Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 4, 475 – 491

Регулярность степени дифференциального оператора

Антон А. Лунёв

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Доказана одновременная регулярность дифференциального оператора L и его степеней L^d, $d \in \mathbb{N}$. Аналогичный результат доказан для усиленно регулярных операторов четного порядка.

2000 MSC. 47E05.

Ключевые слова и фразы. Дифференциальный оператор, краевая задача, регулярные и усиленно регулярные краевые условия.

1. Введение. Формулировка основных результатов

В данной работе изучается важный аспект в спектральной теории дифференциальных операторов: регулярные краевые условия. Главным объектом исследования является обыкновенный дифференциальный оператор L в пространстве $L_2(0,1)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)y, \tag{1.1}$$

где функции $p_s(x)$ бесконечно дифференциируемы на $[0,1]$, и нормированными краевыми условиями

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, n, \qquad \text{где} \tag{1.2}$$

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y_0^{(k_\nu)} + \sum_{s=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu,s} y_0^{(s)}, \tag{1.3}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y_1^{(k_\nu)} + \sum_{s=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu,s} y_1^{(s)}, \tag{1.4}$$

Статья поступила в редакцию 20.07.2009

ISSN 1810 – 3200. © Інститут математики НАН України

$$|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| \neq 0, \quad 0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_n \leqslant n-1, \quad k_\nu < k_{\nu+2},$$

$$y_0^{(s)} = d^s y(x)/dx^s|_{x=0}, \quad y_1^{(s)} = d^s y(x)/dx^s|_{x=1}.$$

В работе [1] Дж. Д. Биркгоф развил асимптотические методы исследования оператора L. В частности, он выделил важный класс краевых условий, которые назвал регулярными. Оператор порожденный выражением (1.1) и регулярными краевыми условиями (1.2), мы также условимся называть регулярным. Отметим, что в определении регулярности участвуют только коэффициенты α_ν и β_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, при старших производных в условиях (1.3), (1.4), и не участвуют коэффициенты $p_s(x)$ дифференциального выражения (1.1). Важный результат, установленный Биркгофом, состоял в оценке резольвенты регулярного дифференциального оператора.

В дальнейшем регулярными краевыми условиями занимались многие авторы. Был выделен важный подкласс регулярных краевых условий, так называемые усиленно регулярные краевые условия. Как и ранее, оператор порожденный выражением (1.1) и усиленно регулярными краевыми условиями (1.2), мы также условимся называть усиленно регулярным. В частности, Г. М. Кесельман [5], В. П. Михайлов [6] независимо доказали, что в предположении усиленной регулярности краевых условий (1.2), система корневых векторов оператора L образует безусловный базис в пространстве $L_2(0,1)$. Одной только регулярности для этого не достаточно, как показывают примеры Г. М. Кесельмана [5], П. Уокера [4] и Дж. Локера [2]. Для регулярных же краевых условий А. А. Шкаликов [8] доказал безусловную базисность со скобками. Не так давно А. М. Минкин [3] доказал обратное утверждение, а именно, что безусловная базисность системы корневых векторов влечет регулярность оператора.

Отметим также, что Г. М. Кесельман [5] и В. П. Михайлов [6] доказали, что операторы L и L^* регулярны (усиленно регулярны) одновременно.

В данной работе изучается зависимость между свойствами регулярности оператора L и его натуральных степеней L^d, $d \in \mathbb{N}$. Аналогичный вопрос рассматривается для свойства усиленной регулярности тех же операторов.

Напомним определение регулярности нормированных краевых условий, следуя [7, гл. 2, §4]. Для этого введем несколько обозначений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Для $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$ обозначим через $S_{n,k}$ сектор комплексной ρ-плоскости, задаваемый неравенством $\frac{k\pi}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{(k+1)\pi}{n}$.

Пусть $\omega_{n,k,1},\dots,\omega_{n,k,n}$ — все различные корни n-ой степени из -1, занумерованные таким образом, что при $\rho\in S_{n,k}$

$$\Re(\rho\,\omega_{n,k,1})\leqslant\Re(\rho\,\omega_{n,k,2})\leqslant\dots\leqslant\Re(\rho\,\omega_{n,k,n}). \tag{1.5}$$

Введем также следующее обозначение. При нечетном $n=2\mu-1$ обозначим

$$a_\nu=a_\nu(h)=(\underbrace{\alpha_\nu,\dots,\alpha_\nu}_{\mu-1},\alpha_\nu+\beta_\nu h,\underbrace{\beta_\nu,\dots,\beta_\nu}_{\mu-1}),$$

а при четном $n=2\mu$

$$a_\nu=a_\nu(h)=(\underbrace{\alpha_\nu,\dots,\alpha_\nu}_{\mu-1},\alpha_\nu+\beta_\nu h,\alpha_\nu+\beta_\nu/h,\underbrace{\beta_\nu,\dots,\beta_\nu}_{\mu-1}).$$

p-тый элемент набора a_ν будем обозначать $a_{\nu,p}$ или $a_{\nu,p}(h)$, если хотим показать зависимость от h. Здесь $\nu=1,\dots,n$.

