянемо кожен із отриманих випадків окремо. Із (4.18) випливає, що вигляд функції ψ визначаємо, як

$$\int\frac{d\psi}{\sqrt{\lambda_1\psi^4 + \lambda_2}} = x_n. \qquad (4.20)$$

Зробивши заміну

$$w = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda_2\varphi^4 + \varphi^2 + \lambda_1}} \tag{4.21}$$

з двох останніх рівнянь системи (4.18), одержимо

$$\begin{aligned} &\Box w = 0, \\ &w_s w^s + 1 = 0, \quad s = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Зауваження 4.2. Якщо у формулах (4.20), (4.21) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, то одержимо розв'язок рівняння СГ, який виражається через елементарні функції та функцію w за формулою

$$u = -4 \arctan \frac{\sinh w}{x_n}. \tag{4.23}$$

Якщо ж в формулах (4.20), (4.21) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, то одержимо розв'язок вигляду

$$u = -4 \arctan \frac{x_n}{\sinh w}, \tag{4.24}$$

який за допомогою перетворень (1.4), (1.5) зводиться до (4.23). При всіх інших значеннях параметрів λ_1, λ_2 розв'язки рівняння СГ вигляду (4.16) виражаються через еліптичні функції (див., наприклад, [2]).

З (4.19) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ одержимо наступний розв'язок

$$u = 4 \arctan e^{x_n} \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}), \tag{4.25}$$

де функція φ виражається з (4.21), а функція w є розв'язком системи

$$\begin{aligned} &\Box w = 0, \\ &w_s w^s = 0, \quad s = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Повний аналітичний опис множини гладких розв'язків систем (4.12), (4.14), (4.22), (4.26) у випадку $n = 4$ зроблено в роботі [10], а також проведено в роботах [13, 17, 18]. У результаті цього в даній роботі отримано цілі класи точних розв'язків багатовимірного рівняння синус-Гордон.

5. Висновки

У даній роботі запропоновано процедуру нелінійної суперпозиції розв'язків, яка дозволяє будувати ланцюжки розв'язків типу односолітонних для рівняння синус-Гордон. Досліджено зв'язок деяких відомих та одержаних розв'язків з операторами умовної симетрії рівняння синус-Гордон, за допомогою яких побудовано класи точних розв'язків даного рівняння. Знайдено оператори умовної симетрії та відповідні їм класи розв'язків для багатовимірного хвильового рівняння синус-Гордон.

Подяки. Автори вдячні Р. О. Поповичу за допомогу при знаходженні розв'язків (2.37) та (2.38).

Література

[1] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, М.: Мир, 1987, 480 с.

[2] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, М.: Наука, 1970, 304 с.

[3] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, М.: Наука, 1980, 324 с.

[4] С. П. Новиков, *Солитоны*, М.: Мир, 1983, 408 с.

[5] В. Ю. Новокшенов, *Математические модели в естествознании*, Уфа: УГАТ ун-т, 1999, 98 с.

[6] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, М.: Мир, 1989, 323 с.

[7] Э. Г. Позняк, А. Г. Попов, *Уравнение синус-Гордона: геометрия и физика*, М.: Знание, 1991, 48 с.

[8] А. Т. Филиппов, *Многоликий солитон*, М.: Наука, 1990, 288 с.

[9] Я. Френкель, Т. Конторова, *О теории пластической деформации и двойникования* // Физический журнал, (1939), N 1, 137–145.

[10] В. И. Фущич, Р. З. Жданов, И. В. Ревенко, *Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала* // УМЖ, **43** (1991, N 11, 1471–1487.

[11] В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов, *Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики*, Киев: Наукова думка, 1989, 339 с.

[12] A. Barone, F. Eposito, C. Magee, A. Scott, *Theory and applicationcs of the sine-Gordon equatoin* // Riv. Nuovo cimento, (1971), N 1, 227–267.

[13] A. F. Barannyk, I. I. Yurik, *On a new method for constructing exact solitions of the nonlinear differential equations of mathematical physics* // J. Phys. A: Math. Gen., **31** (1998), 4899–4907.

[14] A. V. Bäclund, *Om Ytor med konstant negativ Krökning* // Lund Universitets Arsskrift, **19** (1883), 1–48.

[15] P. J. Caudrey, J. C. Eibeck, J. D. Gibbon, *The sine-Gordon equations a model field theory* // Nuovo Cimento, **25** (1975), 497–512.

[16] T. H. R. Skyrme, *A Non-Linear Theory of Strong Interactions* // Proc. Roy. Soc., **247** (1958), N 1249, 260–278.

[17] V. I. Smirnov, S. L. Sobolev, *New method for solving a plane problem of elastic oscillations* // Proc. Of the Seismologicalinstitute of the Academi of Sciences USSR, **20** (1932), 37–42.

[18] V. I. Smirnov, S. L. Sobolev, *On application of a new method to the study of elastic oscillations in a space with the axial symmetry* // Proc. of the Seismologicalinstitute of the Academi of Sciences USSR, **29** (1933), 43–51.

[19] R. Steurwald, *Uber Ennepersche Flichen und bicklund'sche Transformation*, München.: Abh. Bayer Akad. Wiss., **40**, 1936, 105 p.

[20] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states* // Phys. Rev. Lett., **15** (1965), 240–243.

Відомості про авторів

Микола Іванович Сєров, Людмила М. Блажко

Полтавський національний
технічний університет
імені Юрія Кондратюка
Першотравневий проспект, 24
36000, Полтава
Україна
E-Mail: `k26@pntu.edu.ua`, `LBlazhko@mail.ru`