Далее обозначим

$$\begin{aligned}\delta_{L,k}(h)&=\det\left(a_{\nu,p}(h)\omega_{n,k,p}^{k_\nu}\right)_{\nu,p=1}^{n}\\&=\det\begin{pmatrix}a_{1,1}\omega_{n,k,1}^{k_1}&a_{1,2}\omega_{n,k,2}^{k_1}&\cdots&a_{1,n}\omega_{n,k,n}^{k_1}\\a_{2,1}\omega_{n,k,1}^{k_2}&a_{2,2}\omega_{n,k,2}^{k_2}&\cdots&a_{2,n}\omega_{n,k,n}^{k_2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n,1}\omega_{n,k,1}^{k_n}&a_{n,2}\omega_{n,k,2}^{k_n}&\cdots&a_{n,n}\omega_{n,k,n}^{k_n}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Ясно, что при нечетном n определитель $\delta_{L,k}(h)=\theta_{L,0,k}+\theta_{L,1,k}h$, где определители $\theta_{L,0,k}$ и $\theta_{L,1,k}$ не зависят от h, а зависят лишь от коэффициентов α_ν и β_ν, $\nu=1,\dots,n$, при старших производных в условиях (1.3), (1.4), а при четном n определитель $\delta_{L,k}(h)=\theta_{L,-1,k}/h+\theta_{L,0,k}+\theta_{L,1,k}h$, где определители $\theta_{L,-1,k}$, $\theta_{L,0,k}$ и $\theta_{L,1,k}$ опять-таки не зависят от h, а зависят лишь от коэффициентов α_ν и β_ν, $\nu=1,\dots,n$.

Определение 1.1. *Условия* (1.2) *называются регулярными, если*

(*i*) *при нечетном n числа $\theta_{L,0,k}$ и $\theta_{L,1,k}$ отличны от нуля.*

(*ii*) *при четном n числа $\theta_{L,-1,k}$ и $\theta_{L,1,k}$ отличны от нуля.*

Говорят, что условия (1.2) *усиленно регулярны, если они регулярны и дополнительно при n четных $\theta_{L,0,k}^2\neq4\theta_{L,1,k}\theta_{L,-1,k}$.*

Данное определение регулярности совпадает с классическим (см. [7, гл. 2, §4, п. 8]), но записано более компактно. Как известно (см. [7, гл. 2, §4, п. 8, стр. 67]), определение регулярности не зависит от k.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1.1. *Пусть оператор L порожден дифференциальным выражением* (1.1) *и краевыми условиями* (1.2), *и $d \in \mathbb{N}$. Тогда операторы L и L^d регулярны одновременно. Если n — четное, то операторы L и L^d усиленно регулярны одновременно. Если n — нечетное, d — четное, а оператор L регулярен, то оператор L^d, вообще говоря, не является усиленно регулярным.*

2. Доказательство теоремы 1.1

Ясно, что оператор L^d задается дифференциальным выражением

$$l_d(y) := \underbrace{l(l(\ldots l(}_{d} y)\ldots))$$

и краевыми условиями

$$U_\nu(l_j(y)) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad j = 0, \ldots, d-1. \tag{2.1}$$

Так как коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0,1]$, то

$$l_j(y) = y^{(nj)} + \sum_{s=0}^{nj-1} p_{j,s} y^{(s)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, d-1,$$

где $p_{j,s} \in C^\infty[0,1]$.

Поэтому

$$U_{\nu 0}(l_j(y)) = \alpha_\nu \frac{d^{k_\nu}}{dx^{k_\nu}} \left(y^{(nj)} + \sum_{s=0}^{nj-1} p_{j,s} y^{(s)} \right)\Bigg|_{x=0} + \sum_{s=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu,s} \frac{d^s l_j(y)}{dx^s}\Bigg|_{x=0}$$

$$= \alpha_\nu y_0^{(nj+k_\nu)} + \sum_{s=0}^{nj+k_\nu-1} \widetilde{\alpha}_{\nu,s} y_0^{(s)}, \quad \nu = 1, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, d-1$$

для некоторых коэффициентов $\widetilde{\alpha}_{\nu,s}$.

Аналогично

$$U_{\nu 1}(l_j(y)) = \beta_\nu y_1^{(nj+k_\nu)} + \sum_{s=0}^{nj+k_\nu-1} \widetilde{\beta}_{\nu,s} y_1^{(s)}, \quad \nu = 1, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, d-1$$

для некоторых коэффициентов $\widetilde{\beta}_{\nu,s}$. Полученные равенства показывают, что краевые условия $U_\nu(l_j(y))$, занумерованные в порядке возрастания j, а при фиксированном j в порядке возрастания ν, $\nu = 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$, являются нормированными.

Обозначим $N = nd$. Введем, как и ранее, следующее обозначение. При нечетном $N = 2\widetilde{\mu} - 1$ обозначим

$$\widetilde{a}_\nu = \widetilde{a}_\nu(h) = (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\widetilde{\mu}-1}, \alpha_\nu + \beta_\nu h, \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\widetilde{\mu}-1}),$$

а при четном $N = 2\widetilde{\mu}$

$$\widetilde{a}_\nu = \widetilde{a}_\nu(h) = (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\widetilde{\mu}-1}, \alpha_\nu + \beta_\nu h, \alpha_\nu + \beta_\nu/h, \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\widetilde{\mu}-1}).$$

p-тый элемент набора $\widetilde{a}_\nu$ будем обозначать $\widetilde{a}_{\nu,p}$ или $\widetilde{a}_{\nu,p}(h)$, если хотим показать зависимость от h. Здесь $\nu = 1, \ldots, n$. Используя эти обозначения, определитель $\delta_{L^d,0}(h)$ примет вид

$$\delta_{L^d,0}(h) = \det \left(\widetilde{a}_{\nu,p}(h)\, \omega_{N,0,p}^{nj+k_\nu} \right)_{q,p=1}^{N}, \tag{2.2}$$

где числа j и ν однозначно находятся по q из условий

$$q = nj + \nu, \quad j = 0, 1, \ldots, d-1, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Или в матричном виде

$$\delta_{L^d,0}(h) = \det \left(\begin{array}{cccc}
\widetilde{a}_{1,1}\, \omega_{N,0,1}^{k_1} & \widetilde{a}_{1,2}\, \omega_{N,0,2}^{k_1} & \cdots & \widetilde{a}_{1,N}\, \omega_{N,0,N}^{k_1} \\
\widetilde{a}_{2,1}\, \omega_{N,0,1}^{k_2} & \widetilde{a}_{2,2}\, \omega_{N,0,2}^{k_2} & \cdots & \widetilde{a}_{2,N}\, \omega_{N,0,N}^{k_2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\widetilde{a}_{n,1}\, \omega_{N,0,1}^{k_n} & \widetilde{a}_{n,2}\, \omega_{N,0,2}^{k_n} & \cdots & \widetilde{a}_{n,N}\, \omega_{N,0,N}^{k_n} \\
\hline
\widetilde{a}_{1,1}\, \omega_{N,0,1}^{n+k_1} & \widetilde{a}_{1,2}\, \omega_{N,0,2}^{n+k_1} & \cdots & \widetilde{a}_{1,N}\, \omega_{N,0,N}^{n+k_1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\widetilde{a}_{n,1}\, \omega_{N,0,1}^{n+k_n} & \widetilde{a}_{n,2}\, \omega_{N,0,2}^{n+k_n} & \cdots & \widetilde{a}_{n,N}\, \omega_{N,0,N}^{n+k_n} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\widetilde{a}_{1,1}\, \omega_{N,0,1}^{(d-1)n+k_1} & \widetilde{a}_{1,2}\, \omega_{N,0,2}^{(d-1)n+k_1} & \cdots & \widetilde{a}_{1,N}\, \omega_{N,0,N}^{(d-1)n+k_1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\widetilde{a}_{n,1}\, \omega_{N,0,1}^{(d-1)n+k_n} & \widetilde{a}_{n,2}\, \omega_{N,0,2}^{(d-1)n+k_n} & \cdots & \widetilde{a}_{n,N}\, \omega_{N,0,N}^{(d-1)n+k_n}
\end{array} \right).$$

Из неравенства (1.5) следует, что $\omega_{N,0,p} = e^{\frac{i\pi(2\widetilde{\tau}_p - 1)}{N}}$, $p = 1, \ldots, N$, где

$$(\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2, \widetilde{\tau}_3, \widetilde{\tau}_4, \widetilde{\tau}_5, \ldots, \widetilde{\tau}_{N-1}, \widetilde{\tau}_N) = (\widetilde{\mu}, \widetilde{\mu} - 1, \widetilde{\mu} + 1, \widetilde{\mu} - 2, \widetilde{\mu} + 2, \ldots, 1, N) \tag{2.3}$$

при нечетном N, и

$$(\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2, \widetilde{\tau}_3, \widetilde{\tau}_4, \widetilde{\tau}_5, \ldots, \widetilde{\tau}_{N-1}, \widetilde{\tau}_N) = (\widetilde{\mu}, \widetilde{\mu} + 1, \widetilde{\mu} - 1, \widetilde{\mu} + 2, \widetilde{\mu} - 2, \ldots, 1, N) \tag{2.4}$$

при четном N.

Формулы (2.3) и (2.4) можно записать независимо от четности N следующим образом

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_{N-2p} &= N - p, \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{N-1}{2}. \\ \widetilde{\tau}_{N-2p-1} &= p + 1, \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из формул (2.3) и (2.4) видно, что независимо от четности N числа $\widetilde{\tau}_p$ при $p \in \{1, \ldots, N\}$ пробегают все натуральные числа от 1 до N включительно. Заметим, что любое натуральное число p от 1 до $N = nd$ можно единственным образом представить в виде $p = nl + s$ и в виде $p = d(s-1) + l + 1$, где $l \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, $s \in \{1, \ldots, n\}$. Поэтому существует такая перестановка σ чисел от 1 до N, что

$$\widetilde{\tau}_{\sigma_p} = \widetilde{\tau}_{\sigma_{nl+s}} = d(s-1) + l + 1, \ l = 0, 1, \ldots, d-1, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Заметим, что тогда

$$\begin{aligned} \omega^{nj}_{N,0,\sigma_p} = \omega^{nj}_{N,0,\sigma_{nl+s}} &= \left(e^{\frac{\pi i(2\widetilde{\tau}_{\sigma_{nl+s}} - 1)}{N}}\right)^{nj} \\ &= \left(e^{\frac{\pi i(2d(s-1)+2l+1)}{d}}\right)^{j} = \left(e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}\right)^{j}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Переставляя столбцы определителя $\delta_{L^d,0}(h)$ с помощью перестановки σ и учитывая (2.7), получим

$$\begin{aligned} \delta_{L^d,0}(h) &= \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_p}\, \omega^{nj+k_\nu}_{N,0,\sigma_p}\right)^N_{q,p=1} \\ &= \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \det \underbrace{\left(\left(e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}\right)^j \widetilde{a}_{\nu,\sigma_p}\, \omega^{k_\nu}_{N,0,\sigma_p}\right)^N_{q,p=1}}_{A} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \det A, \end{aligned}$$

где $p = nl + s$, $l = 0, 1, \ldots, d-1$, $s = 1, \ldots, n$ и как и ранее $q = nj + \nu$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$, $\nu = 1, \ldots, n$.

Пусть

$$A_l = \left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_{nl+s}}\,\omega^{k_\nu}_{N,0,\sigma_{nl+s}}\right)_{\nu,s=1}^{n}$$
$$= \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1,\sigma_{nl+1}}\,\omega^{k_1}_{N,0,\sigma_{nl+1}} & \widetilde{a}_{1,\sigma_{nl+2}}\,\omega^{k_1}_{N,0,\sigma_{nl+2}} & \dots & \widetilde{a}_{1,\sigma_{nl+n}}\,\omega^{k_1}_{N,0,\sigma_{nl+n}} \\ \widetilde{a}_{2,\sigma_{nl+1}}\,\omega^{k_2}_{N,0,\sigma_{nl+1}} & \widetilde{a}_{2,\sigma_{nl+2}}\,\omega^{k_2}_{N,0,\sigma_{nl+2}} & \dots & \widetilde{a}_{2,\sigma_{nl+n}}\,\omega^{k_2}_{N,0,\sigma_{nl+n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n,\sigma_{nl+1}}\,\omega^{k_n}_{N,0,\sigma_{nl+1}} & \widetilde{a}_{n,\sigma_{nl+2}}\,\omega^{k_n}_{N,0,\sigma_{nl+2}} & \dots & \widetilde{a}_{n,\sigma_{nl+n}}\,\omega^{k_n}_{N,0,\sigma_{nl+n}} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу A можно представить в блочном виде

$$A = \left(\left(e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}\right)^j A_l\right)_{j,l=0}^{d-1}$$
$$= \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{d-1} \\ e^{\frac{\pi i}{d}} A_0 & e^{\frac{3\pi i}{d}} A_1 & \dots & e^{\frac{(2d-1)\pi i}{d}} A_{d-1} \\ \left(e^{\frac{\pi i}{d}}\right)^2 A_0 & \left(e^{\frac{3\pi i}{d}}\right)^2 A_1 & \dots & \left(e^{\frac{(2d-1)\pi i}{d}}\right)^2 A_{d-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left(e^{\frac{\pi i}{d}}\right)^{d-1} A_0 & \left(e^{\frac{3\pi i}{d}}\right)^{d-1} A_1 & \dots & \left(e^{\frac{(2d-1)\pi i}{d}}\right)^{d-1} A_{d-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I_n & I_n & \dots & I_n \\ e^{\frac{\pi i}{d}} I_n & e^{\frac{3\pi i}{d}} I_n & \dots & e^{\frac{(2d-1)\pi i}{d}} I_n \\ \left(e^{\frac{\pi i}{d}}\right)^2 I_n & \left(e^{\frac{3\pi i}{d}}\right)^2 I_n & \dots & \left(e^{\frac{(2d-1)\pi i}{d}}\right)^2 I_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left(e^{\frac{\pi i}{d}}\right)^{d-1} I_n & \left(e^{\frac{3\pi i}{d}}\right)^{d-1} I_n & \dots & \left(e^{\frac{(2d-1)\pi i}{d}}\right)^{d-1} I_n \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{d-1} \end{pmatrix},$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Поэтому

$$\delta_{L^d,0}(h) = \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\det A = \operatorname{sign}(\sigma)\cdot W^n\cdot\det A_0\cdot\det A_1\cdot\ldots\det A_{d-1}, \quad (2.8)$$

где

$$W = \det\left(\left(e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}\right)^j\right)_{j,l=0}^{d-1}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{\frac{\pi i}{d}} & e^{\frac{3\pi i}{d}} & e^{\frac{5\pi i}{d}} & \dots & e^{\frac{(2d-1)\pi i}{d}} \\ \left(e^{\frac{\pi i}{d}}\right)^2 & \left(e^{\frac{3\pi i}{d}}\right)^2 & \left(e^{\frac{5\pi i}{d}}\right)^2 & \dots & \left(e^{\frac{(2d-1)\pi i}{d}}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(e^{\frac{\pi i}{d}}\right)^{d-1} & \left(e^{\frac{3\pi i}{d}}\right)^{d-1} & \left(e^{\frac{5\pi i}{d}}\right)^{d-1} & \dots & \left(e^{\frac{(2d-1)\pi i}{d}}\right)^{d-1} \end{pmatrix}$$

— определитель Вандермонда.

Так как все числа $e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}$, $l = 0, 1, \dots, d-1$, различны, то $W \neq 0$.

Так как $\omega_{N,0,\sigma_{nl+s}} = e^{\frac{\pi i(2d(s-1)+2l+1)}{N}} = e^{\frac{\pi i(2l+1-d)}{N}} e^{\frac{\pi i(2s-1)}{n}}$, то

$$\det A_l = \prod_{\nu=1}^{n} \left(e^{\frac{\pi i(2l+1-d)}{N}}\right)^{k_\nu} \cdot \det \left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_{nl+s}} \left(e^{\frac{\pi i(2s-1)}{n}}\right)^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n}. \tag{2.9}$$

Обозначим через B_l определитель в правой части равенства (2.9), то есть

$$B_l = \det \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1,\sigma_{nl+1}} \left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^{k_1} & \dots & \widetilde{a}_{1,\sigma_{nl+n}} \left(e^{\frac{(2n-1)\pi i}{n}}\right)^{k_1} \\ \widetilde{a}_{2,\sigma_{nl+1}} \left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^{k_2} & \dots & \widetilde{a}_{2,\sigma_{nl+n}} \left(e^{\frac{(2n-1)\pi i}{n}}\right)^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n,\sigma_{nl+1}} \left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^{k_n} & \dots & \widetilde{a}_{n,\sigma_{nl+n}} \left(e^{\frac{(2n-1)\pi i}{n}}\right)^{k_n} \end{pmatrix}_{\nu,s=1}^{n}. \tag{2.10}$$

Аналогично формуле (2.5) имеем $\omega_{n,0,s} = e^{\frac{i\pi(2\tau_s-1)}{n}}$, где

$$\begin{aligned} \tau_{n-2s} &= n-s, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{n-1}{2}, \\ \tau_{n-2s-1} &= s+1, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{n}{2}-1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

С другой стороны, $\omega_{n,2n-1,s} = e^{\frac{i\pi(2t_s-1)}{n}}$, где

$$\begin{aligned} t_{n-2s} &= s+1, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{n-1}{2}, \\ t_{n-2s-1} &= n-s, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{n}{2}-1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

При $0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2}-1$ переставим столбцы определителя B_l с помощью перестановки t, а при $\frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1$ — с помощью перестановки τ. Учитывая формулы для $\omega_{n,2n-1,s}$ и $\omega_{n,0,s}$, получим

$$\begin{aligned} B_l &= \operatorname{sign}(t) \det \left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_{nl+t_s}}\, \omega_{n,2n-1,s}^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n}, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2}-1, \\ B_l &= \operatorname{sign}(\tau) \det \left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_{nl+\tau_s}}\, \omega_{n,0,s}^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n}, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \varphi_{l,s} &= \sigma_{nl+t_s}, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1, \\ \varphi_{l,s} &= \sigma_{nl+\tau_s}, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} u_l &= 2n - 1, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1, \\ u_l &= 0, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$C_l = \det \left(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,s}}\, \omega_{n,u_l,s}^{k_\nu} \right)_{\nu,s=1}^{n}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant d-1. \tag{2.16}$$

Подставляя формулы (2.9) в равенство (2.8), с учетом определения определителей B_l, формулы (2.13) и обозначений (2.14), (2.15) и (2.16), получим

$$\delta_{L_d,0}(h) = \Omega \cdot C_0 C_1 \ldots C_{d-1}, \tag{2.17}$$

где $\Omega = \prod_{l=0}^{d-1} \prod_{\nu=0}^{n} \left(e^{\frac{\pi i(2l+1-d)}{N}} \right)^{k_\nu} \cdot \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(t)^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \cdot \operatorname{sign}(\tau)^{\lceil \frac{d}{2} \rceil} \cdot W^n$ — ненулевая константа, зависящая лишь от n и d.

Чтобы установить связь между определителями C_l и определителем $\delta_{L,k}(h)$ нам понадобится следующая

Лемма 2.1. *Для чисел $\varphi_{l,s}$ выполнены следующие равенства*

$$\begin{gathered} \varphi_{l,s} = d(s-1) + d - 2l - 1, \quad s = n - 2p, \\ 0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1. \\[2ex] \varphi_{l,s} = d(s-1) + 2l + 2, \quad s = n - 2p - 1, \\ 0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2} - 1, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1. \\[2ex] \varphi_{l,s} = d(s-1) + 2l + 2 - d, \quad s = n - 2p, \\ 0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1. \\[2ex] \varphi_{l,s} = d(s-1) + 2d - 2l + 1, \quad s = n - 2p - 1, \\ 0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2} - 1, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Доказательство. Пусть ψ — перестановка, обратная к перестановке $\widetilde{\tau}$. Тогда из формулы (2.5) вытекает, что

$$\psi_{N-p} = N - 2p, \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{N-1}{2},$$
$$\psi_{p+1} = N - 2p - 1, \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{N}{2} - 1.$$

или

$$\begin{aligned} \psi_q &= 2q - N, \quad \frac{N+1}{2} \leqslant q \leqslant N, \\ \psi_q &= N - 2q + 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Из (2.6) следует, что

$$\sigma_{nl+s} = \psi_{d(s-1)+l+1}, \quad l = 0, 1, \ldots, d-1, \ s = 1, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Теперь докажем (2.18).

Пусть вначале $0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1$. Тогда по (2.14) и (2.20)

$$\phi_{l,s} = \sigma_{nl+t_s} = \psi_{d(t_s-1)+l+1}. \tag{2.21}$$

Если $s = n - 2p$, где $0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}$, то по (2.12)

$$t_s = t_{n-2p} = p + 1.$$

Поэтому

$$d(t_s - 1) + l + 1 = d \cdot p + l + 1 \leqslant d \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{d}{2} = \frac{N}{2}.$$

Отсюда по (2.21) и второму равенству в (2.19)

$$\begin{aligned} \phi_{l,s} = \psi_{d(t_s-1)+l+1} = \psi_{d \cdot p+l+1} &= N - 2(d \cdot p + l + 1) + 1 \\ &= d(n - 2p - 1) + d - 2l - 1 = d(s-1) + d - 2l - 1. \end{aligned}$$

Если же $s = n - 2p - 1$, где $0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2} - 1$, то по (2.12)

$$t_s = t_{n-2p-1} = n - p.$$

Поэтому

$$d(t_s - 1) + l + 1 = d(n - p - 1) + l + 1 \geqslant d\left(n - \frac{n}{2}\right) + 1 = \frac{N}{2} + 1.$$

Отсюда по (2.21) и первому равенству в (2.19)

$$\phi_{l,s} = \psi_{d(t_s-1)+l+1} = \psi_{d(n-p-1)+l+1} = 2(d(n-p-1)+l+1) - N$$
$$= d(n-2p-2) + 2l + 2 = d(s-1) + 2l + 2.$$

Таким образом, случай $0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1$ разобран.

Случай $\frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1$ разбирается аналогично с заменой перестановки t на τ. $\square$

Из (2.18) видно, что при фиксированном $s \in \{1, \ldots, n\}$ последовательность $\varphi_{l,s}$ пробегает все числа от $d(s-1)+1$ до ds, когда l пробегает числа от 0 до $d-1$, то есть

$$\{\varphi_{0,s}, \varphi_{1,s}, \ldots, \varphi_{d-1,s}\} = \{d(s-1)+1, d(s-1)+2, \ldots, d(s-1)+d\}. \tag{2.22}$$

Рассмотрим отдельно случаи четности чисел n и d.

1) n, d *— нечетные.*

Напомним, что в этом случае $n = 2\mu - 1$ и $N = nd = 2\widetilde{\mu} - 1$. Обозначим также $d = 2\eta - 1$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\widetilde{\mu} = d(\mu - 1) + \eta. \tag{2.23}$$

Пусть $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ — фиксированное число. Так как N нечетно, то по определению набора $\widetilde{a}_\nu$

$$\begin{aligned} &\widetilde{a}_{\nu,p} = \alpha_\nu, \quad 1 \leqslant p \leqslant \widetilde{\mu} - 1, \\ &\widetilde{a}_{\nu,p} = \alpha_\nu + \beta_\nu h, \quad p = \widetilde{\mu}, \\ &\widetilde{a}_{\nu,p} = \beta_\nu, \quad \widetilde{\mu} + 1 \leqslant p \leqslant N. \end{aligned} \tag{2.24}$$

В силу (2.22) и (2.23) при $l \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ выполнены неравенства

$$\varphi_{l,s} \leqslant d\,s \leqslant d(\mu - 1) < \widetilde{\mu}, \quad 1 \leqslant s \leqslant \mu - 1,$$
$$\varphi_{l,s} \leqslant d(s-1) + 1 \geqslant d\,\mu + 1 > \widetilde{\mu}, \quad \mu + 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Поэтому

$$\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,s}} = \alpha_\nu, \quad 1 \leqslant s \leqslant \mu - 1,$$
$$\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,s}} = \beta_\nu, \quad \mu + 1 \leqslant s \leqslant n,$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{0,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{0,2}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{0,n}}) &= (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{0,\mu}},\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}),\\
(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{1,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{1,2}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{1,n}}) &= (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{1,\mu}},\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{d-1,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{d-1,2}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{d-1,n}}) &= (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{d-1,\mu}},\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}).
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

В силу (2.22) существует такая перестановка γ чисел от 0 до $d-1$, что

$$
(\varphi_{\gamma_1,\mu}, \varphi_{\gamma_2,\mu}, \ldots, \varphi_{\gamma_d,\mu}) = (d(\mu-1)+1, d(\mu-1)+2, \ldots, d(\mu-1)+d).
\tag{2.26}
$$

Переставляя строки в (2.25), с помощью перестановки γ и учитывая (2.26), получим

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_1,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_1,2}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_1,n}}) &= (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+1},\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}),\\
(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_2,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_2,2}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_2,n}}) &= (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+2},\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_d,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_d,2}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_d,n}}) &= (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+d},\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}).
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

В силу равенства (2.24) и формулы (2.23), имеем

$$
\begin{gathered}
\widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+1} = \alpha_\nu,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+\eta-1} = \alpha_\nu,\\
\widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+\eta} = \alpha_\nu + \beta_\nu h,\\
\widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+\eta+1} = \beta_\nu,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+d} = \beta_\nu.
\end{gathered}
\tag{2.28}
$$

Обозначим

$$a_\nu^{[0]} = (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \alpha_\nu,\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}),$$
$$a_\nu^{[1]} = (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \beta_\nu,\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}),$$

p-тые элементы наборов $a_\nu^{[0]}$ и $a_\nu^{[1]}$ будем обозначать соответсвенно $a_{\nu,p}^{[0]}$ и $a_{\nu,p}^{[1]}$.

Будем также обозначать через $\widetilde{a}_{\nu,\varphi_l}$ набор $(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,2}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,n}})$.

Равенства (2.27) с учетом новых обозначений и формулы (2.28) примут вид

$$\begin{gathered}
\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_1}} = a_\nu^{[0]}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_{\eta-1}}} = a_\nu^{[0]}, \\
\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_\eta}} = a_\nu(h), \\
\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_{\eta+1}}} = a_\nu^{[1]}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_d}} = a_\nu^{[1]}.
\end{gathered} \tag{2.29}$$

Заметим, что из формулы (1.6) и равенства $\delta_{L,k} = \theta_{L,0,k} + \theta_{L,1,k}h$ следует, что

$$\begin{aligned}
\theta_{L,0,k} &= \det\left(a_{\nu,p}^{[0]}\,\omega_{n,k,p}^{k_\nu}\right)_{\nu,p=1}^{n}, \\
\theta_{L,1,k} &= \det\left(a_{\nu,p}^{[1]}\,\omega_{n,k,p}^{k_\nu}\right)_{\nu,p=1}^{n}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Теперь с учетом формул (2.16), (2.29) и (2.30) имеем

$$C_{\gamma_1} = \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_1,s}}\,\omega_{n,u_{\gamma_1},s}^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n} = \det\left(a_{\nu,s}^{[0]}\,\omega_{n,u_{\gamma_1},s}^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n} = \theta_{L,0,u_{\gamma_1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}
C_{\gamma_{\eta-1}} &= \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_{\eta-1},s}}\,\omega_{n,u_{\gamma_{\eta-1}},s}^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n} \\
&= \det\left(a_{\nu,s}^{[0]}\,\omega_{n,u_{\gamma_{\eta-1}},s}^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n} = \theta_{L,0,u_{\gamma_{\eta-1}}},
\end{aligned}$$

$$C_{\gamma_\eta} = \det\Big(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_\eta,s}}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_\eta},s}\Big)^n_{\nu,s=1} = \det\Big(a_{\nu,s}(h)\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_\eta},s}\Big)^n_{\nu,s=1} = \delta_{L,u_{\gamma_\eta}}(h),$$

$$C_{\gamma_{\eta+1}} = \det\Big(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_{\eta+1},s}}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_{\eta+1}},s}\Big)^n_{\nu,s=1} = \det\Big(a^{[1]}_{\nu,s}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_{\eta+1}},s}\Big)^n_{\nu,s=1} = \theta_{L,1,u_{\gamma_{\eta+1}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{\gamma_d} = \det\Big(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_d,s}}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_d},s}\Big)^n_{\nu,s=1} = \det\Big(a^{[1]}_{\nu,s}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_d},s}\Big)^n_{\nu,s=1} = \theta_{L,1,u_{\gamma_d}}. \tag{2.31}$$

Обозначим для краткости $v_l = u_{\gamma_l}$, $l \in \{1,\ldots,d\}$. Подставляя формулы (2.31) в равенство (2.17), получим

$$\delta_{L_d,0}(h) = \Omega\cdot\theta_{L,0,v_1}\cdots\theta_{L,0,v_{\eta-1}}\cdot\delta_{L,v_\eta}(h)\cdot\theta_{L,1,v_{\eta+1}}\cdots\theta_{L,1,v_d}. \tag{2.32}$$

Откуда

$$\begin{aligned}\theta_{L_d,0,0} &= \Omega\cdot\theta_{L,0,v_1}\cdots\theta_{L,0,v_{\eta-1}}\cdot\theta_{L,0,v_\eta}\cdot\theta_{L,1,v_{\eta+1}}\cdots\theta_{L,1,v_d},\\ \theta_{L_d,1,0} &= \Omega\cdot\theta_{L,0,v_1}\cdots\theta_{L,0,v_{\eta-1}}\cdot\theta_{L,1,v_\eta}\cdot\theta_{L,1,v_{\eta+1}}\cdots\theta_{L,1,v_d}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Из формул (2.33) непосредственно видно, что операторы L и L^d регулярны одновременно.

2) *n — нечетное, d — четное.*

В этом случае $n = 2\mu-1$ и $N = nd = 2\widetilde{\mu}$. Обозначим также $d = 2\eta$. Отсюда, в частности, следует, что $\widetilde{\mu} = d(\mu-1)+\eta$.

Пусть $\nu \in \{1,\ldots,n\}$ — фиксированное число. Так как N чётно, то по определению набора $\widetilde{a}_\nu$

$$\begin{aligned}&\widetilde{a}_{\nu,p} = \alpha_\nu, \quad 1 \leqslant p \leqslant \widetilde{\mu}-1,\\ &\widetilde{a}_{\nu,p} = \alpha_\nu + \beta_\nu h, \quad p = \widetilde{\mu},\\ &\widetilde{a}_{\nu,p} = \alpha_\nu + \beta_\nu/h, \quad p = \widetilde{\mu}+1,\\ &\widetilde{a}_{\nu,p} = \beta_\nu, \quad \widetilde{\mu}+2 \leqslant p \leqslant N.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Поэтому, аналогично предыдущему случаю, для некоторой перестановки γ чисел от 0 до $d-1$ выполнены равенства

$$\begin{gathered}
C_{\gamma_1} = \theta_{L,0,u_{\gamma_1}}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C_{\gamma_{\eta-1}} = \theta_{L,0,u_{\gamma_{\eta-1}}}, \\
C_{\gamma_\eta} = \delta_{L,u_{\gamma_\eta}}(h), \\
C_{\gamma_{\eta+1}} = \delta_{L,u_{\gamma_{\eta+1}}}\Big(\frac{1}{h}\Big), \\
C_{\gamma_{\eta+2}} = \theta_{L,1,u_{\gamma_{\eta+2}}}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C_{\gamma_d} = \theta_{L,1,u_{\gamma_d}}.
\end{gathered} \tag{2.35}$$

Обозначим, как и ранее, $v_l = u_{\gamma_l},\ l \in \{1,\dots,d\}$. Подставляя формулы (2.35) в равенство (2.17), получим

$$\delta_{L_d,0}(h) = \Omega\cdot\theta_{L,0,v_1}\cdots\theta_{L,0,v_{\eta-1}}\cdot\delta_{L,v_\eta}(h)\cdot\delta_{L,v_{\eta+1}}\Big(\frac{1}{h}\Big)\cdot\theta_{L,1,v_{\eta+2}}\cdots\theta_{L,1,v_d}. \tag{2.36}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
\theta_{L_d,-1,0} &= \Omega\cdot\theta_{L,0,v_1}\cdots\theta_{L,0,v_{\eta-1}}\cdot\theta_{L,0,v_\eta}\cdot\theta_{L,1,v_{\eta+1}}\cdot\theta_{L,1,v_{\eta+2}}\cdots\theta_{L,1,v_d}, \\
\theta_{L_d,1,0} &= \Omega\cdot\theta_{L,0,v_1}\cdots\theta_{L,0,v_{\eta-1}}\cdot\theta_{L,1,v_\eta}\cdot\theta_{L,0,v_{\eta+1}}\cdot\theta_{L,1,v_{\eta+2}}\cdots\theta_{L,1,v_d}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Из формул (2.37) непосредственно видно, что операторы L и L^d регулярны одновременно.

Пример регулярных краевых условий нечетного порядка, которые в некоторой четной степени не являются усиленно регулярными, дают условия первого порядка $y(0) = y(1)$. Краевые условия для квадрата соответствующего оператора имеют вид $y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)$. Это так называемые периодические краевые условия. Они, как известно, регулярны, но не усиленно регулярны.

3) n *— четное.*

В этом случае $n = 2\mu$ и $N = nd = 2\widetilde{\mu}$. Докажем, что тогда

$$\varphi_{l,\mu} + \varphi_{l,\mu+1} = N + 1, \qquad 0 \leqslant l \leqslant d-1. \tag{2.38}$$

Пусть вначале $0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1$. Так как числа μ и $\mu+1$ разной четности, то в силу (2.18) независимо от четности μ имеем

$$\varphi_{l,\mu} + \varphi_{l,\mu+1} = d(\mu-1) + d\mu + (d-2l-1) + (2l+2) = 2d\mu + 1 = N + 1.$$

Пусть теперь $\frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1$. Как и выше получим

$$\varphi_{l,\mu} + \varphi_{l,\mu+1} = d(\mu-1) + d\mu + (2l+2-d) + (2d-2l+1) = 2d\mu + 1 = N + 1.$$

Таким образом, равенство (2.38) доказано. Заметим, что $\widetilde{\mu} = d\mu = d(\mu-1)+\mu \in \{d(\mu-1)+1, d(\mu-1)+2, \ldots, d(\mu-1)+d\}$. Поэтому в силу (2.22) при $s=\mu$ найдется такое $\widetilde{l} \in \{0,1,\ldots,d-1\}$, что $\varphi_{\widetilde{l},\mu} = \widetilde{\mu} = N/2$. Но тогда в силу (2.38) имеем $\varphi_{\widetilde{l},\mu+1} = N/2+1 = \widetilde{\mu}+1$.

Пусть $\nu \in \{1,\ldots,n\}$ — фиксированное число. Так как N чётно, то по определению вектора $\widetilde{a}_\nu$ выполнены равенства (2.34). Поэтому в силу (2.22) и равенств $\varphi_{\widetilde{l},\mu} = \widetilde{\mu}$ и $\varphi_{\widetilde{l},\mu+1} = \widetilde{\mu}+1$, аналогично рассмотрениям предыдущих случаев, имеем

$$
\begin{gathered}
(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,2}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,n}}) = (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \alpha_\nu, \beta_\nu,\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}), \quad l \neq \widetilde{l}, \\
(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,2}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,n}}) \\
= (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \alpha_\nu + \beta_\nu h, \alpha_\nu + \beta_\nu/h,\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}), \quad l = \widetilde{l}.
\end{gathered}
\tag{2.39}
$$

Учитывая определение определителей C_l, $\theta_{L,-1,k}$ и $\delta_{L,k}(h)$ и формулу (2.39), получим

$$
\begin{aligned}
C_l &= \theta_{L,-1,u_l}, \quad l \neq \widetilde{l}, \\
C_l &= \delta_{L,u_l}(h), \quad l = \widetilde{l}.
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Подставляя формулу (2.40) в (2.17), получим

$$
\delta_{L^d,0}(h) = \Omega \cdot \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq\widetilde{l}}}^{d-1} \theta_{L,-1,u_l} \cdot \delta_{L,u_{\widetilde{l}}}(h). \tag{2.41}
$$

Из формулы (2.41) непосредственно видно, что операторы L и L^d регулярны одновременно и усиленно регулярны одновременно.

Таким образом, доказано, что во всех трех случаях операторы L и L^d регулярны одновременно. Относительно усиленной регулярности выполняются все сформулированные в теореме утверждения. Значит, теорема доказана.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность М. М. Маламуду за постановку задачи и внимание к работе. Автор также признателен М. М. Маламуду и Л. Л. Оридороге за ряд ценных замечаний и полезное обсуждение.

Литература

[1] G. D. Birkhoff, H. S. Vandiver, *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations* // Trans. Amer. Math. Soc., **9** (1908), 373–395.

[2] J. Locker, *Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators*, Math. Surveys and Monogr., **73**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[3] A. M. Minkin, *Resolvent growth and Birkhoff-regularity* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **323** (2005), N 1, 387–402.

[4] P. W. Walker, *A nonspectral Birkhoff-regular differential operator* // Proc. Amer. Math. Soc., **66** (1977), N 1, 187–188.

[5] Г. М. Кесельман, *О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов* // Изв. вузов СССР, Математика, (1964), N 2 82–93.

[6] В. П. Михайлов, *О базисах Рисса в* $L_2(0,1)$ // ДАН СССР, **144 (5)** (1962), 981–984.

[7] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

[8] А. А. Шкаликов, *О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора* // Успехи Мат. Наук, **34:5 (209)** (1979), 235–236.

Сведения об авторах

Антон А. Лунёв

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74
83114, Донецк
Украина
E-Mail: Anton_Lunyov@mail.ru